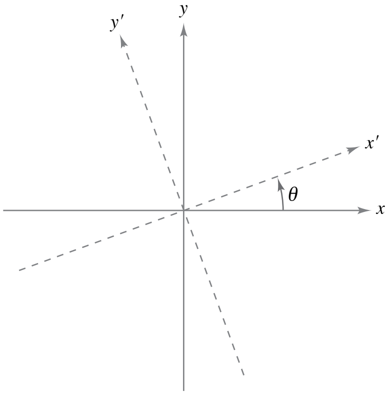
D Rotación y la ecuación general de segundo grado

- **Rotar los ejes coordenados para eliminar el término *xy* en las ecuaciones de las cónicas**
- **Usar el discriminante para clasificar cónicas.**

Rotación de ejes



Después de la rotación de los ejes x y y un ángulo θ en el sentido contrario a las manecillas del reloj, los ejes rotados son denotados por eje x' y eje y'.
Figura D.1

Las ecuaciones de las cónicas con ejes paralelos a uno de los ejes coordenados pueden ser escritas en la forma general

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$ Ejes horizontales o verticales

En este apéndice se estudiarán las ecuaciones de las cónicas cuyos ejes están rotados de manera que *no* son paralelos ni al eje x ni al eje y. La ecuación general para tales cónicas contiene un término xy.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$ Ecuación en el plano xy

Para eliminar este término xy, se puede usar un procedimiento llamado **rotación de ejes**. El objetivo es rotar los ejes x y y hasta que sean paralelos a los ejes de la cónica. Los ejes rotados se denotan como el eje x' y y' el eje, como se muestra en la Figura D.1. Después de la rotación, la ecuación de la cónica en el nuevo plano $x'y'$ tendrá la forma

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0.$$ Ecuación en el plano $x'y'$

Debido a que esta ecuación no tiene término $x'y'$, se puede obtener una forma estándar por completación de cuadrados.

En el siguiente teorema se identificarán el ángulo que deben rotarse los ejes para eliminar el término xy y también las ecuaciones para determinar los nuevos coeficientes A', C', D', E' y F'.

TEOREMA D.1 Rotación de ejes

La ecuación general de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde $B \neq 0$, se puede reescribir como

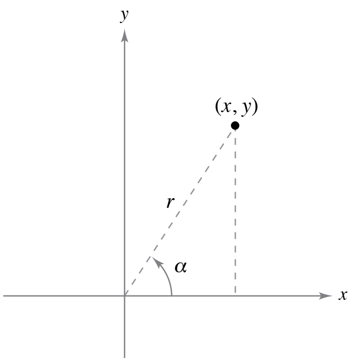
$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

rotando los ejes coordenados un ángulo θ, donde

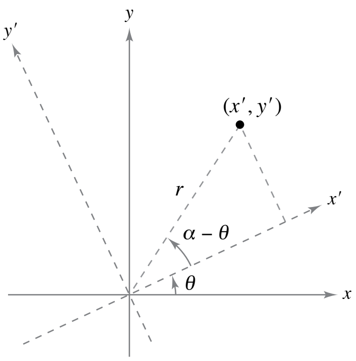
$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}.$$

Los coeficientes de la nueva ecuación se pueden obtener mediante las sustituciones

$$x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta$$
$$y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta.$$



Original: $x = r\cos\alpha$
$y = r\,\text{sen}\,\alpha$



Rotada: $x' = r\cos(\alpha - \theta)$
$y' = r\,\text{sen}(\alpha - \theta)$

Figura D.2

Demostración Para descubrir cómo están relacionadas las coordenadas en el sistema xy con las coordenadas en el nuevo sistema $x'y'$, se elije un punto (x, y) en el sistema original y se intenta expresarlas en el nuevo sistema rotado. En cualquier sistema, la distancia r entre el punto y el origen es la misma, entonces las ecuaciones para x, y, x' y y' están dadas en la figura D.2. Usando las fórmulas para el seno y el coseno de la diferencia de dos ángulos, se obtiene

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\alpha - \theta) \\ &= r(\cos\alpha\cos\theta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\theta) \\ &= r\cos\alpha\cos\theta + r\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\theta \\ &= x\cos\theta + y\,\text{sen}\,\theta \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} y' &= r\,\text{sen}\,(\alpha - \theta) \\ &= r(\text{sen}\,\alpha\cos\theta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\theta) \\ &= r\,\text{sen}\,\alpha\cos\theta - r\cos\alpha\,\text{sen}\,\theta \\ &= y\cos\theta - x\,\text{sen}\,\theta. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema para x y para y se tiene

$$x = x'\cos\theta - y'\,\text{sen}\,\theta \quad \text{y} \quad y = x'\,\text{sen}\,\theta + y'\cos\theta.$$

Finalmente, al sustituir estos valores en la ecuación original y agrupando términos, se tiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\theta + B\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + C\,\text{sen}^2\,\theta \\ C' &= A\,\text{sen}^2\,\theta - B\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + C\cos^2\theta \\ D' &= D\cos\theta + E\,\text{sen}\,\theta \\ E' &= -D\,\text{sen}\,\theta + E\cos\theta \\ F' &= F \end{aligned}$$

Ahora, a fin de eliminar el término $x'y'$, se debe elegir θ de manera que $B' = 0$, luego

$$\begin{aligned} B' &= 2(C - A)\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta) \\ &= (C - A)\,\text{sen}\,2\theta + B\cos 2\theta \\ &= B(\text{sen}\,2\theta)\left(\frac{C - A}{B} + \cot 2\theta\right) \\ &= 0, \quad \text{sen}\,2\theta \neq 0 \end{aligned}$$

Cuando $B = 0$ no es necesaria una rotación, porque el término xy no está presente en la ecuación original. Cuando $B \neq 0$, la única manera de hacer $B' = 0$ es elegir

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}, \quad B \neq 0.$$

De esta forma, se obtiene lo pedido. ■

EJEMPLO 1 Rotación de los ejes de una hipérbola

Escribir la ecuación $xy - 1 = 0$ en forma estándar.

Solución Dado que $A = 0$, $B = 1$ y $C = 0$, se tiene (para $0 < \theta < \pi/2$)

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2\theta = \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

La ecuación en el sistema $x'y'$ se obtiene haciendo las siguientes sustituciones.

$$x = x'\cos\frac{\pi}{4} - y'\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = x'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - y'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}$$

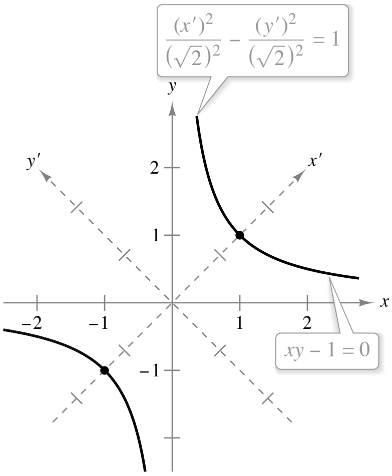
$$y = x'\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + y'\cos\frac{\pi}{4} = x'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + y'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación $xy - 1 = 0$ se tiene

$$\left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right) - 1 = 0$$

$$\frac{(x')^2 - (y')^2}{2} - 1 = 0$$

$$\frac{(x')^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{(y')^2}{(\sqrt{2})^2} = 1. \qquad \text{Ecuación en forma estándar.}$$



Vértices:
$(\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$ en el sistema $x'y'$
$(1, 1), (-1, -1)$ en el sistema xy
Figura D.3

Que es la ecuación de una hipérbola centrada en el origen con vértices en $(\pm\sqrt{2}, 0)$ en el sistema $x'y'$, como se muestra en la figura D.3.

EJEMPLO 2 Rotación de los ejes de una elipse

Trazar la gráfica de $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$.

Solución Dado $A = 7$, $B = -6\sqrt{3}$, y $C = 13$, se tiene (para $0 < \theta < \pi/2$)

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = \frac{7 - 13}{-6\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6}.$$

La ecuación en el sistema $x'y'$ se deriva al hacer las siguientes sustituciones.

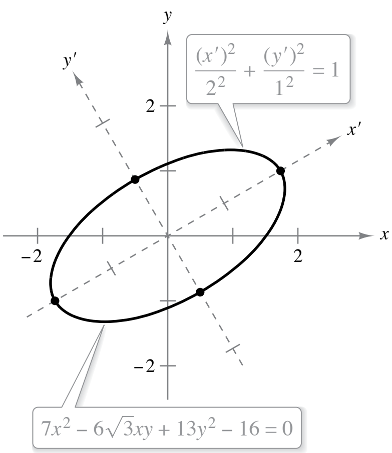
$$x = x'\cos\frac{\pi}{6} - y'\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = x'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}x' - y'}{2}$$

$$y = x'\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + y'\cos\frac{\pi}{6} = x'\left(\frac{1}{2}\right) + y'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{x' + \sqrt{3}y'}{2}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación y después de simplificar se tiene

$$4(x')^2 + 16(y')^2 = 16$$

$$\frac{(x')^2}{2^2} + \frac{(y')^2}{1^2} = 1. \qquad \text{Ecuación en forma estándar.}$$



Vértices:
$(\pm 2, 0), (0, \pm 1)$ en el sistema $x'y'$
$(\pm\sqrt{3}, \pm 1), \left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ en el sistema xy

Figura D.4

Que es la ecuación de una elipse centrada en el origen con vértices en $(\pm 2, 0)$ y $(0, \pm 1)$ en el sistema $x'y'$, como se muestra en la figura D.4.

En los ejemplos 1 y 2, los valores de θ fueron los ángulos comunes 45° y 30°, respectivamente. Por supuesto, muchas ecuaciones de segundo grado no arrojan valores comunes al resolver la ecuación

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}.$$

El ejemplo 3 ilustra este caso.

EJEMPLO 3 Rotación de los ejes de una parábola

Trazar la gráfica de $x^2 - 4xy + 4y^2 + 5\sqrt{5}y + 1 = 0$.

Solución Dado que $A = 1$, $B = -4$, y $C = 4$, se tiene

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = \frac{1 - 4}{-4} = \frac{3}{4}.$$

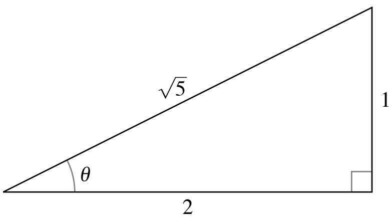


Figura D.5

La identidad trigonométrica $\cot 2\theta = (\cot^2 \theta - 1)/(2 \cot \theta)$ produce

$$\cot 2\theta = \frac{3}{4} = \frac{\cot^2 \theta - 1}{2 \cot \theta}$$

De la cual se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned} 6 \cot \theta &= 4 \cot^2 \theta - 4 \\ 0 &= 4 \cot^2 \theta - 6 \cot \theta - 4 \\ 0 &= (2 \cot \theta - 4)(2 \cot \theta + 1). \end{aligned}$$

Considerando que $0 < \theta < \pi/2$, se sigue que $2 \cot \theta = 4$. De esta manera,

$$\cot \theta = 2 \quad \Rightarrow \quad \theta \approx 26.6°.$$

Del triángulo en la figura D.5, se obtiene $\operatorname{sen} \theta = 1/\sqrt{5}$ y $\cos \theta = 2/\sqrt{5}$. Consecuentemente se puede escribir lo siguiente.

$$x = x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta = x'\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - y'\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2x' - y'}{\sqrt{5}}$$

$$y = x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta = x'\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + y'\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación original se tiene

$$\left(\frac{2x' - y'}{\sqrt{5}}\right)^2 - 4\left(\frac{2x' - y'}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}\right) + 4\left(\frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}\right)^2 + 5\sqrt{5}\left(\frac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}\right) + 1 = 0$$

Lo cual se simplifica en

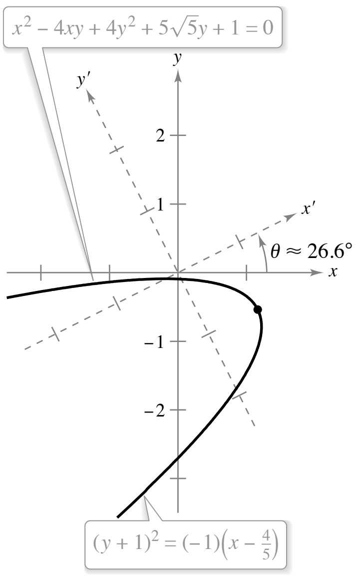
$$5(y')^2 + 5x' + 10y' + 1 = 0.$$

Por completación de cuadrados, se obtiene la forma estándar

$$5(y' + 1)^2 = -5x' + 4$$

$$(y' + 1)^2 = (-1)\left(x' - \frac{4}{5}\right). \qquad \text{Forma estándar.}$$

La gráfica de la ecuación es una parábola con su vértice en $(\frac{4}{5}, -1)$ y su eje paralelo al eje x' en el sistema $x'y'$, como se muestra en la figura D.6.



Vértice:

$\left(\frac{4}{5}, -1\right)$ en el sistema $x'y'$

$\left(\frac{13}{5\sqrt{5}}, -\frac{6}{5\sqrt{5}}\right)$ en el sistema xy

Figura D.6

Invariantes bajo rotación

En el teorema D.1, nótese que el término constante es el mismo en ambas ecuaciones, esto es, $F' = F$. Por esta razón, F se dice ser **invariante bajo rotación**. En el teorema D.2 se listan algunas otras invariantes de rotación. La demostración de este teorema se deja como un ejercicio (ver ejercicio 34).

TEOREMA D.2 Invariantes de rotación

La rotación de los ejes coordenados a través de un ángulo θ que transforma la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ en la forma

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

tiene las siguientes invariantes de rotación.

1. $F = F'$

2. $A + C = A' + C'$

3. $B^2 - 4AC = (B')^2 - 4A'C'$

Se puede utilizar este teorema para clasificar la gráfica de una ecuación de segundo grado *con* un término xy de la misma manera en que se hace para una ecuación de segundo grado *sin* un término xy. Nótese que como $B' = 0$, el invariante $B^2 - 4AC$ se reduce a

$$B^2 - 4AC = -4A'C' \qquad \text{Discriminante}$$

El cual es llamado el **discriminante** de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Dado que el signo de $A'C'$ determina el tipo de la gráfica de la ecuación

$$A'(x')^2 + C'(y')^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

El signo de $B^2 - 4AC$ debe determinar el tipo de gráfica de la ecuación original. Este resultado se establecido en el Teorema D.3.

TEOREMA D.3 Clasificación de las cónicas mediante el discriminante

Exceptuando los casos degenerados, la gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

esta determinada por su discriminante de la siguiente manera.

1. *Elipse o circunferencia:* $B^2 - 4AC < 0$

2. *Parábola:* $B^2 - 4AC = 0$

3. *Hipérbola:* $B^2 - 4AC > 0$

EJEMPLO 4 Usando el discriminante

Clasificar la gráfica de cada ecuación.

a. $4xy - 9 = 0$ **b.** $2x^2 - 3xy + 2y^2 - 2x = 0$

c. $x^2 - 6xy + 9y^2 - 2y + 1 = 0$ **d.** $3x^2 + 8xy + 4y^2 - 7 = 0$

Solución

a. La gráfica es una hipérbola porque

$$B^2 - 4AC = 16 - 0 > 0.$$

b. La gráfica es una circunferencia o una elipse porque

$$B^2 - 4AC = 9 - 0 < 0.$$

b. La gráfica es una parábola porque

$$B^2 - 4AC = 16 - 16 < 0.$$

b. La gráfica es una hipérbola porque

$$B^2 - 4AC = 64 - 48 > 0.$$

D Ejercicios

Rotación de ejes **En los ejercicios 1-12, rotar los ejes para eliminar el término *xy* de la ecuación. Escribir la ecuación resultante en su forma estándar y trazar su gráfica mostrando ambos conjuntos de ejes.**

1. $xy + 1 = 0$

2. $xy - 4 = 0$

3. $x^2 - 10xy + y^2 + 1 = 0$

4. $xy + x - 2y + 3 = 0$

5. $xy - 2y - 4x = 0$

6. $13x^2 + 6\sqrt{3}xy + 7y^2 - 16 = 0$

7. $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 12 = 0$

8. $2x^2 - 3xy - 2y^2 + 10 = 0$

9. $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 + 2x + 2\sqrt{3}y = 0$

10. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 60x - 80y + 100 = 0$

11. $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 90x - 130y = 0$

12. $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 80x - 60y = 0$

Graficando una cónica **En los ejercicios 13-18, utilice alguna herramienta tecnológica adecuada para graficar la cónica. Determine el ángulo θ al que los ejes están rotados. Explique cómo utilizó la herramienta para obtener la gráfica.**

13. $x^2 + xy + y^2 = 10$

14. $x^2 - 4xy + 2y^2 = 6$

15. $17x^2 + 32xy - 7y^2 = 75$

16. $40x^2 + 36xy + 25y^2 = 52$

17. $32x^2 + 50xy + 7y^2 = 52$

18. $4x^2 - 12xy + 9y^2 + \left(4\sqrt{13} + 12\right)x - \left(6\sqrt{13} + 8\right)y = 91$

Uso del discriminante **En los ejercicios 19-26, use el discriminante para determinar si la gráfica de la ecuación es una parábola, una elipse o una hipérbola**

19. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 30x - 40y = 0$

20. $x^2 - 4xy - 2y^2 - 6 = 0$

21. $13x^2 - 8xy + 7y^2 - 45 = 0$

22. $2x^2 + 4xy + 5y^2 + 3x - 4y - 20 = 0$

23. $x^2 - 6xy - 5y^2 + 4x - 22 = 0$

24. $36x^2 - 60xy + 25y^2 + 9y = 0$

25. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 5x - y - 3 = 0$

26. $x^2 + xy + 4y^2 + x + y - 4 = 0$

Cónica degenerada **En los ejercicios 27-32, trazar la gráfica (si es posible) de la cónica degenerada.**

27. $y^2 - 4x^2 = 0$

28. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$

29. $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$

30. $x^2 - 10xy + y^2 = 0$

31. $(x - 2y + 1)(x + 2y - 3) = 0$

32. $(2x + y - 3)^2 = 0$

33. **Invariante bajo rotación** Mostrar que la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ es invariante bajo una rotación de ejes.

34. **Demostración** Probar el teorema D.2.