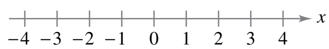
# C Repaso de Precálculo

## C.1 Los números reales y la recta numérica

- **Representar y clasificar a los números reales.**
- **Ordenar números reales y utilizar desigualdades.**
- **Encontrar el valor absoluto de los números reales y encontrar la distancia entre dos números reales.**

### Los números reales y la recta numérica

Los números reales se pueden representar mediante un sistema coordenado llamado la **recta numérica** o eje $x$ (ver Figura C.1). El número real correspondiente a un punto sobre la recta numérica es la **coordenada** del punto. Como se muestra en la Figura C.1, se acostumbra marcar en la recta numérica a los puntos que tienen coordenadas enteras.

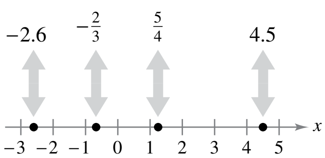



La recta numérica
**Figura C.1**

El punto sobre la recta numérica correspondiente al cero es el **origen** y es denotado por 0. La **dirección positiva** (a la derecha) se denota por una punta de flecha y es la dirección en la que crecen los valores de $x$. Los números a la derecha del origen son **positivos**. Los números a la izquierda del origen son **negativos**. El término **no negativo** describe un número que es positivo o cero. El término **no positivo** describe a un número que es ya sea negativo o cero.

Cada punto en la recta numérica real corresponde a uno y solo un número real, y recíprocamente cada número real corresponde a uno y solo un punto en la recta numérica. Este tipo de relación se llama **correspondencia uno a uno**.

Cada uno de los cuatro puntos en la Figura C.2 corresponde a un **número racional**, que puede escribirse como la razón de dos enteros. (Nótese que $4.5 = \frac{9}{2}$ y $-2.6 = -\frac{13}{5}$). Los números racionales pueden ser representados por una expansión *decimal finita* tales como $\frac{2}{5} = 0.4$ o bien como una expansión *decimal infinita periódica*, tal como $\frac{1}{3} = 0.333\ldots = 0.\overline{3}$.

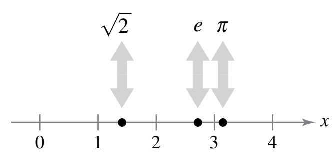



Números racionales
**Figura C.2**

Los números reales que no son racionales son **irracionales**. Los números irracionales no pueden ser representados como expansiones decimales finitas ni como expansiones decimales periódicas. En los cálculos, los números irracionales están representados por aproximaciones decimales infinitas y no periódicas. Tres ejemplos conocidos son

$$\sqrt{2} \approx 1.414213562$$
$$\pi \approx 3.141592654$$
$$e \approx 2.718281828$$

(Ver Figura C.3.)



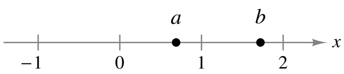

Números irracionales
**Figura C.3**

## Orden y desigualdades

Una propiedad importante de los números reales es que están **ordenados**. Para dos números reales $a$ y $b$, es **menor que** $b$ cuando $b - a$ es positivo. Este orden se denota por la desigualdad

$$a < b.$$

Esta relación también se puede describir diciendo que es $b$ **mayor que** $a$ y se escribe como $b > a$. Si tres números reales $a$, $b$ y $c$ están ordenados de tal manera $a < b$ y $b < c$, entonces $b$ esta **entre** $a$ y $c$ y además $a < b < c$.




$a < b$ si y solo si $a$ está a la izquierda de $b$.
**Figura C.4**

Geométricamente, $a < b$ si y solo si $a$ se encuentra a la *izquierda* de $b$ en la recta numérica. (ver Figura C.4.). Por ejemplo, $1 < 2$ porque el 1 está a la izquierda del 2 en la recta numérica.

A continuación, se enlistan abajo diferentes propiedades útiles al trabajar con desigualdades. Se obtienen propiedades similares cuando $<$ es reemplazado por $\leq$ y $>$ por $\geq$. (Los símbolos $\leq$ y $\geq$ significan **menor o igual** y **mayor o igual**, respectivamente.)

**Propiedades de las desigualdades**

Sean $a$, $b$, $c$, $d$ y $k$ números reales.

1. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$. — Propiedad de transitividad.
2. Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$. — Suma de desigualdades.
3. Si $a < b$, entonces $a + k < b + k$. — Suma de una constante.
4. Si $a < b$ y $k > 0$, entonces $ak < bk$. — Multiplicación por una constante positiva.
5. Si $a < b$ y $k < 0$, entonces $ak > bk$. — Multiplicación por una constante negativa.

Obsérvese que una *desigualdad se invierte* cuando se multiplica por un número negativo. Por ejemplo, si $x < 3$ entonces $-4x > -12$. Esto también aplica al dividir por un numero negativo. Así, si $-2x > 4$ entonces $x < -2$.

Un **conjunto** es una colección de elementos. Dos conjuntos comunes son el conjunto de números reales y el conjunto de puntos en la recta numérica. Muchos problemas en el cálculo involucran **subconjuntos** de uno de estos dos conjuntos. En tales casos, es conveniente usar la **notación de conjuntos** de la forma $\{x\text{: condition on } x\}$, que se lee como sigue.

$$\overbrace{\{}^{\text{El conjunto de}}\quad \overbrace{x}^{\text{todas las } x}\quad \overbrace{:}^{\text{tales que}}\quad \overbrace{\text{condition on } x\}}^{\text{se cumple la condición.}}$$

Por ejemplo, se puede describir al conjunto de los números reales positivos como

$$\{x\colon\ x > 0\}. \qquad \text{Conjunto de los números reales positivos}$$

De manera similar, se puede describir al conjunto de los números reales no negativos como

$$\{x\colon\ x \geq 0\}. \qquad \text{Conjunto de los números reales no negativos}$$

La **unión** de dos conjuntos $A$ y $B$, denotada por $A \cup B$, es el conjunto de elementos que son miembros de $A$ *o de* $B$ *o de ambos*. La **intersección** de dos conjuntos $A$ y $B$ denotada por $A \cap B$, es el conjunto de elementos que son miembros de $A$ y $B$ simultáneamente. Dos conjuntos son **disjuntos** cuando no tienen elementos en común.

Los subconjuntos más utilizados en la recta numérica son los **intervalos**. Por ejemplo, el intervalo **abierto**

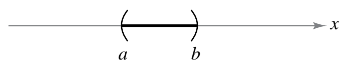
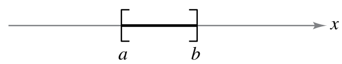
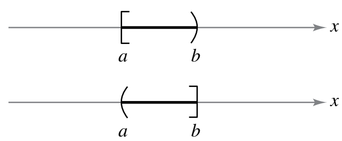
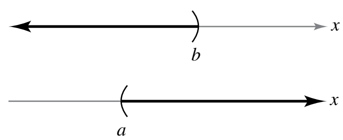
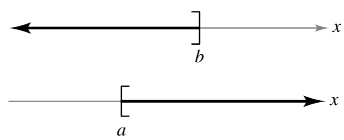
$$(a, b) = \{x: a < x < b\}$$ Intervalo abierto.

es el conjunto de todos los números reales más grandes que $a$ y menores que $b$, donde $a$ y $b$ son los **extremos** del intervalo. Nótese que los extremos no están incluidos en el intervalo abierto. Los intervalos que incluyen sus extremos son **cerrados** y se denotan por

$$[a, b] = \{x: a \leq x \leq b\}.$$ Intervalo cerrado.

Los nueve tipos básicos de intervalos en la recta numérica se muestran a continuación en la tabla. Los primeros cuatro son **intervalos acotados** y los cinco restantes son **intervalos no acotados**. Los intervalos no acotados también se clasifican como abiertos o cerrados. Los intervalos $(-\infty, b)$ y $(a, \infty)$ son abiertos, los intervalos y $(-\infty, b]$ y $[a, \infty)$ son cerrados y el intervalo $(-\infty, \infty)$ se considera abierto *y* cerrado.

**Intervalos en la recta numérica**

| | Notación de intervalos | Notación de conjuntos | Gráfica |
|---|---|---|---|
| **Intervalo abierto** | $(a, b)$ | $\{x: a < x < b\}$ |  |
| **Intervalo cerrado** | $[a, b]$ | $\{x: a \leq x \leq b\}$ |  |
| **Intervalos mixtos** | $[a, b)$<br>$(a, b]$ | $\{x: a \leq x < b\}$<br>$\{x: a < x \leq b\}$ |  |
| **Intervalos infinitos** | $(-\infty, b)$<br>$(a, \infty)$ | $\{x: x < b\}$<br>$\{x: x > a\}$ |  |
| **Intervalos infinitos** | $(-\infty, b]$<br>$[a, \infty)$ | $\{x: x \leq b\}$<br>$\{x: x \geq a\}$ |  |
| **Recta real** | $(-\infty, \infty)$ | $\{x: x$ es un número real$\}$ |  |

Tenga en cuenta que los símbolos $\infty$ y $-\infty$ se refieren al infinito negativo y positivo, respectivamente. Estos símbolos no denotan números reales. Simplemente permiten describir condiciones no acotadas de manera más concisa. Por ejemplo, el intervalo $[a, \infty)$ es no acotado por la derecha porque incluye *todos* los números reales que son mayores o iguales que $a$.

## EJEMPLO 1 Estados líquido y gaseoso del agua

Describir los intervalos en la recta numérica que corresponden a las temperaturas $x$ del agua (en grados Celsius) en

**a.** Un estado líquido. **b.** Un estado gaseoso.

### Solución

**a.** El agua está en estado líquido a temperaturas mayores que 0º C y menores que 100º C, como se muestra en la Figura C.5 (a).

$$(0, 100) = \{x\colon\ 0 < x < 100\}$$

**b.** El agua está en estado gaseoso a temperaturas mayores o iguales que 100º C, como se muestra en la Figura C.5 (b).

$$[100, \infty) = \{x\colon\ x \geq 100\}$$


*a*) Rango de temperatura del agua (en grados Celsius)

*b*) Rango de temperatura del vapor (en grados Celsius)

**Figura C.5**

Si un número real $a$ es una **solución** de una desigualdad, entonces la desigualdad se **satisface** (es verdadera) cuando $a$ se sustituye por $x$. El conjunto de todas las soluciones es el **conjunto solución** de una desigualdad.

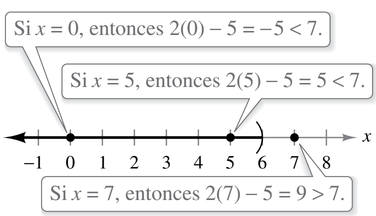
## EJEMPLO 2 Estados líquido y gaseoso del agua

Resolver $2x - 5 < 7$.

### Solución

| | |
|---|---|
| $2x - 5 < 7$ | Escribir la desigualdad original. |
| $2x - 5 + 5 < 7 + 5$ | Sumar 5 a cada lado. |
| $2x < 12$ | Simplificar. |
| $\dfrac{2x}{2} < \dfrac{12}{2}$ | Dividir cada lado por 2. |
| $x < 6$ | Simplificar. |

El conjunto solución es $(-\infty, 6)$.




Verificación de soluciones de $2x - 5 < 7$

**Figure C.6**

En el ejemplo 2, las cinco desigualdades enumeradas como pasos en la solución se dicen **equivalentes** porque tienen el mismo conjunto de soluciones.

Una vez que se ha resuelto una desigualdad, se pueden elegir algunos valores $x$ en el conjunto solución para verificar que satisfagan la desigualdad original. También se pueden elegir valores fuera del conjunto solución para verificar que *no* satisfacen la desigualdad. Por ejemplo, la Figura C.6 muestra que cuando $x = 0$ o $x = 5$ la desigualdad $2x - 5 < 7$ se satisface, pero cuando $x = 7$ la desigualdad no se satisface.

## EJEMPLO 3 Solución de una desigualdad doble

Resolver $-3 \leq 2 - 5x \leq 12$.

### Solución

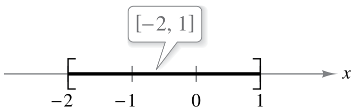
$$-3 \leq 2 - 5x \leq 12 \quad \text{Escribir la desigualdad original.}$$

$$-3 - 2 \leq 2 - 5x - 2 \leq 12 - 2 \quad \text{Restar 2 de cada lado.}$$

$$-5 \leq -5x \leq 10 \quad \text{Simplificar.}$$

$$\frac{-5}{-5} \geq \frac{-5x}{-5} \geq \frac{10}{-5} \quad \text{Dividir cada lado por } -5 \text{ e invertir ambas desigualdades}$$

$$1 \geq x \geq -2 \quad \text{Simplificar.}$$




Conjunto solución de $-3 \leq 2 - 5x \leq 12$
**Figura C.7**

El conjunto solución es $[-2, 1]$, como se muestra en la Figura C.7.

Las desigualdades en los ejemplos 2 y 3 son **desigualdades lineales**, esto es unicamente que involucran polinomios de primer grado. Para resolver desigualdades que involucran polinomios de mayor grado, se usa el hecho de que un polinomio puede cambiar signos *solo* en sus **ceros** reales (los valores que hacer que el polinomio sea igual a cero). Entre dos ceros reales consecutivos, un polinomio debe ser completamente positivo o bien completamente negativo. Esto significa que cuando los ceros reales de un polinomio se ordenan, estos dividen la recta numérica en **intervalos de prueba** en los cuales el polinomio no tiene cambios de signo. Entonces, si un polinomio tiene la forma factorizada

$$(x - r_1)(x - r_2) \cdot \cdot \cdot (x - r_n), \qquad r_1 < r_2 < r_3 < \cdot \cdot \cdot < r_n$$

Entonces los intervalos de prueba son

$$(-\infty, r_1), \quad (r_1, r_2), \ldots, \quad (r_{n-1}, r_n), \quad \text{y} \quad (r_n, \infty).$$

Para determinar el signo del polinomio en cada intervalo de prueba, se necesita probar solamente *un valor* del intervalo.

## EJEMPLO 4 Solución de una desigualdad cuadrática

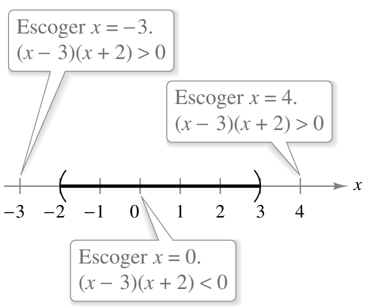
Resolver $x^2 < x + 6$.

### Solución

$$x^2 < x + 6 \quad \text{Escribir la desigualdad original.}$$

$$x^2 - x - 6 < 0 \quad \text{Escribirla en forma general.}$$

$$(x - 3)(x + 2) < 0 \quad \text{Factorizar.}$$




Comprobación de un intervalo

El polinomio $x^2 - x - 6$ tiene a $x = -2$ y a $x = 3$ como sus ceros. Entonces, se puede resolver la desigualdad probando el signo de $x^2 - x - 6$ en cada uno de los intervalos de prueba $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ y $(3, \infty)$. Para probar un intervalo, se elije cualquier número en él y se determina el signo de $x^2 - x - 6$. Después de hacer esto, se encontrará que el polinomio es positivo para todos los números reales en el primer y tercer intervalos, y negativo para todos los números reales en el segundo intervalo. La solución de la desigualdad original es por lo tanto $(-2, 3)$ como se muestra en la Figura C.8. ■

## Valor absoluto y distancia

Si $a$ es un número real, entonces el valor absoluto de $a$ se define por

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

El valor absoluto de un número no puede ser negativo. Por ejemplo, sea $a = -4$ , entonces dado que $-4 < 0$, se tiene

$$|a| = |-4| = -(-4) = 4.$$

Recuerde que el símbolo $-a$ no significa necesariamente que $-a$ sea negativo.

**Operaciones con valor absoluto**

Sean $a$ y $b$ dos números reales y sea $n$ un entero positivo

**1.** $|ab| = |a|\,|b|$ **2.** $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0$

**3.** $|a| = \sqrt{a^2}$ **4.** $|a^n| = |a|^n$

**El valor absoluto y las propiedades de las desigualdades**

Sean $a$ y $b$ dos números reales y sea $k$ un número real positivo

**1.** $-|a| \leq a \leq |a|$

**2.** $|a| \leq k$ si solo si $-k \leq a \leq k$.

**3.** $|a| \geq k$ si y solo si $a \leq -k$ o $a \geq k$.

**4.** *Desigualdad del triángulo:* $|a + b| \leq |a| + |b|$

Las propiedades 2 y 3 también son verdaderas cuando ≤ se reemplaza por < y ≥ se reemplaza por >.

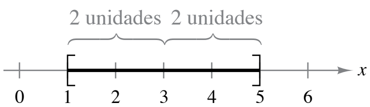
### EJEMPLO 5 Solución de una desigualdad con valor absoluto

Resolver $|x - 3| \leq 2$.

**Solución** Usando la segunda propiedad del valor absoluto para desigualdades, se puede reescribir la desigualdad original como una desigualdad doble

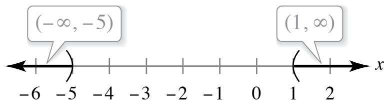
$$\begin{aligned} -2 \leq{}& x - 3 \leq 2 && \text{Escribir como desigualdad doble.} \\ -2 + 3 \leq{}& x - 3 + 3 \leq 2 + 3 && \text{Agregar 3 a cada miembro.} \\ 1 \leq{}& x \leq 5 && \text{Simplificar.} \end{aligned}$$

El conjunto solución es $[1, 5]$ como se muestra en la Figura C.9.




Conjunto solución de $|x - 3| \leq 2$
**Figura C.9**

## EJEMPLO 6 Un conjunto solución de dos intervalos



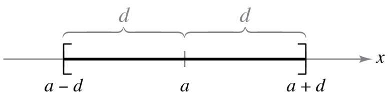
Conjunto solución de $|x + 2| > 3$
**Figura C.10**

Resolver $|x + 2| > 3$.

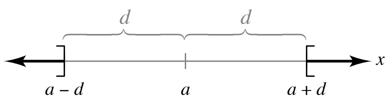
**Solución** Usando la tercera propiedad del valor absoluto y las desigualdades, se puede reescribir la desigualdad original como dos desigualdades lineales.

$$\begin{aligned} x + 2 &< -3 \quad \text{o} \quad & x + 2 &> 3 \\ x &< -5 & x &> 1 \end{aligned}$$

El conjunto solución es la unión de los intervalos disjuntos $(-\infty, -5)$ y $(1, \infty)$, como se muestra en la Figura C.10.



Conjunto solución de $|x - a| \leq d$



Conjunto solución de $|x - a| \geq d$
**Figura C.11**

Los ejemplos 5 y 6 ilustran los resultados generales que se muestran en la figura C.11. Nótese que para $d > 0$, el conjunto solución para la desigualdad $|x - a| \leq d$ es un intervalo *único*, mientras que el conjunto solución para la desigualdad $|x - a| \geq d$ es la unión de *dos* intervalos disjuntos.

La **distancia entre dos puntos** $a$ y $b$ en la recta numérica está dada por

$$d = |a - b| = |b - a|.$$

La **distancia dirigida de *a* a *b*** es $b - a$ y la **distancia dirigida de *b* a *a*** es $a - b$, como se muestra en la Figura C.12.

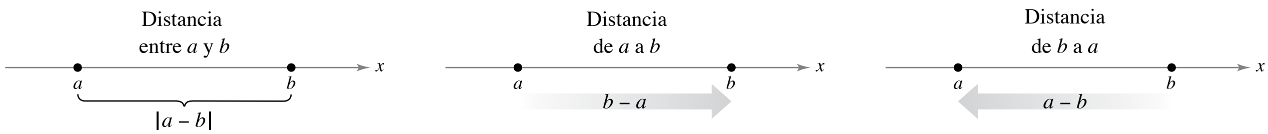


**Figura C.12**

## EJEMPLO 7 Distancia en la recta numérica

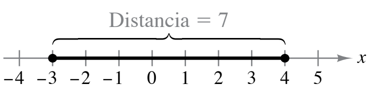


**Figura C.13**

**a.** La distancia entre $-3$ y 4 es

$$|4 - (-3)| = |7| = 7 \quad \text{o} \quad |-3 - 4| = |-7| = 7.$$

**b.** La distancia dirigida de $-3$ a 4 es

4 $\quad 4 - (-3) = 7.$

**c.** La distancia dirigida de 4 a $-3$ es

4 $\quad -3 - 4 = -7.$

El **punto medio** de un intervalo con puntos finales $a$ y $b$ es el valor promedio de $a$ y $b$. Esto es,

$$\text{Punto medio de un intervalo } (a, b) = \frac{a + b}{2}.$$

Para mostrar que este es en efecto el punto medio, solo se necesita mostrar que $(a + b)/2$ es equidistante de $a$ y $b$.

# C.1 Ejercicios

**¿Racional o irracional?** **En los ejercicios 1-10, determine si el número real es racional o irracional.**

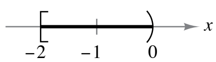
1. $0.7$
2. $-3678$
3. $\dfrac{3\pi}{2}$
4. $3\sqrt{2} - 1$
5. $4.3\overline{451}$
6. $\frac{22}{7}$
7. $\sqrt[3]{64}$
8. $0.\overline{8177}$
9. $4\frac{5}{8}$
10. $(\sqrt{2})^3$

**Decimal repetido** **En los ejercicios 11-14, escriba el decimal repetido como una razón de dos enteros utilizando el siguiente procedimiento. Si $x = 0.6363\ldots$, entonces $100x = 63.6363\ldots$. Restando la primera expresión de la segunda se tiene $99x = 63$ o bien $x = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$.**

11. $0.\overline{36}$
12. $0.3\overline{18}$
13. $0.\overline{297}$
14. $0.\overline{9900}$

15. **Uso de las propiedades de las desigualdades** Dados $a < b$, determinar cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos.
    (a) $a + 2 < b + 2$ (b) $5b < 5a$
    (c) $5 - a > 5 - b$ (d) $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$
    (e) $(a - b)(b - a) > 0$ (f) $a^2 < b^2$

16. **Intervalos y gráficas de números reales** Completar la tabla con la notación de intervalos adecuada, notación de conjuntos y la gráfica en la recta numérica.

| Notación de intervalos | Notación de conjuntos | Gráfica |
|---|---|---|
| | |   |
| $(-\infty, -4]$ | | |
| | $\{x: 3 \le x \le \frac{11}{2}\}$ | |
| $(-1, 7)$ | | |

**Análisis de una desigualdad** **En los ejercicios 17-20, describa verbalmente el subconjunto de números reales representado por la desigualdad. Dibuje el subconjunto sobre la recta numérica y establezca si el intervalo es acotado o no acotado.**

17. $-3 < x < 3$
18. $x \ge 4$
19. $x \le 5$
20. $0 \le x < 8$

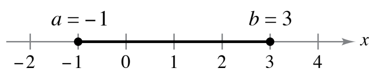
**Uso de desigualdades y notación de intervalos** **En los ejercicios 21-24, usar desigualdades y notación de intervalos para describir el conjunto.**

21. $y$ es al menos 4.
22. $q$ es no negativa.
23. Se espera que la tasa de interés $r$ sobre los préstamos sea superior al 3% y no mayor al 7%.
24. Se pronostica que la temperatura de hoy estará por encima de 90 °F.

**Solución de una desigualdad** **En los ejercicios 25-44, resolver la desigualdad y graficar la solución sobre la recta numérica.**

25. $2x - 1 \ge 0$
26. $3x + 1 \ge 2x + 2$
27. $-4 < 2x - 3 < 4$
28. $0 \le x + 3 < 5$
29. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} > 5$
30. $x > \dfrac{1}{x}$
31. $|x| < 1$
32. $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{3} > 5$
33. $\left|\dfrac{x-3}{2}\right| \ge 5$
34. $\left|\dfrac{x}{2}\right| > 3$
35. $|x - a| < b,\ b > 0$
36. $|x + 2| < 5$
37. $|2x + 1| < 5$
38. $|3x + 1| \ge 4$
39. $\left|1 - \dfrac{2}{3}x\right| < 1$
40. $|9 - 2x| < 1$
41. $x^2 \le 3 - 2x$
42. $x^4 - x \le 0$
43. $x^2 + x - 1 \le 5$
44. $2x^2 + 1 < 9x - 3$

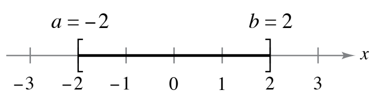
**Distancia en la recta numérica** **En los ejercicios 45-48, encontrar la distancia dirigida de $a$ a $b$, la distancia dirigida de $b$ a $a$ y la distancia entre $a$ y $b$.**

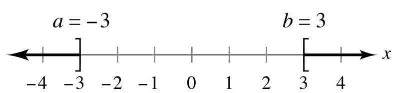
45. 

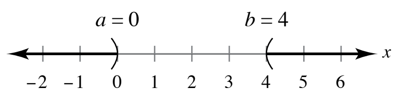

46. 

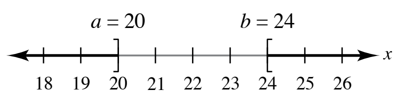

47. (a) $a = 126, b = 75$
    (b) $a = -126, b = -75$
48. (a) $a = 9.34, b = -5.65$
    (b) $a = \frac{16}{5}, b = \frac{112}{75}$

**Uso de la notación de valor absoluto** **En los ejercicios 49-54, usar la notación de valor absoluto para definir el intervalo o par de intervalos sobre la recta numérica.**

49. 


50. 


51. 


52. 

**53.** (a) Todos los números que están a lo más a 10 unidades del 12.

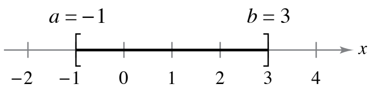
(b) Todos los números que están al menos a 10 unidades del 12.

**54.** (a) $y$ es al menos 4.

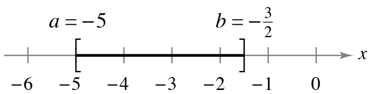
(b) $y$ está a menos de $\delta$ unidades de $c$.

**Determinación del punto medio** **En los ejercicios 55-58, encontrar el punto medio del intervalo.**

**55.**




**56.**




**57.** (a) $[7, 21]$

(b) $[8.6, 11.4]$

**58.** (a) $[-6.85, 9.35]$

(b) $[-4.6, -1.3]$

**59. Beneficio** El ingreso $R$ por vender $x$ unidades de un producto es.

$R = 115.95x$

y el costo de producir $x$ unidades es

$C = 95x + 750.$

Para obtener un beneficio (positivo), $R$ debe ser mayor que $C$. ¿Para qué valores de $x$ devolverá el producto un beneficio?

**60. Costos de flota** Una empresa de servicios públicos tiene una flota de camionetas. El costo operativo anual (en dólares) de cada camioneta se estima ser

$C = 0.32m + 2300$

donde $m$ se mide en millas. La empresa quiere que el costo operativo anual de cada camioneta sea menor que \$10 000. Para hacer esto, $m$ debe ser menor que qué valor?

**61. Moneda justa** Para determinar si una moneda es justa (que tiene igual probabilidad de caer "águila" hacia arriba o "sol" hacia arriba), se arroja la moneda 100 veces y se registra el número $x$ de "soles" o de "aguilas". La moneda se declara no justa cuando

$$\left|\frac{x - 50}{5}\right| \geq 1.645.$$

¿Para qué valores de $x$ la moneda será declarada no justa?

**62. Producción diaria** La producción diaria estimada de petróleo en una refinería está dada por

$|p - 2\,250\,000| < 125\,000$

Donde $p$ se mide en barriles. Determinar los niveles de producción alto y bajo.

**¿Qué número es mayor?** **En los ejercicios 63 y 64, determinar cuál de los dos números reales es mayor.**

**63.** (a) $\pi$ o $\frac{355}{113}$

(b) $\pi$ o $\frac{22}{7}$

**64.** (a) $\frac{224}{151}$ o $\frac{144}{97}$

(b) $\frac{73}{81}$ o $\frac{6427}{7132}$

**65. Aproximación de potencias de 10** La luz viaja a la velocidad de $2.998 \times 10^8$ metros por segundo. ¿Cuál es la mejor estimación de la distancia en metros que viaja la luz en un año?

(a) $9.5 \times 10^5$ (b) $9.5 \times 10^{15}$

(c) $9.5 \times 10^{12}$ (d) $9.6 \times 10^{16}$

**66. Escritura** La precisión de la aproximación de un número está relacionada con cuántos dígitos significativos hay en la aproximación. Escriba una definición de dígitos significativos e ilustre el concepto con ejemplos.

**Falso o verdadero** **En los ejercicios 67-72, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un contraejemplo que muestre que es falso.**

**67.** El recíproco de un entero distinto de cero es un entero.

**68.** El recíproco de un número racional distinto de cero es un número racional.

**69.** Cada número real es racional o irracional.

**70.** El valor absoluto de cada número real es positivo.

**71.** Si $x < 0$, entonces $\sqrt{x^2} = -x$.

**72.** Si $a$ y $b$ son dos números reales diferentes, entonces $a < b$ o $a > b$.

**Demostración** **En los ejercicios 73-80, demostrar la propiedad dada.**

**73.** $|ab| = |a||b|$

**74.** $|a - b| = |b - a|$

[*Sugerencia*: $(a - b) = (-1)(b - a)$]

**75.** $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0$

**76.** $|a| = \sqrt{a^2}$

**77.** $|a^n| = |a|^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

**78.** $-|a| \leq a \leq |a|$

**79.** $|a| \leq k$ si y solo si $-k \leq a \leq k, \quad k > 0.$

**80.** $|a| \geq k$ si y solo si $a \leq -k$ o $a \geq k, \quad k > 0.$

**81. Demostración** Encontrar un ejemplo para el cual $|a - b| > |a| - |b|$ y un ejemplo para el cual $|a - b| = |a| - |b|$. Posteriormente demostrar que $|a - b| \geq |a| - |b|$ para todos los valores de $a$ y $b$.

**82. Máximo y mínimo** Mostrar que el máximo de dos números $a$ y $b$ está dado por la expresión

$\text{máx}(a, b) = \frac{1}{2}\left(a + b + |a - b|\right).$

Deducir una forma similar para $\text{mín}(a, b)$.

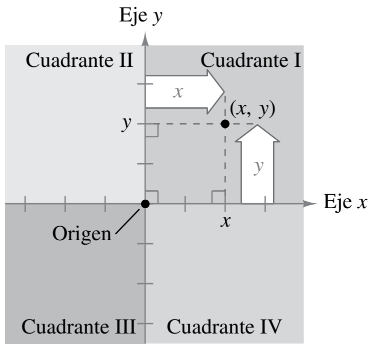
# C.2 El plano cartesiano

- **Comprender el concepto de plano cartesiano.**
- **Hallar la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano y las coordenadas del punto medio de un segmento utilizando las fórmulas correspondientes.**
- **Determinar ecuaciones de circunferencias y trazar sus gráficas.**

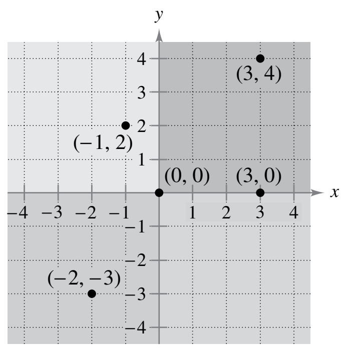
## El plano cartesiano

Así como se puede representar a los números reales por medio de puntos en la recta numérica, también se puede representar a los pares ordenados de números reales por medio de puntos en un plano llamado **sistema de coordenadas rectangulares**, o el **plano cartesiano**, según el matemático francés René Descartes.

El plano cartesiano está formado por rectas numéricas que se intersecan en un ángulo recto, como se muestra en la figura C.14. La recta numérica horizontal generalmente se llama **eje *x***, y la recta numérica vertical se llama **eje *y***. El punto de intersección de estos dos ejes es el **origen**. Los dos ejes dividen el plano en cuatro partes llamadas **cuadrantes**.




El plano cartesiano
**Figura C.14**




Puntos representados por pares ordenados
**Figura C.15**

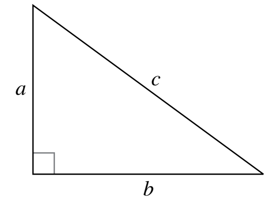
Cada punto en el plano está identificado por un **par ordenado** $(x, y)$ de números reales $x$ y $y$, llamadas las **coordenadas** del punto. El número $x$ representa la distancia dirigida desde el eje $y$ hasta el punto, y el número $y$ representa la distancia dirigida desde el eje $x$ hasta el punto (ver Figura C.14). Para el punto $(x, y)$, la primera coordenada es la **coordenada *x*** o **abscisa**, y la segunda coordenada es la **coordenada *y*** u **ordenada**.

Por ejemplo, la Figura C.15 muestra las ubicaciones de los puntos $(-1,2)$, $(3,4)$, $(0,0)$, $(3,0)$ y $(-2, -3)$ en el plano cartesiano. Los signos de las coordenadas de un punto determinan el cuadrante en el cual se encuentra el punto. Por ejemplo, si $x > 0$ $y < 0$ y el punto $(x, y)$ se encuentra en el cuadrante IV.

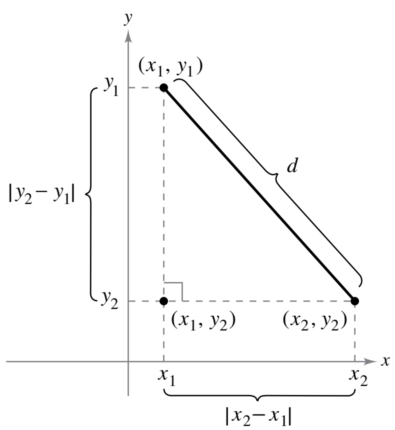
Nótese que un par ordenado $(a, b)$ se utiliza para denotar un punto en el plano o un intervalo abierto en la recta numérica real. Esto, sin embargo, no debería resultar confuso, la naturaleza del problema debe sugerir si se trata de un punto en el plano o de un intervalo abierto.

## Las fórmulas de la distancia y el punto medio

Del Teorema de Pitágoras se sabe que, en un triángulo rectángulo, la hipotenusa $c$ y los lados $a$ y $b$ están relacionados por $a^2 + b^2 = c^2$. Recíprocamente, si $a^2 + b^2 = c^2$ entonces el triángulo en cuestión es un triángulo rectángulo (ver Figura C.16).




El teorema de Pitágoras:
$a^2 + b^2 = c^2$
**Figura C.16**




La distancia entre dos puntos
**Figura C.17**

Ahora, considere el problema de determinar la distancia $d$ entre los dos puntos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ en el plano. Si los puntos se encuentran en una línea horizontal, entonces $y_1 = y_2$ y la distancia entre los puntos es $x_1 = x_2$. Si los puntos se encuentran en una línea vertical, entonces la distancia entre los puntos es $|y_2 - y_1|$. Cuando los dos puntos no están sobre una línea horizontal ni vertical, se pueden usar para formar un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura C.17. La longitud del lado vertical del triángulo es $|y_2 - y_1|$ y la longitud del lado horizontal es $|x_2 - x_1|$. Por el Teorema de Pitágoras, se deduce que

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$
$$d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}.$$

Reemplazando $|x_2 - x_1|^2$ y $|y_2 - y_1|^2$ por las expresiones equivalentes $(x_2 - x_2)^2$ y $(y_2 - y_2)^2$ se obtiene la **fórmula de la distancia**.

> **La fórmula de la distancia**
>
> La distancia $d$ entre los puntos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ en el plano está dada por
>
> $$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

**EJEMPLO 1** **Distancia entre dos puntos**

Hallar la distancia entre los puntos $(-2, 1)$ y $(3, 4)$.

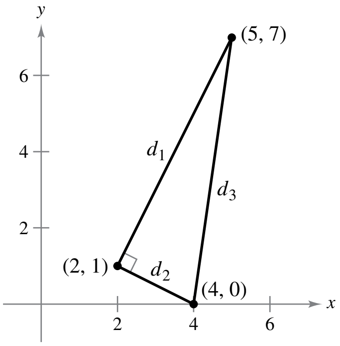
**Solución**

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} && \text{Fórmula de la distancia.} \\ &= \sqrt{[3 - (-2)]^2 + (4 - 1)^2} && \text{Sustituir } x_1, y_1, x_2 \text{ y } y_2. \\ &= \sqrt{5^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{25 + 9} \\ &= \sqrt{34} \\ &\approx 5.83 \end{aligned}$$

## EJEMPLO 2 Verificación un triángulo rectángulo

Verificar que los puntos (2, 1), (4, 0) y (5, 7) forman los vértices de un triángulo rectángulo.

**Solución** La figura C.18 muestra el triángulo formado por los tres puntos. Las longitudes de los tres lados son las siguientes.




Prueba de un triángulo rectángulo
**Figura C.18**

$$d_1 = \sqrt{(5-2)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$
$$d_2 = \sqrt{(4-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$
$$d_3 = \sqrt{(5-4)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$$

Dado que

$$d_1^2 + d_2^2 = 45 + 5 = 50 \qquad \text{Suma de cuadrados de los lados.}$$

y

$$d_3^2 = 50 \qquad \text{Cuadrado de la hipotenusa.}$$

Se puede aplicar el Teorema de Pitágoras para concluir que se trata de un triángulo rectángulo.

## EJEMPLO 3 Uso de la fórmula de la distancia

Hallar el valor de $x$ de tal manera que la distancia entre $(x, 3)$ y $(2, -1)$ sea 5.

**Solución** Usando la fórmula de la distancia, se puede escribir.

$$5 = \sqrt{(x-2)^2 + [3-(-1)]^2} \qquad \text{Fórmula de la distancia.}$$
$$25 = (x^2 - 4x + 4) + 16 \qquad \text{Elevar al cuadrado de cada lado.}$$
$$0 = x^2 - 4x - 5 \qquad \text{Escribir en forma general.}$$
$$0 = (x-5)(x+1) \qquad \text{Factorizar.}$$

De donde $x = 5$ o $x = -1$, y se puede concluir que hay dos soluciones. Es decir cada uno de los puntos (5, 3) y $(-1, 3)$ está a cinco unidades del punto $(2, -1)$, como se muestra en la Figura C.19.

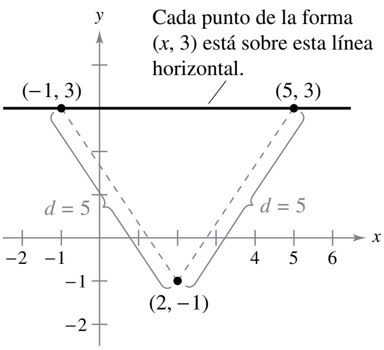



**Figura C.19**

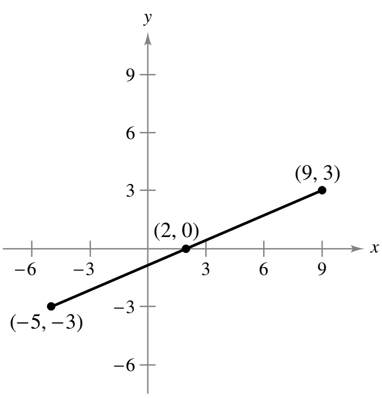
Las coordenadas del **punto medio** del segmento de recta que une a dos puntos se pueden encontrar “promediando” las coordenadas $x$ y las coordenadas $y$ de los dos puntos, respectivamente. Es decir, el punto medio del segmento de recta que une a los puntos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ en el plano es

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right). \qquad \text{Fórmula del punto medio.}$$

Por ejemplo, el punto medio del segmento que une a los puntos $(-5, -3)$ y (9, 3) es

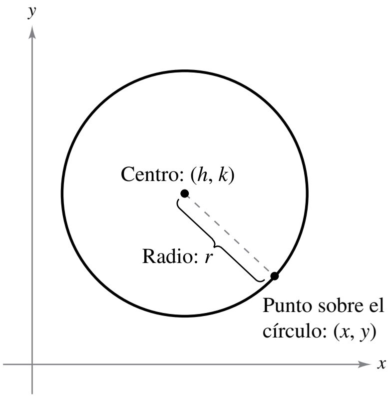
$$\left(\frac{-5+9}{2}, \frac{-3+3}{2}\right) = (2, 0)$$

Como se muestra en la figura C.20.




Punto medio de un segmento de línea
**Figura C.20**

## La ecuación de la circunferencia




Definición de un círculo
**Figura C.21**

Una **circunferencia** se puede definir como el conjunto de todos los puntos en un plano que son equidistantes de un punto fijo. El punto fijo es el **centro** de la circunferencia y la distancia entre el centro y un punto sobre la circunferencia es el **radio** (ver Figura C.21).

Se puede usar la fórmula de distancia para escribir una ecuación de la circunferencia con centro $(h, k)$ y radio $r$. Sea $(x, y)$ cualquier punto de la circunferencia. La distancia entre $(x, y)$ y el centro $(h, k)$ está dado por

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r.$$

Al elevar al cuadrado cada lado de esta ecuación, se obtiene la **forma ordinaria (estándar)** de la ecuación de una circunferencia.

> **Forma ordinaria de la ecuación de una circunferencia**
> El punto $(x, y)$ se encuentra en la circunferencia de radio $r$ y centro $(h, k)$ si y solo si
> $$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

Si la circunferencia tiene su centro en el origen y radio $r$, la ecuación se reduce a la llamada **forma canónica**, esto es, si $(h, k) = (0, 0)$ entonces

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Si $r = 1$, entonces la circunferencia se dice **unitaria**.

### EJEMPLO 4 Determinación de la ecuación de una circunferencia

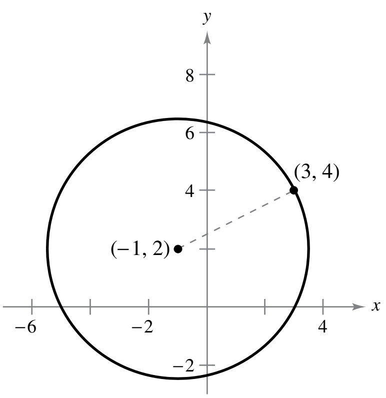



**Figura C.22**

Determinar la ecuación en forma ordinaria de una circunferencia con centro en $(-1, 2)$ y que pasa por el punto $(3, 4)$, como se muestra en la Figura C.22.

**Solución** El radio de la circunferencia es la distancia entre $(-1, 2)$ y $(3, 4)$.

$$r = \sqrt{[3 - (-1)]^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

Se puede escribir la ecuación en forma ordinaria de esta circunferencia como

$$[x - (-1)]^2 + (y - 2)^2 = \left(\sqrt{20}\right)^2$$
$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 20. \qquad \text{Forma ordinaria.}$$

Si se elevan los binomios al cuadrado y se simplifica, la forma ordinaria $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ se puede escribir en la forma **general de la ecuación de una circunferencia**.

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad A \neq 0$$

Recíprocamente, para reducir la forma general a la forma ordinaria

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = p$$

Se realiza un proceso de **completación de cuadrados**. Si $p > 0$, la gráfica de la ecuación es una circunferencia. Si $p = 0$, el gráfico es el único punto $(h, k)$. Si $p < 0$ la ecuación no tiene gráfica.

## EJEMPLO 5 Completación del cuadrado

Trace la gráfica de la circunferencia con ecuación general

$$4x^2 + 4y^2 + 20x - 16y + 37 = 0.$$

**Solución** Para completar el cuadrado, primero divida por 4 para que los coeficientes de $x^2$ y $y^2$ sean ambos 1.

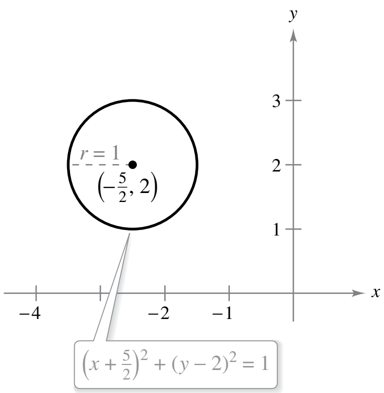
$$4x^2 + 4y^2 + 20x - 16y + 37 = 0 \qquad \text{Ecuación original.}$$

$$x^2 + y^2 + 5x - 4y + \frac{37}{4} = 0 \qquad \text{Dividir por 4.}$$

$$(x^2 + 5x + \quad) + (y^2 - 4y + \quad) = -\frac{37}{4} \qquad \text{Agrupar términos.}$$

$$\left(x^2 + 5x + \underbrace{\frac{25}{4}}_{(\text{mitad})^2}\right) + (y^2 - 4y + \underbrace{4}_{(\text{mitad})^2}) = -\frac{37}{4} + \frac{25}{4} + 4 \qquad \text{Completar cuadrados agregando } \left(\tfrac{5}{2}\right)^2 = \tfrac{25}{4} \text{ y } \left(\tfrac{4}{2}\right)^2 = 4 \text{ a cada lado}$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = 1 \qquad \text{Forma ordinaria.}$$




Un círculo de radio 1 y centro en $\left(-\frac{5}{2}, 2\right)$
**Figura C.23**

Nótese que para completar los cuadrados se suma de ambos lados de la ecuación el cuadrado de la mitad del coeficiente de $x$ y el cuadrado de la mitad del coeficiente de $y$. La circunferencia está centrada en el punto $\left(-\frac{5}{2}, 2\right)$ y su radio es 1, como se muestra en la Figura C.23.

Hasta ahora se han revisado algunos conceptos fundamentales de la *geometría analítica*. Hoy en día, estos conceptos se utilizan de manera tan común que es muy fácil pasar por alto su revolucionaria naturaleza. Hasta antes de que la geometría analítica fuera desarrollada por Pierre de Fermat y René Descartes, las dos ramas principales de las matemáticas: geometría y álgebra, fueron por mucho tiempo independientes una de la otra. Mientras que las circunferencias pertenecían a la geometría, las ecuaciones pertenecían al álgebra. La relación de los puntos de una circunferencia y las soluciones de una ecuación pertenecen a lo que ahora se llama geometría analítica.

Es importante ser un experto en geometría analítica para poder moverse con facilidad entre la geometría y el álgebra. Por ejemplo, en el Ejemplo 4, se dio una descripción geométrica de una circunferencia y se pidió encontrar una ecuación algebraica para ella. Se paso de la geometría al álgebra. Del mismo modo, en el ejemplo 5 se dió una ecuación algebraica y se traza una imagen geométrica. En este caso, se pasó del álgebra a la geometría. Estos dos ejemplos ilustran los dos problemas fundamentales en la geometría analítica.

**1.** Dada una gráfica, hallar su ecuación.

Geometría $\Rightarrow$ Álgebra

**2.** Dada una gráfica, hallar su ecuación.

Álgebra $\Rightarrow$ Geometría

# C.2 Ejercicios

**Uso de las fórmulas de distancia y punto medio** **En los ejercicios 1–6, (a) trace los puntos, (b) encuentre la distancia entre los puntos y (c) encuentre el punto medio del segmento de recta que une los puntos.**

1. $(2, 1), (4, 5)$
2. $(-3, 2), (3, -2)$
3. $\left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(-\frac{3}{2}, -5\right)$
4. $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right), \left(\frac{5}{6}, 1\right)$
5. $\left(1, \sqrt{3}\right), (-1, 1)$
6. $(-2, 0), \left(0, \sqrt{2}\right)$

**Localización de un punto** **En los ejercicios 7 a 10, determine el cuadrante(s) en el que se ubica el punto $(x, y)$ de manera que la(s) condición(es) se satisface.**

7. $x = -2$ y $y > 0$
8. $y < -2$
9. $xy > 0$
10. $(x, -y)$ esta en el cuadrante II.

**Vértices de un polígono** **En los ejercicios 11 a 14, demuestre que los puntos son los vértices del polígono. (Un rombo es un cuadrilátero cuyos lados son todos de la misma longitud.)**

| | Vértices | Polígono |
|---|---|---|
| 11. | $(4, 0), (2, 1), (-1, -5)$ | Triángulo rectángulo |
| 12. | $(1, -3), (3, 2), (-2, 4)$ | Triángulo isósceles |
| 13. | $(0, 0), (1, 2), (2, 1), (3, 3)$ | Rombo |
| 14. | $(0, 1), (3, 7), (4, 4), (1, -2)$ | Paralelogramo |

15. **Número de tiendas** La tabla muestra el número de Tiendas Target cada año $x$ desde 2002 hasta 2011. (*Fuente*: Target Corp.)

| Año, $x$ | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 |
|---|---|---|---|---|---|
| Número, $y$ | 1147 | 1225 | 1308 | 1397 | 1488 |

| Año, $x$ | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 |
|---|---|---|---|---|---|
| Número, $y$ | 1591 | 1682 | 1740 | 1750 | 1763 |

Seleccione escalas adecuadas en los ejes coordenados y trace los puntos $(x, y)$.

16. **Conjetura** Grafique los puntos $(2, 1)$, $(3, 5)$ y $(7, -3)$ en un sistema de coordenadas rectangulares. Luego cambie el signo de la coordenada $x$ cada punto y grafique los tres nuevos puntos en el mismo sistema de coordenadas. ¿Qué conjetura se puede hacer acerca de la ubicación de un punto cuando el signo de la coordenada $x$ se cambia? Repita el ejercicio para el caso en que los signos de las coordenadas y se cambian.

**¿Puntos colineales?** **En los ejercicios 17 a 20, usa la fórmula de la distancia para determinar si los puntos se encuentran en la misma línea.**

17. $(0, -4), (2, 0), (3, 2)$
18. $(0, 4), (7, -6), (-5, 11)$
19. $(-2, 1), (-1, 0), (2, -2)$
20. $(-1, 1), (3, 3), (5, 5)$

**Uso la fórmula de la distancia** **En los ejercicios 21 y 22, encuentre el valor de $x$ de tal manera que la distancia entre los puntos es 5.**

21. $(0, 0), (x, -4)$
22. $(2, -1), (x, 2)$

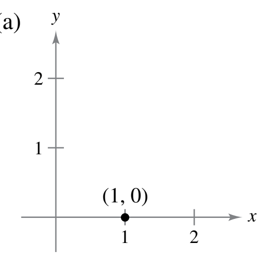
**Uso la fórmula de la distancia** **En los ejercicios 23 y 24, encuentre el valor de y de tal manera que la distancia entre los puntos es 8.**

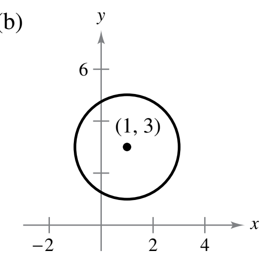
23. $(0, 0), (3, y)$
24. $(5, 1), (5, y)$

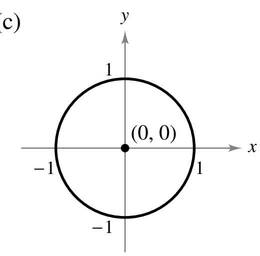
25. **Uso de la fórmula del punto medio** Use la fórmula del punto medio para encontrar los tres puntos que dividen el segmento de recta que une a los puntos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ en cuatro partes iguales.
26. **Uso de la fórmula del punto medio** Use el resultado del ejercicio 25 para encontrar los puntos que dividen el segmento de recta que une a los puntos dados en cuatro partes iguales.

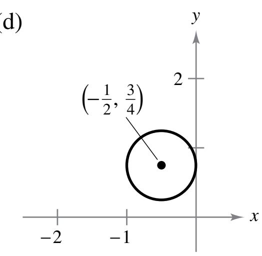
    (a) $(1, -2), (4, -1)$ (b) $(-2, -3), (0, 0)$

**Coincidencia** **En los ejercicios 27 a 30, relacione la ecuación con su grafica. [Los gráficos están marcados por (a), (b), (c) y (d).]**

(a)



(b)



(c)



(d)



27. $x^2 + y^2 = 1$
28. $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$
29. $(x - 1)^2 + y^2 = 0$
30. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$

**Escribir la ecuación de una circunferencia** **En los ejercicios 31 a 38, escriba la ecuación de la circunferencia en forma general.**

31. Centro: $(0, 0)$
    Radio: 3
32. Centro: $(0, 0)$
    Radio: 5
33. Centro: $(2, -1)$
    Radio: 4
34. Centro: $(-4, 3)$
    Radio: $\frac{5}{8}$

**35.** Centro: $(-1, 2)$
Punto sobre el círculo: $(0, 0)$

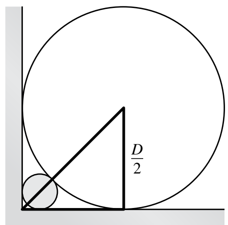
**6.** Centro: $(3, -2)$
Punto sobre el círculo: $(-1, 1)$

**37.** Extremos de un diámetro: $(2, 5), (4, -1)$

**38.** Extremos de un diámetro: $(1, 1), (-1, -1)$

**39. Comunicación satelital** Escribir la forma ordinaria de la ecuación de la trayectoria de un satélite de comunicaciones en una orbita circular a 22 000 millas de altitud. (Suponga que el radio de la tierra es de 4 000 millas.)

**40. Diseño de construcción** Un conducto de aire circular de diámetro se ajusta firmemente en el ángulo recto de la esquina formado entre la pared y el piso. (Ver figura). Encuentre el diámetro más grande de la tubería de agua que se puede colocar en la esquina en ángulo recto y detrás del conducto de aire.




**Escribir la ecuación de una circunferencia** **En los ejercicios 41-48, escriba la forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia y trace su gráfica.**

**41.** $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$

**42.** $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$

**43.** $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$

**44.** $3x^2 + 3y^2 - 6y - 1 = 0$

**45.** $2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$

**46.** $4x^2 + 4y^2 - 4x + 2y - 1 = 0$

**47.** $16x^2 + 16y^2 + 16x + 40y - 7 = 0$

**48.** $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$

**Graficando una circunferencia** **En los ejercicios 49 y 50, use alguna herramienta tecnológica para graficar la ecuación. Use la función *raíz cuadrada* de la herramienta. (*Sugerencia*: se puede resolver la ecuación para y y graficar las dos ecuaciones resultantes.)**

**49.** $4x^2 + 4y^2 - 4x + 24y - 63 = 0$

**50.** $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 11 = 0$

**Trazar la gráfica de una desigualdad** **En los ejercicios 51 y 52, dibujar el conjunto de todos los puntos que satisfacen la desigualdad. Utilice una herramienta tecnológica para verificar el resultado.**

**51.** $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 \leq 0$

**52.** $(x - 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 > 1$

**53. Demostración** Probar que

$$\left(\frac{2x_1 + x_2}{3}, \frac{2y_1 + y_2}{3}\right)$$

Es uno de los puntos de trisección del segmento de recta que une a los puntos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$. Encontrar el punto medio del segmento de recta que une a los puntos

$$\left(\frac{2x_1 + x_2}{3}, \frac{2y_1 + y_2}{3}\right)$$

y $(x_2, y_2)$ para encontrar el segundo punto de trisección.

**54. Encontrar puntos de trisección** Utilice los resultados del ejercicio 53 para encontrar los puntos de trisección del segmento de recta que une a cada par de puntos.

(a) $(1, -2), (4, 1)$

(b) $(-2, -3), (0, 0)$

**¿Cierto o falso?** **En los ejercicios 55-58, determinar si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explicar porque o dar ejemplo que muestre que es falso.**

**55.** Si $ab < 0$, entonces el punto $(a, b)$ está en el cuadrante II o en el cuadrante IV.

**56.** La distancia entre los puntos $(a + b, a)$ y $(a - b, a)$ es $2b$.

**57.** Si la distancia entre dos puntos es cero, entonces los puntos deben coincidir.

**58.** Si $ab = 0$ , entonces el punto $(a, b)$ está en el eje $x$ o en el eje $y$.

**Demostración** **En los ejercicios 59-62, demostrar el enunciado.**

**59.** Los segmentos de línea que unen los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero se bisectan entre sí.

**60.** La perpendicular que bisecta a una cuerda de una circunferencia pasa por el centro de ella.

**61.** Un ángulo inscrito en un semi círculo es un ángulo recto.

**62.** El punto medio del segmento de línea que une los puntos $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ es

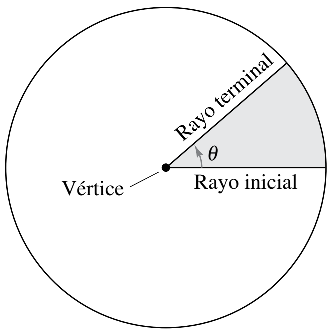
$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

# C.3 Repaso de funciones trigonométricas

- **Describir ángulos y usar la medida en grados.**
- **Usar la medida en radianes.**
- **Comprender las definiciones de las seis funciones trigonométricas.**
- **Evaluar funciones trigonométricas.**
- **Resolver ecuaciones trigonométricas.**
- **Graficar funciones trigonométricas.**

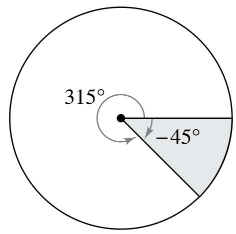
## Ángulos y medida en grados

Un **ángulo** tiene tres partes: un **rayo inicial**, un **rayo terminal** y un **vértice** (el punto de intersección de los dos rayos), como se muestra en la Figura C.24. Un ángulo está en posición normal (estándar) cuando su rayo inicial coincide con el eje positivo y su vértice está en el origen. Se supone que el lector está familiarizado con la medida de un ángulo en grados. * En la práctica es muy común usar $\theta$ (la letra griega minúscula *theta*) para representar tanto un ángulo como su medida. Los ángulos entre 0° y 90° son **agudos**, y los ángulos entre 90° y 180° son **obtusos**.




Posición estándar de un ángulo
**Figura C.24**

Los ángulos positivos se miden en *sentido contrario a las manecillas del reloj*, y los ángulos negativos se miden en *sentido horario*. Por ejemplo, en la Figura C.25 se muestra un ángulo cuya medida es $-45°$. No se puede asignar una medida a un ángulo simplemente sabiendo donde se ubican sus rayos inicial y terminal. Para medir un ángulo, también se debe saber cómo giró su rayo terminal. Por ejemplo, la figura C.25 muestra que el ángulo $-45°$ tiene el mismo rayo terminal que el ángulo 315°. Estos ángulos de dicen **coterminales**. En general, si $\theta$ es cualquier ángulo, entonces

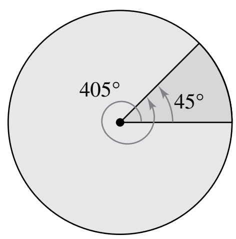



Ángulos coterminales
**Figura C.25**

$$a + n(360), \quad \text{donde } n \text{ es un entero no cero}$$

es coterminal con $\theta$.

Si un ángulo es mayor a 360° entonces su rayo terminal ha girado más de una revolución completa en sentido antihorario, como se muestra en la Figura C.26. Se puede formar un ángulo cuya medida es menor que $-360°$ al girar un rayo terminal más de una revolución completa en el sentido de las manecillas del reloj.




Ángulos coterminales
**Figura C.26**

Nótese que es muy común usar el símbolo $\theta$ para referirse tanto a un *ángulo* como a su *medida*. Por ejemplo, en la Figura C.26, se puede escribir la medida del ángulo más pequeño como $\theta = 45°$.

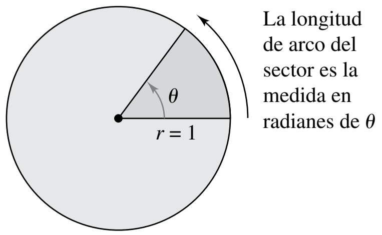
---

* Para una revisión más completa de la trigonometría, ver *Precálculo*, novena edición, de Larson (Brooks/Cole, Cengage Learning, 2014).

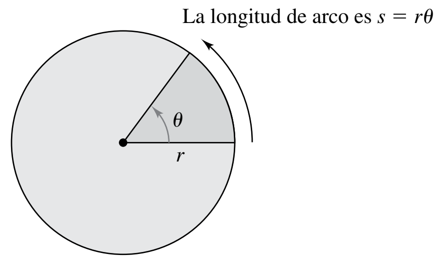
## Medida en radianes

Para asignar una medida de radianes a un ángulo $\theta$, considere que $\theta$ es un ángulo central de un círculo de radio 1, como se muestra en la figura C.27. La **medida en radianes** de $\theta$ se define entonces como la longitud del arco del sector circular. Como el perímetro de un círculo es $2\pi r$, el perímetro de la circunferencia unitaria (de radio 1) es $2\pi$. Esto implica que la medida en radianes de un ángulo de 360° es $2\pi$. En otras palabras, $360° = 2\pi$ radianes.

Al usar la medida de $\theta$ en radianes, la longitud $s$ de un arco circular de radio $r$ es $s = r\theta$, como se muestra en la Figura C.28.

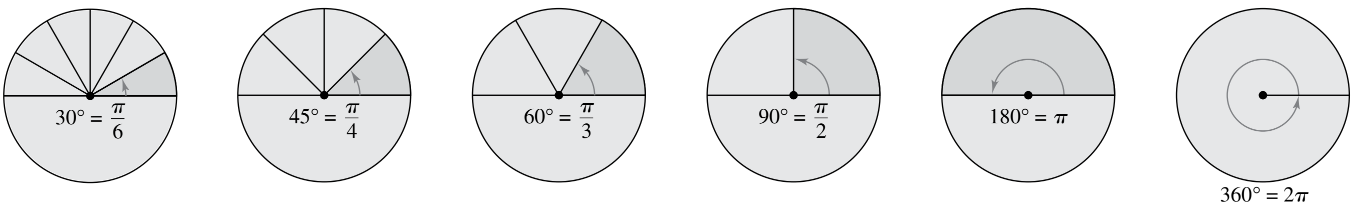



Círculo unitario
**Figura C.27**




Círculo de radio
**Figura C.28**

Se deben conocer las conversiones de los ángulos comunes que se muestran en la Figura C.29. Para otros ángulos, se usa el hecho de que $180° = \pi$ radianes.




Mediadas en grados y radianes para diferentes ángulos
**Figura C.29**

**EJEMPLO 1** **Conversiones entre grados y radianes**

**a.** $40° = (40 \cancel{\text{grados}})\left(\dfrac{\pi \text{ radianes}}{180 \cancel{\text{grados}}}\right) = \dfrac{2\pi}{9} \text{ radianes}$

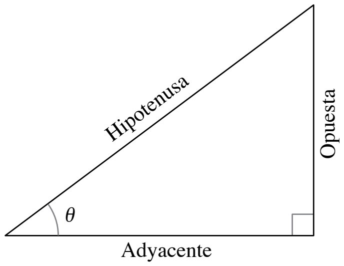
**b.** $540° = (540 \cancel{\text{grados}})\left(\dfrac{\pi \text{ radianes}}{180 \cancel{\text{grados}}}\right) = 3\pi \text{ radianes}$

**c.** $-270° = (-270 \cancel{\text{grados}})\left(\dfrac{\pi \text{ radianes}}{180 \cancel{\text{grados}}}\right) = -\dfrac{3\pi}{2} \text{ radianes}$

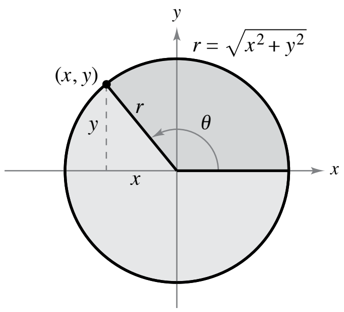
**d.** $-\dfrac{\pi}{2} \text{ radianes} = \left(-\dfrac{\pi}{2} \cancel{\text{radianes}}\right)\left(\dfrac{180 \text{ grados}}{\pi \cancel{\text{radianes}}}\right) = -90°$

**e.** $2 \text{ radianes} = (2 \cancel{\text{radianes}})\left(\dfrac{180 \text{ grados}}{\pi \cancel{\text{radianes}}}\right) = \dfrac{360}{\pi} \approx 114.59°$

**f.** $\dfrac{9\pi}{2} \text{ radianes} = \left(\dfrac{9\pi}{2} \cancel{\text{radianes}}\right)\left(\dfrac{180 \text{ grados}}{\pi \cancel{\text{radianes}}}\right) = 810°$




Lados de un triángulo rectángulo
**Figura C.30**




Un ángulo en posición normal
**Figura C.31**

## Las funciones trigonométricas

Hay dos enfoques comunes para el estudio de la trigonometría. En uno, las funciones trigonométricas se definen como razones de dos lados de un triángulo rectángulo. En el otro, estas funciones se definen en términos de un punto en el lado terminal de un ángulo en posición normal. Las seis funciones trigonométricas, **seno**, **coseno**, **tangente**, **cotangente**, secante y cosecante (abreviadas como sin, cos, tan, cot, sec y csc, respectivamente), se definen a continuación desde ambos puntos de vista.

### Definición de las seis funciones trigonométricas

*Definiciones en un triángulo rectángulo, con* $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ (ver Figura C.30).

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$$

*Definiciones de las funciones circulares, donde* $\theta$ *es cualquier ángulo* (ver Figura C.31).

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x},\quad x \neq 0$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y},\quad y \neq 0 \qquad \sec\theta = \frac{r}{x},\quad x \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{x}{y},\quad y \neq 0$$

Las identidades trigonométricas que se enumeran a continuación son todas consecuencia directa de las definiciones. [Nótese que $\phi$ es la letra griega minúscula *phi* y $\operatorname{sen}^2\theta$ se usa para representar $(\operatorname{sen}\theta)^2$.]

### IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

***Identidades pitagóricas:***

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

***Identidades par/impar***

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \qquad \csc(-\theta) = -\csc\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \sec(-\theta) = \sec\theta$$
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

***Fórmulas de suma y diferencia***

$$\operatorname{sen}(\theta \pm \phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi \pm \cos\theta\operatorname{sen}\phi$$
$$\cos(\theta \pm \phi) = \cos\theta\cos\phi \mp \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$$
$$\tan(\theta \pm \phi) = \frac{\tan\theta \pm \tan\phi}{1 \mp \tan\theta\tan\phi}$$

***Fórmulas de reducción de potencias***

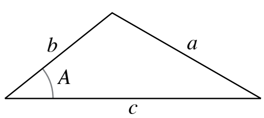
$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$
$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$
$$\tan^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$$

***Fórmulas de ángulo doble***

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$$
$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

***Ley de cosenos:***

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$




***Identidades de recíprocos***

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

***Identidades de cociente:***

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

## Evaluación de funciones trigonométricas

Hay dos formas de evaluar las funciones trigonométricas: (1) aproximaciones decimales con una calculadora y (2) evaluaciones exactas usando identidades trigonométricas y fórmulas de la geometría. Cuando use una calculadora para evaluar una función trigonométrica, recuerde configurar la calculadora en el modo apropiado: modo de *grados* DEG o modo de radianes RAD.

### EJEMPLO 2 Valor exacto de las funciones trigonométricas

Evaluar el seno, coseno y la tangente de $\dfrac{\pi}{3}$.

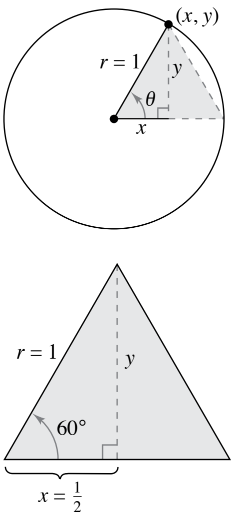


**Figura C.32**

**Solución** Como $60° = \pi/3$ radianes, se puede dibujar un triángulo equilátero con lados de longitud 1 y $\theta$ como uno de sus ángulos, como se muestra en la Figura C.32. Porque la altura de este triángulo divide en dos partes iguales a su base, se tiene $x = \frac{1}{2}$. Por el Teorema de Pitágoras, se obtiene

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ahora, ya sabiendo los valores de $x$ y $r$, se puede escribir lo siguiente.

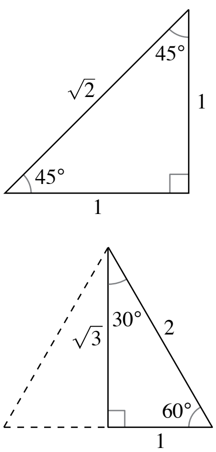
$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{x}{r} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

Nótese que todos los ángulos en este texto se miden en radianes a menos que se indique lo contrario. Por ejemplo, cuando se escribe sen 3, se entiende el seno de 3 radianes, y cuando se escribe 3°, se entiende el seno de 3 grados.

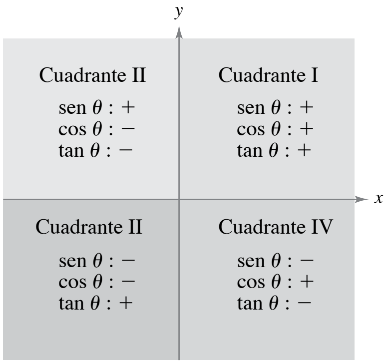
En la siguiente tabla se muestran las medidas en grados y en radianes de varios ángulos comunes, junto con los valores correspondientes del seno, el coseno y la tangente (ver Figura C.33).



Ángulos comunes
**Figura C.33**

**Ángulos comúnes en el primer cuadrante**

| Grados | 0 | 30° | 45° | 60° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|
| Radianes | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| sen $\theta$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| cos $\theta$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| tan $\theta$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | Indefinido |



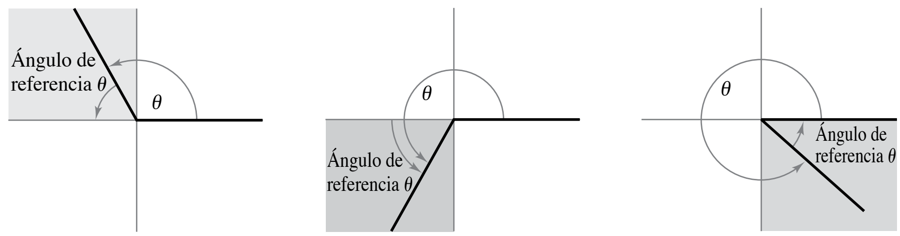

Signos de las funciones trigonométricas en los cuadrantes
**Figura C.34**

Los signos de los cuadrantes para las funciones seno, coseno y tangente se muestran en la Figura C.34. Para extender el uso de la tabla en la página anterior a ángulos en otros cuadrantes diferentes del primer cuadrante, se puede usar el concepto de un **ángulo de referencia** (ver Figura C.35), con el signo del cuadrante apropiado. Por ejemplo, el ángulo de referencia para $3\pi/4$ es $\pi/4$, y porque el seno es positivo en el Cuadrante II, se puede escribir

$$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Del mismo modo, porque el ángulo de referencia para 330° es 30° y la tangente es negativa en Cuadrante IV, se puede escribir

$$\tan 330^\circ = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$




Cuadrante II
$\theta = \pi - \theta$ (radianes)
$\theta = 180^\circ - \theta$ (grados)

Cuadrante III
$\theta = \theta - \pi$ (radianes)
$\theta = \theta - 180^\circ$ (grados)

Quadrant IV
$\theta = 2\pi - \theta$ (radianes)
$\theta = 360^\circ - \theta$ (grados)

**Figura C.35**

## EJEMPLO 3 Identidades trigonométricas y calculadoras

Evaluar cada expresión trigonométrica.

**a.** $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ **b.** $\sec 60^\circ$ **c.** $\cos(1.2)$

### Solución

**a.** Usando la fórmula de reducción $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$, se puede escribir

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**b.** Usando la identidad de recíproco $\sec\theta = 1/\cos\theta$, se puede escribir

$$\sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{1/2} = 2.$$

**c.** Usando una calculadora, se obtiene

$$\cos(1.2) \approx 0.3624.$$

Recuerde que 1.2 se da en *radianes*. En consecuencia, su calculadora debe configurarse en modo *radianes*.

## Solución de ecuaciones trigonométricas

¿Cómo resolvería la ecuación sen $\theta = 0$? Se sabe que $\theta = 0$ es una solución, pero no es la única. Cualquiera de los siguientes valores de $\theta$ también es una solución.

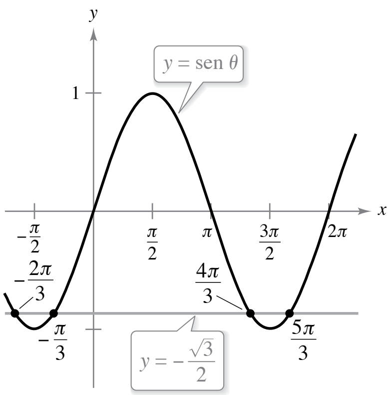
$$. \ . \ . \ , -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ . \ . \ .$$

Se puede escribir este conjunto de soluciones infinitas como $\{n\pi\text{: } n \text{ es un entero}\}$.

### EJEMPLO 4 Solución de una ecuación trigonométrica

Resolver la ecuación.

$$\text{sen } \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$




Puntos solución de sen $\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

**Figura C.36**

**Solución** Para resolver la ecuación, se debe considerar que el seno es negativo en los Cuadrantes III y IV y que

$$\text{sen } \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Entonces, se están buscando valores de $\theta$ en el tercer y cuarto cuadrantes que tienen un ángulo de referencia de $\pi/3$. En el intervalo $[0, 2\pi]$, los dos ángulos que se ajustan a estos criterios son

$$\theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \quad \text{y} \quad \theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$

Al agregar múltiplos enteros de $2\pi$ a cada una de estas soluciones, se obtiene la siguiente solución general.

$$\theta = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi \quad \text{o} \quad \theta = \frac{5\pi}{3} + 2n\pi, \quad \text{donde } n \text{ es un entero.}$$

Ver Figura C.36.

### EJEMPLO 5 Solución de una ecuación trigonométrica

Resolver $\cos 2\theta = 2 - 3 \text{ sen } \theta$, donde $0 \le \theta \le 2\pi$.

**Solución** Usando la identidad de ángulo doble $\cos 2\theta = 1 - 2 \text{ sen}^2 \theta$, la ecuación se puede reescribir de la siguiente manera

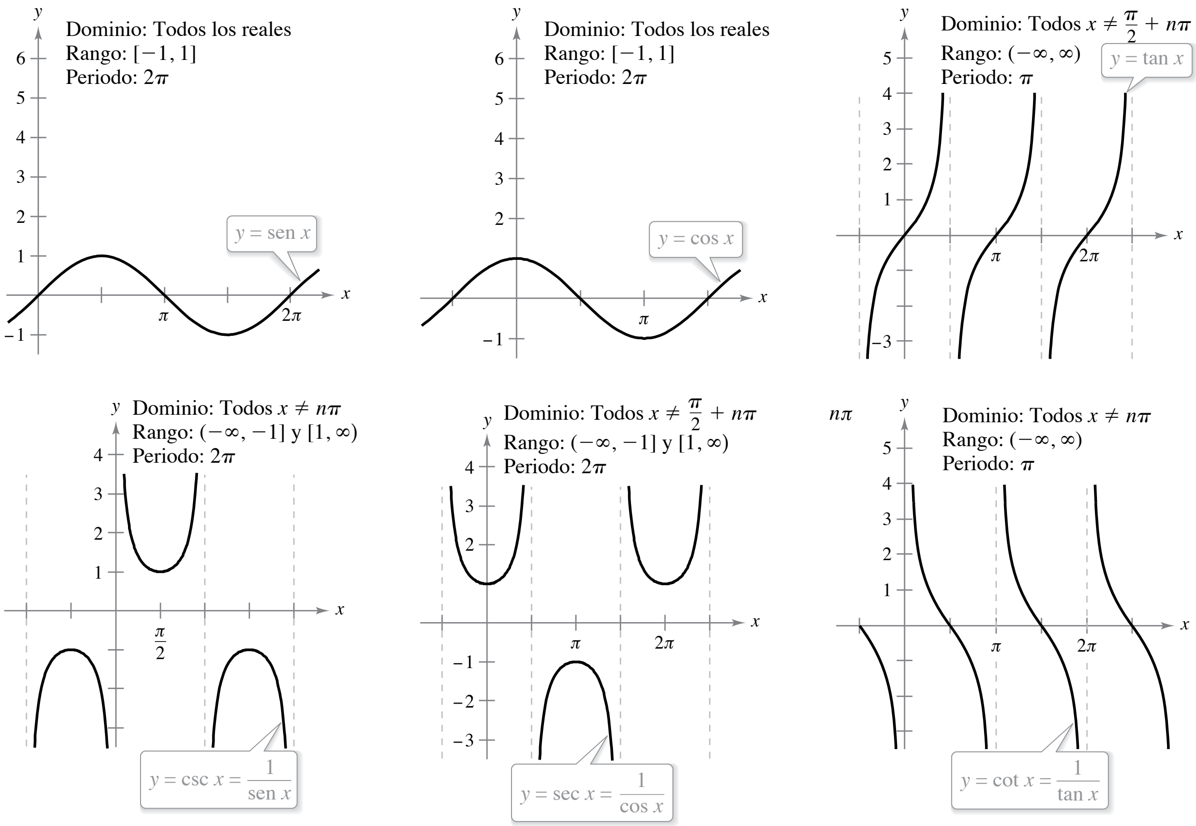
$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= 2 - 3 \text{ sen } \theta && \text{Escribir la ecuación original.} \\ 1 - 2 \text{ sen}^2 \theta &= 2 - 3 \text{ sen } \theta && \text{Identidad trigonométrica.} \\ 0 &= 2 \text{ sen}^2 \theta - 3 \text{ sen } \theta + 1 && \text{Forma cuadrática.} \\ 0 &= (2 \text{ sen } \theta - 1)(\text{sen } \theta - 1) && \text{Factorizar.} \end{aligned}$$

Si $2 \text{ sen } \theta - 1 = 0$, entonces sen $\theta = 1/2$ y $\theta = \pi/6$ o $\theta = 5\pi/6$. Si sen $\theta - 1 = 0$, entonces $\theta = 1$ y $\theta = \pi/2$. De esta manera, para $0 \le \theta \le 2\pi$, hay tres soluciones

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5\pi}{6}, \quad \text{o} \quad \frac{\pi}{2}$$

## Gráficas de las funciones trigonométricas

Una función es **periódica** cuando existe un número distinto de cero $p$ tal que $f(x + p) = f(x)$ para toda $x$ en el dominio de $f$. El menor valor positivo de $p$ (si existe) es el **período** de $f$. Las funciones seno, coseno, secante y cosecante tienen cada una un período de $2\pi$, y las otras dos funciones trigonométricas, tangente y cotangente, tienen un período de $\pi$ como se muestra en la figura C.37.




Gráfica de las seis funciones trigonométricas
**Figura C.37**

Nótese en la figura C.37 que el valor máximo de sen $x$ y cos $x$ es 1 y el valor mínimo es $-1$. Los gráficos de las funciones $y = a$ sen $bx$ y $y = a \cos bx$ oscilan entre $-a$ y $a$, de manera que tiene una **amplitud** de $|a|$. Además, porque $bx = 0$ cuándo $x = 0$ y $bx = 2\pi$ cuándo $x = 2\pi/|b|$ se deduce que las funciones $y = a$ sen $bx$ y $y = a \cos bx$ tienen un período de $2\pi/b$. La tabla a continuación resume las amplitudes y períodos de algunos tipos de funciones trigonométricas.

| Función | Periodo | Amplitud |
|---|---|---|
| $y = a$ sen $bx$ o $y = a \cos bx$ | $\dfrac{2\pi}{\lvert b\rvert}$ | $\lvert a\rvert$ |
| $y = a \tan bx$ o $y = a \cot bx$ | $\dfrac{\pi}{\lvert b\rvert}$ | No aplica |
| $y = a \sec bx$ o $y = a \csc bx$ | $\dfrac{2\pi}{\lvert b\rvert}$ | No aplica |

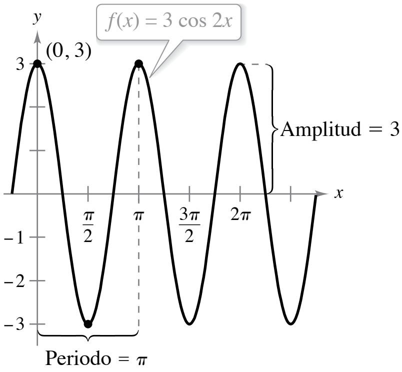



**Figura C.38**

## EJEMPLO 6 Trazar la gráfica de una función trigonométrica

Trazar la gráfica de $f(x) = 3 \cos 2x$.

**Solución** La gráfica de $f(x) = 3 \cos 2x$ tiene una amplitud de 3 y un periodo de $2\pi/2 = \pi$. Usando la forma básica de la gráfica de la función coseno, se traza un periodo de la función en el intervalo $[0, \pi]$ considerando el siguiente patrón.

Máximo: $(0, 3)$

Mínimo: $\left(\dfrac{\pi}{2}, -3\right)$

Máximo: $(\pi, 3)$

Siguiendo con este patrón, se pueden trazar varios ciclos de la gráfica, como se muestra en la figura C.38.

Se pueden aplicar desplazamientos horizontales, desplazamientos verticales y reflexiones a las gráficas de las funciones trigonométricas, como se muestra en el ejemplo 7.

## EJEMPLO 7 Desplazamiento de las gráficas de las funciones trigonométricas

Trazar la gráfica de cada función.

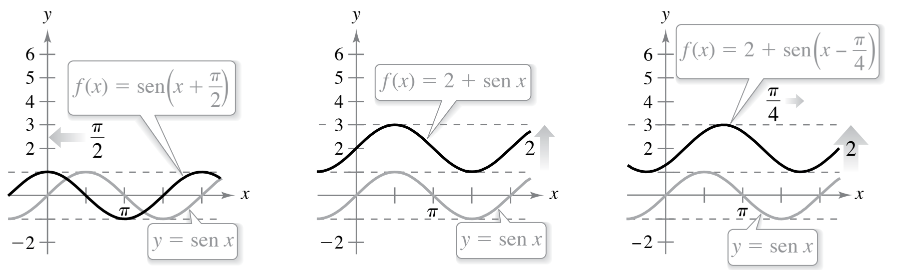
**a.** $f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ **b.** $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$ **c.** $f(x) = 2 + \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

**Solución**

**a.** Para trazar la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$, se desplaza la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ a la izquierda $\pi/2$ unidades, como se muestra en la figura C.39(a).

**b.** Para trazar la gráfica de $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$, se desplaza la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ hacia arriba 2 unidades, como se muestra en la figura C.39(b).

**c.** Para trazar la gráfica de $f(x) = 2 + \operatorname{sen}(x - \pi/4)$, se desplaza la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ hacia arriba 2 unidades y a la derecha $\pi/4$ unidades, como se muestra en la Figura C.39(c).




(a) Desplazamiento horizontal a la izquierda

(b) Desplazamiento vertical hacia arriba

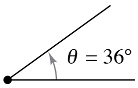
(c) Desplazamientos horizontales y verticales

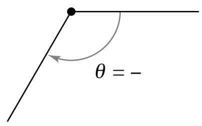
Transformaciones de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$

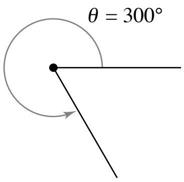
**Figura C.39**

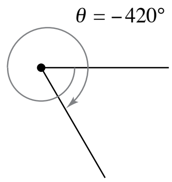
# C.3 Ejercicios

**Ángulos coterminales en grados** **En los ejercicios 1 y 2, determine dos ángulos coterminales en grados (uno positivo y otro negativo) para cada ángulo.**

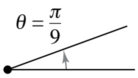
**1.** (a)


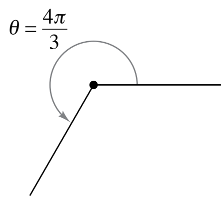

(b)


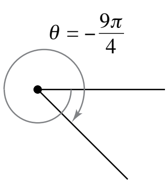

**2.** (a)


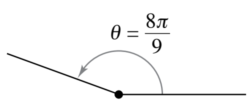

(b)



**Ángulos coterminales en radianes** **En los ejercicios 3 y 4, determine dos ángulos coterminales en radianes (uno positivo y otro negativo) para cada ángulo.**

**3.** (a)



(b)



**4.** (a)



(b)



**Grados a radianes** **En los ejercicios 5 y 6, reescriba cada ángulo en radianes como un múltiplo de $\pi$ y como una aproximación decimal con una precisión de tres decimales.**

**5.** (a) $30°$ (b) $150°$ (c) $315°$ (d) $120°$

**6.** (a) $-20°$ (b) $-240°$ (c) $-270°$ (d) $144°$

**Radianes a grados** **En los ejercicios 7 y 8, reescriba cada ángulo en grados.**

**7.** (a) $\frac{3\pi}{2}$ (b) $\frac{7\pi}{6}$ (c) $-\frac{7\pi}{12}$ (d) $-2.367$

**8.** (a) $\frac{7\pi}{3}$ (b) $-\frac{11\pi}{30}$ (c) $\frac{11\pi}{6}$ (d) $0.438$

**9. Completación de una tabla** Sea $r$ el radio de un círculo, $\theta$ el ángulo central (medido en radianes) y $s$ la longitud de arco subtendido por el ángulo. Use la relación $s = r\theta$ para completar la tabla.

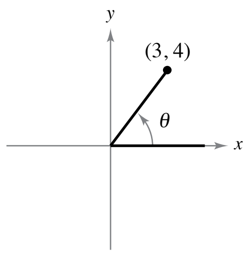
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $r$ | 8 pies | 15 pulg. | 85 cm | | |
| $s$ | 12 pies | | | 96 pulg. | 8642 mi |
| $\theta$ | | 1.6 | $\frac{3\pi}{4}$ | 4 | $\frac{2\pi}{3}$ |

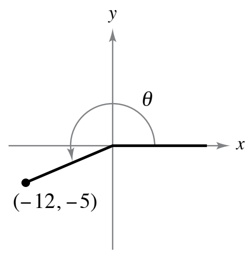
**10. Velocidad angular** Un automóvil se mueve a una velocidad de 50 millas por hora, y el diámetro de sus ruedas es de 2.5 pies.

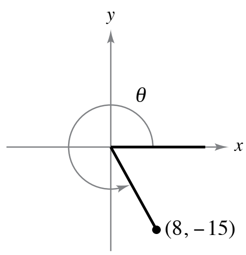
(a) Encuentre el número de revoluciones por minuto que las ruedas están girando.

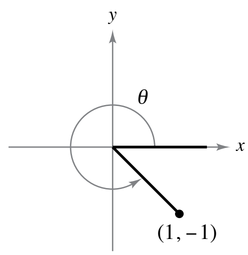
(b) Encuentre la velocidad angular de las ruedas en radianes por minuto.

**Encontrar las seis funciones trigonométricas** **En los ejercicios 11 y 12, determine las seis funciones trigonométricas para el ángulo $\theta$.**

**11.** (a)



(b)



**12.** (a)



(b)



**Determinación de un cuadrante** **En los ejercicios 13 y 14, determine el cuadrante en el que se encuentra $\theta$.**

**13.** (a) $\operatorname{sen} \theta < 0$ y $\cos \theta < 0$

(b) $\sec \theta > 0$ y $\cot \theta < 0$

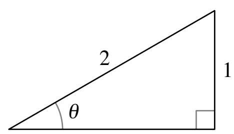
**14.** (a) $\operatorname{sen} \theta > 0$ y $\cos \theta < 0$

(b) $\csc \theta < 0$ y $\tan \theta > 0$

**Evaluación de una función trigonométrica** **En los ejercicios 15-18, evalúe la función trigonométrica**

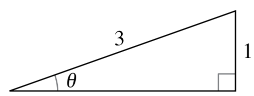
**15.** $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$

$\cos \theta =$ ▢



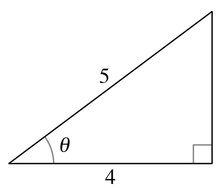

**16.** $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{3}$

$\tan \theta =$ ▢



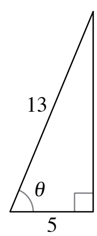

**17.** $\cos \theta = \frac{4}{5}$

$\cot \theta =$ ▢




**18.** $\sec \theta = \frac{13}{5}$

$\csc \theta =$ ▢



**Evaluación de funciones trigonométricas** **En los ejercicios 19 a 22, evalúe el seno, el coseno y la tangente de cada ángulo sin usar una calculadora.**

**19.** (a) $60°$ (b) $120°$ (c) $\dfrac{\pi}{4}$ (d) $\dfrac{5\pi}{4}$

**20.** (a) $-30°$ (b) $150°$ (c) $-\dfrac{\pi}{6}$ (d) $\dfrac{\pi}{2}$

**21.** (a) $225°$ (b) $-225°$ (c) $\dfrac{5\pi}{3}$ (d) $\dfrac{11\pi}{6}$

**22.** (a) $750°$ (b) $510°$ (c) $\dfrac{10\pi}{3}$ (d) $\dfrac{17\pi}{3}$

**Evaluación de funciones trigonométricas** **En los ejercicios 23 a 26, use una calculadora para evaluar cada función trigonométrica. Redondear sus respuestas a cuatro decimales.**

**23.** (a) $\operatorname{sen} 10°$ (b) $\csc 10°$

**24.** (a) $\sec 225°$ (b) $\sec 135°$

**25.** (a) $\tan \dfrac{\pi}{9}$ (b) $\tan \dfrac{10\pi}{9}$

**26.** (a) $\cot(1.35)$ (b) $\tan(1.35)$

**Solución de una ecuación trigonométrica** **En los ejercicios 27-30, encuentre dos soluciones de cada ecuación. De sus respuestas en radianes ($0 \le \theta < 2\pi$). No use una calculadora.**

**27.** (a) $\cos \theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\cos \theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**28.** (a) $\sec \theta = 2$ (b) $\sec \theta = -2$

**29.** (a) $\tan \theta = 1$ (b) $\cot \theta = -\sqrt{3}$

**30.** (a) $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\operatorname{sen} \theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

**Solución de una ecuación trigonométrica** **En los ejercicios 31-38, resuelva la ecuación para $\theta$ ($0 \le \theta < 2\pi$).**

**31.** $2 \operatorname{sen}^2 \theta = 1$

**32.** $\tan^2 \theta = 3$

**33.** $\tan^2 \theta - \tan \theta = 0$

**34.** $2 \cos^2 \theta - \cos \theta = 1$

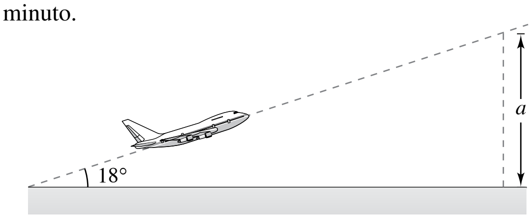
**35.** $\sec \theta \csc \theta = 2 \csc \theta$

**36.** $\operatorname{sen} \theta = \cos \theta$

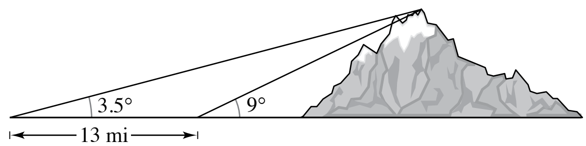
**37.** $\cos^2 \theta + \operatorname{sen} \theta = 1$

**38.** $\cos \dfrac{\theta}{2} - \cos \theta = 1$

**39. Ascenso de avión** Un avión sale de la pista despegando con un ángulo de 18° y con una velocidad de 275 pies por segundo (ver la figura). Encuentre la altitud del avión después de 1 minuto.



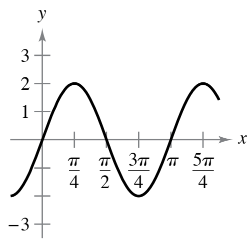

**40. Altura de una montaña** Mientras se viaja a través de un terreno plano, se observa una montaña directamente frente a usted. Su ángulo de elevación (hasta el pico) es 3.5°. Después de conducir 13 millas más cerca de la montaña, el ángulo de elevación es 9°. Aproximar la altura de la montaña



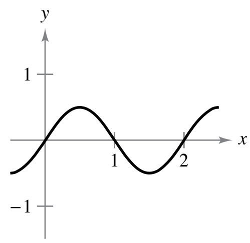

*No dibujado a escala*

**Período y amplitud** **En los ejercicios 41 a 44, determine el período y amplitud de cada función.**

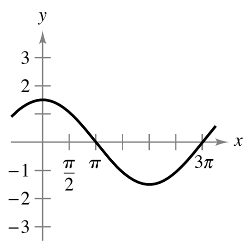
**41.** (a) $y = 2 \operatorname{sen} 2x$



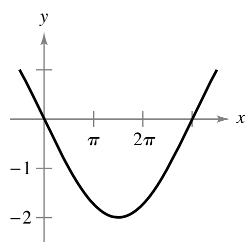

(b) $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \pi x$




**42.** (a) $y = \dfrac{3}{2} \cos \dfrac{x}{2}$




(b) $y = -2 \operatorname{sen} \dfrac{x}{3}$




**43.** $y = 3 \operatorname{sen} 4\pi x$

**44.** $y = \dfrac{2}{3} \cos \dfrac{\pi x}{10}$

**Período** **En los ejercicios 45 a 48, encuentre el período de la función.**

**45.** $y = 5 \tan 2x$

**46.** $y = 7 \tan 2\pi x$

**47.** $y = \sec 5x$

**48.** $y = \csc 4x$

**Escritura** **En los ejercicios 49 y 50, use una utilidad gráfica para graficar cada función $f$ en la misma ventana de visualización para $c = -2$, $c = -1$, $c = 1$ y $c = 2$. De una descripción escrita del cambio en el gráfico causado por el cambio de $c$.**

**49.** (a) $f(x) = c \operatorname{sen} x$
(b) $f(x) = \cos(cx)$
(c) $f(x) = \cos(\pi x - c)$

**50.** (a) $f(x) = \operatorname{sen} x + c$
(b) $f(x) = -\operatorname{sen}(2\pi x - c)$
(c) $f(x) = c \cos x$

**Trazo de la gráfica de una función trigonométrica** **En los ejercicios 51-62, trace la gráfica de la función.**

**51.** $y = \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$

**52.** $y = 2 \cos 2x$

**53.** $y = -\operatorname{sen} \dfrac{2\pi x}{3}$

**54.** $y = 2 \tan x$

**55.** $y = \csc \dfrac{x}{2}$

**56.** $y = \tan 2x$

**57.** $y = 2 \sec 2x$

**58.** $y = \csc 2\pi x$

**59.** $y = \operatorname{sen}(x + \pi)$

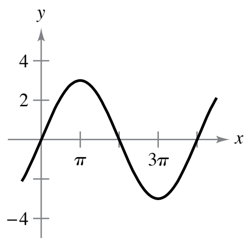
**60.** $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

**61.** $y = 1 + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

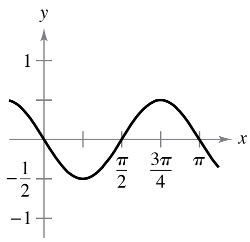
**62.** $y = 1 + \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

**Razonamiento gráfico** **En los ejercicios 63 y 64, encuentre $a$, $b$ y $c$ tal que el gráfico de la función coincida con la gráfica de la figura.**

**63.** $y = a \cos(bx - c)$




**64.** $y = a \operatorname{sen}(bx - c)$




**65.** **Piense en ello** Trazar las gráficas de $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = |\operatorname{sen} x|$, y $h(x) = \operatorname{sen}(|x|)$. En general, ¿cómo son las gráficas de $|f(x)|$ y $f(|x|)$ respecto de la gráfica de $f$?

**66.** **Piense en ello** El modelo para la altura $h$ de un coche de ruedas tipo Ferris es

$$h = 51 + 50 \operatorname{sen} 8\pi t$$

donde $t$ se mide en minutos. (La rueda tiene un radio de 50 pies.) Este modelo tiene una altura de 51 pies cuando $t = 0$. Modifique el modelo para que la altura del automóvil sea de 1 pie cuando $t = 0$.

**67.** **Ventas** Las ventas mensuales $S$ (en miles de unidades) de los productos de temporada son modelados por

$$S = 58.3 + 32.5 \cos \frac{\pi t}{6}$$

donde $t$ es el tiempo (en meses) y $t = 1$ corresponde a Enero. Use una utilidad para representar gráficamente el modelo para $S$ y determine los meses en que las ventas exceden las 75 000 unidades.

**68.** **Investigación** Dos funciones trigonométricas $f$ y $g$ tienen un período de 2, y sus gráficos se intersecan en $x = 5.35$.

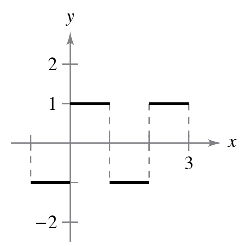
(a) Dé un valor positivo menor y un valor positivo mayor de $x$ para el cual las funciones tengan el mismo valor.

(b) Determine un valor negativo de $x$ para el cual las gráficas se intersecan.

(c) ¿Es cierto que $f(13.35) = g(-4.65)$? Dé una razón para su respuesta.

**Reconocimiento de patrones** **En los ejercicios 69 y 70, use una utilidad de graficación para comparar la gráfica de $f$ con la gráfica dada. Intente mejorar la aproximación agregando un término a $f(x)$. Utilice una utilidad de graficación para verificar que su nueva aproximación sea mejor que la original. ¿Puede encontrar otros términos para agregar que hagan la aproximación aún mejor? ¿Cuál es el patrón? (En el ejercicio 69, se pueden usar términos en seno para mejorar la aproximación, y en el ejercicio 70, se pueden usar los términos en coseno).**

**69.** $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} \pi x + \dfrac{1}{3} \operatorname{sen} 3\pi x\right)$




**70.** $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{\pi^2}\left(\cos \pi x + \dfrac{1}{9} \cos 3\pi x\right)$