

MATEMÁTICAS III

CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES

Ron Larson

The Pennsylvania State University
The Behrend College

Bruce Edwards

University of Florida

Joel Ibarra Escutia

Instituto Tecnológico de Toluca

Traducción

Javier León Cárdenas

Revisión técnica

Ana Elizabeth García Hernández
Instituto Politécnico Nacional

**Instituto Tecnológico
de Aguascalientes**

Carlos Ruvalcaba Márquez

Instituto Tecnológico Hermosillo

Hilario Mayboca Araujo

Carlos Alberto Pereyda Pierre

Instituto Tecnológico de Celaya

María del Carmen Cornejo Serrano

Eloísa Bernardett Villalobos Oliver

**Instituto Tecnológico José Mario Molina Pasquel
y Henríquez, Campus Chapala**

María de la Cruz Gómez Torres

Instituto Tecnológico de Querétaro

Francisco Javier Avilés Urbiola

María Eugenia Quintanar Pérez

Instituto Tecnológico Superior de Cajeme

Socorro del Rivero Jiménez

Instituto Tecnológico de San Juan del Río

Saulo Servín Guzmán

**Tecnológico de Estudios Superiores
de Chimalhuacán**

Juan Bucio Esquivel

Instituto Tecnológico de Toluca

Eric Gutiérrez García

Tecnológico de Estudios Superiores de Jilotepec

José Guadalupe González Escamilla

Tecnológico de Estudios Superiores de Jocotitlán

Ramón Berber Palafox

Christopher Gutiérrez Luna

Adriana Sotelo Hurtado



Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur



Matemáticas III. Cálculo de varias variables.

Primera edición

Ron Larson y Bruce Edwards

Director Higher Education**Latinoamérica:**

Renzo Casapía Valencia

Gerente editorial Latinoamérica:

Jesús Mares Chacón

Editora de desarrollo:

Abril Vega Orozco

Coordinador de manufactura:

Rafael Pérez González

Diseño de portada:

Karla Paola Benítez García

Imagen de portada:

© agsandrew | Shutterstock

Composición tipográfica:

Heriberto Gachuz Chávez

© D.R. 2018 por Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., una Compañía de Cengage Learning, Inc. Carretera México-Toluca núm. 5420, oficina 2301. Col. El Yaqui. Del. Cuajimalpa. C.P. 05320. Ciudad de México. Cengage Learning® es una marca registrada usada bajo permiso.

DERECHOS RESERVADOS. Ninguna parte de este trabajo amparado por la Ley Federal del Derecho de Autor, podrá ser reproducida, transmitida, almacenada o utilizada en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo, pero sin limitarse a lo siguiente: fotocopiado, reproducción, escaneo, digitalización, grabación en audio, distribución en internet, distribución en redes de información o almacenamiento y recopilación en sistemas de información a excepción de lo permitido en el Capítulo III, Artículo 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor, sin el consentimiento por escrito de la Editorial.

Esta es una adaptación de los libros:
Larson, Ron y Bruce Edwards. *Cálculo*, Tomo II. Décima edición. ©2016, ISBN: 978-607-522-017-8 Traducido del libro *Calculus*. 10th Edition. Ron Larson and Bruce Edwards. Publicado en inglés por Brooks/Cole, una compañía de Cengage Learning ©2014 ISBN: 978-1-285-05709-5 Larson, Ron y Bruce Edwards *Matemáticas III. Cálculo de varias variables*. ©2017 ISBN: 978-607-522-895-2

Datos para catalogación bibliográfica:
Larson, Ron y Bruce Edwards.
Matemáticas III. Cálculo de varias variables.
Primera edición.
ISBN: 978-607-526-651-0

Visite nuestro sitio web en:
<http://latinoamerica.cengage.com>

Impreso en México

1 2 3 4 5 6 7 20 21 19 18

Contenido

UNIDAD 1	▷ Vectores en el espacio	1
1.1	Vectores en el plano	2
1.2	Vectores en el espacio	12
1.3	El producto escalar o producto punto de dos vectores	20
1.4	El producto vectorial o producto cruz de dos vectores en el espacio	29
1.5	Rectas y planos en el espacio	37
	Proyecto de trabajo: Distancias en el espacio	47
1.6	Superficies en el espacio	48
	Ejercicios de repaso	58
	Solución de problemas	60
UNIDAD 2	▷ Curvas planas, ecuaciones paramétricas y coordenadas polares	63
2.1	Curvas planas y ecuaciones paramétricas	64
	Proyecto de trabajo: Cicloides	73
2.2	Ecuaciones paramétricas y cálculo	74
2.3	Coordenadas polares y gráficas polares	83
	Proyecto de trabajo: Arte anamórfico	92
2.4	Área y longitud de arco en coordenadas polares	93
	Ejercicios de repaso	102
	Solución de problemas	105
UNIDAD 3	▷ Funciones vectoriales	107
3.1	Funciones vectoriales	108
	Proyecto de trabajo: Bruja de Agnesi	115
3.2	Derivación e integración de funciones vectoriales	116
3.3	Velocidad y aceleración	124
3.4	Vectores tangentes y vectores normales	133
3.5	Longitud de arco y curvatura	143
	Ejercicios de repaso	155
	Solución de problemas	157
UNIDAD 4	▷ Funciones de varias variables	159
4.1	Introducción a las funciones de varias variables	160
4.2	Límites y continuidad	172
4.3	Derivadas parciales	182
	Proyecto de trabajo: Franjas de Moiré	191
4.4	Diferenciales	192

- 4.5 Regla de la cadena para funciones de varias variables 199
- 4.6 Derivadas direccionales y gradientes 207
- 4.7 Planos tangentes y rectas normales 219
Proyecto de trabajo: Flora silvestre 227
- 4.8 Extremos de funciones de dos variables 228
- 4.9 Multiplicadores de Lagrange 236
Ejercicios de repaso 244
Solución de problemas 247

UNIDAD 5 ▷ Integrales múltiples 249

- 5.1 Integrales iteradas y área en el plano 250
- 5.2 Integrales dobles y volumen 258
- 5.3 Cambio de variables: coordenadas polares 270
- 5.4 Centro de masa y momentos de inercia 278
Proyecto de trabajo: Centro de presión sobre una vela 285
- 5.5 Área de una superficie 286
Proyecto de trabajo: Capilaridad 292
- 5.6 Integrales triples y aplicaciones 293
- 5.7 Coordenadas cilíndricas y esféricas 304
- 5.8 Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas 311
Proyecto de trabajo: Esferas deformadas 317
Ejercicios de repaso 318
Solución de problemas 321

UNIDAD 6 ▷ Análisis vectorial 323

- 6.1 Campos vectoriales 324
- 6.2 Integrales de línea 335
- 6.3 Teoremas de integrales (Resumen*) 349

* El desarrollo completo del capítulo se encuentra disponible en línea en el apéndice F. Acceda a www.cengage.com e ingrese con el ISBN de la obra.

- 6.4 Campos vectoriales conservativos e independencia de la trayectoria*
- 6.5 Teorema de Green*
- 6.6 Superficies paramétricas*
- 6.7 Integrales de superficie*
- 6.8 Teorema de la divergencia (de Gauss)*
- 6.9 Teorema de Stokes*

* Este material se encuentra disponible en línea. Acceda a www.cengage.com e ingrese con el ISBN de la obra.

Formularios básicos y tablas de integración F1

Álgebra	F1
Fórmulas trigonométricas	F2
Trigonometría	F3
Derivadas e integrales	F4
Tablas de integración	T1

Apéndices*

Apéndice A	Demostración de teoremas seleccionados
Apéndice B	Tablas de integración
Apéndice C	Repaso de precálculo
	C.1 Números reales y recta numérica
	C.2 El plano cartesiano
	C.3 Repaso de funciones trigonométricas
Apéndice D	Rotación y la ecuación general de segundo grado
Apéndice E	Números complejos
Apéndice F	Análisis vectorial
Formularios básicos	

* Este material se encuentra disponible en línea. Acceda a www.cengage.com e ingrese con el ISBN de la obra.

Prefacio

Bienvenidos a esta nueva versión de **Matemáticas III. Cálculo de varias variables**. Nos enorgullece ofrecerle una nueva versión revisada y mejorada de nuestros clásicos y exitosos libros de texto.

Esta obra forma parte de una serie de cinco libros elaborados para cubrir de manera específica los planes de estudio de los cursos de matemáticas a nivel superior: cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo vectorial, álgebra lineal y ecuaciones diferenciales.

Al igual que en otras ediciones, hemos incorporado muchas de las útiles y atinadas sugerencias que usted, estimado lector, nos hace al utilizar esta obra en sus cursos.

En esta edición se han introducido algunas características nuevas y revisado otras. Encontrará lo que espera: un libro de texto pedagógico, matemáticamente formal y accesible.

Estamos contentos y emocionados de ofrecerle algo totalmente nuevo en esta edición, un sitio web: **LarsonCalculus.com**. Este sitio ofrece muchos recursos que le ayudarán en su estudio del cálculo. Todos estos recursos están a solo un clic de distancia. Nuestro objetivo en todas las ediciones de este libro de texto es proporcionarle las herramientas necesarias para dominar el cálculo. Esperamos que, junto con **LarsonCalculus.com**, encuentre útiles los cambios de esta edición para lograrlo.

En cada conjunto de ejercicios, asegúrese de anotar la referencia a **CalcChat.com**. En este sitio gratuito puede descargar una solución paso a paso de cualquier ejercicio impar. Además, puede hablar con un tutor, de manera gratuita, dentro del horario publicado en el sitio. Con el paso de los años, miles de estudiantes han visitado el sitio para obtener apoyo. Utilizamos toda esta información como ayuda para guiarlo en cada revisión de los ejercicios y soluciones.

Lo nuevo en esta edición

NUEVO **LarsonCalculus.com**

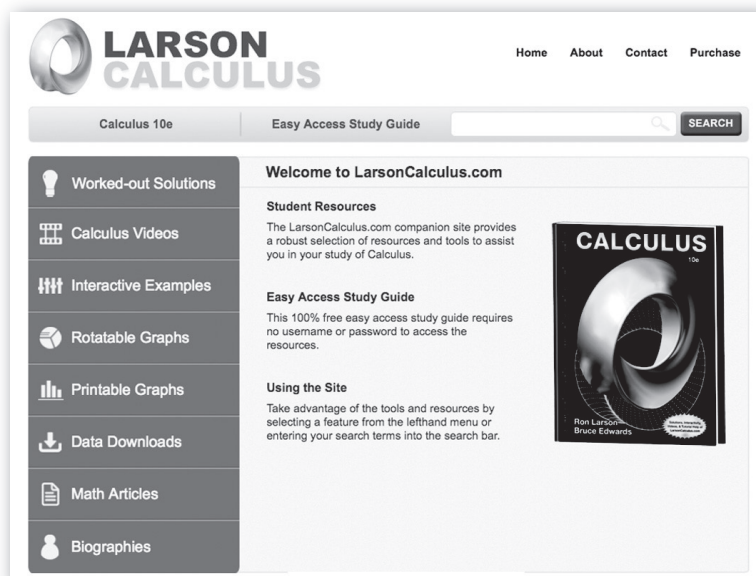
Este sitio web ofrece varias herramientas y recursos para complementar su aprendizaje. El acceso a estas herramientas es gratuito. Videos de explicaciones de conceptos o demostraciones del libro, ejemplos para explorar, vista de gráficas tridimensionales, descarga de artículos de revistas de matemáticas y mucho más.

NUEVA **Apertura de capítulo**

En cada apertura de capítulo se resaltan aplicaciones reales utilizadas en los ejemplos y ejercicios.

NUEVOS **Ejemplos interactivos**

Los ejemplos del libro están acompañados de ejemplos interactivos en **LarsonCalculus.com**. Estos ejemplos interactivos usan el reproductor CDF de Wolfram y permiten explorar el cálculo manejando las funciones o gráficas y observando los resultados.



NUEVOS **Videos de demostraciones**

Vea videos del coautor Bruce Edwards, donde explica las demostraciones de los teoremas de *Cálculo*, décima edición, en **LarsonCalculus.com**.

NUEVO ¿Cómo lo ve?

La característica ¿Cómo lo ve? en cada sección presenta un problema de la vida real que podrá resolver mediante inspección visual utilizando los conceptos aprendidos en la lección. Este ejercicio es excelente para el análisis en clase o la preparación de un examen.

Comentario Revisado

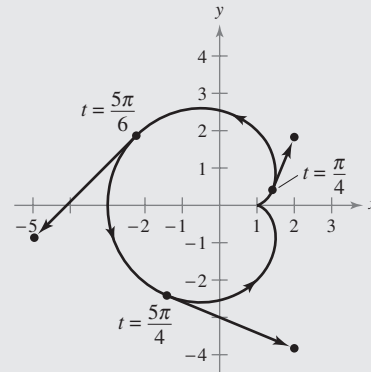
Estos consejos y sugerencias refuerzan o amplían conceptos, le ayudan a aprender cómo estudiar matemáticas, le advierten acerca de errores comunes, lo dirigen en casos especiales o le muestran los pasos alternativos o adicionales en la solución de un ejemplo.

Conjuntos de ejercicios Revisados

Los conjuntos de ejercicios han sido amplia y cuidadosamente examinados para asegurarnos que son rigurosos e importantes y que incluyen todos los temas que nuestros usuarios han sugerido. Se han reorganizado los ejercicios y titulado para que pueda ver mejor las conexiones entre los ejemplos y ejercicios. Los ejercicios de varios pasos son ejercicios de la vida real que refuerzan habilidades para resolver problemas y dominar los conceptos, dando a los estudiantes la oportunidad de aplicarlos en situaciones de la vida real.



¿CÓMO LO VE? La gráfica muestra una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ para $0 \leq t \leq 2\pi$ y su derivada $\mathbf{r}'(t)$ para diferentes valores de t .



- (a) Para cada derivada que se muestra en la gráfica, determine si cada componente es positiva o negativa.
- (b) ¿Es suave la curva en el intervalo $[0, 2\pi]$? Explique su razonamiento.

Unidad 3 Funciones vectoriales

40. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$

41. $\mathbf{r}(t) = \sin t\mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t - \frac{1}{2}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{k}$

42. $\mathbf{r}(t) = -\sqrt{2}\sin t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + \sqrt{2}\sin t\mathbf{k}$

Plénelo En los ejercicios 43 y 44, use un sistema algebraico por computadora a fin de representar gráficamente la función vectorial $\mathbf{r}(t)$. Para cada $u(t)$, haga una conjetura sobre la transformación (si la hay) de la gráfica de $\mathbf{r}(t)$. Use un sistema algebraico por computadora para verificar su conjetura.

43. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$

(a) $\mathbf{u}(t) = 2(\cos t - 1)\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{u}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$

(c) $\mathbf{u}(t) = 2\cos(-t)\mathbf{i} + 2\sin(-t)\mathbf{j} + \frac{1}{2}(-t)\mathbf{k}$

(d) $\mathbf{u}(t) = \frac{1}{2}t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + 2\cos t\mathbf{k}$

(e) $\mathbf{u}(t) = 6\cos t\mathbf{i} + 6\sin t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$

44. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$

(a) $\mathbf{u}(t) = t\mathbf{i} + (t^2 - 2t)\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{u}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$

(c) $\mathbf{u}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}(t^3 + 4)\mathbf{k}$

(d) $\mathbf{u}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$

(e) $\mathbf{u}(t) = (-t)\mathbf{i} + (-t^2)\mathbf{j} + \frac{1}{2}(-t^3)\mathbf{k}$

Representar una gráfica mediante una función vectorial. En los ejercicios 45-52, represente la curva plana por medio de una función vectorial. (Hay muchas respuestas correctas.)

45. $y = x + 5$

46. $2x - 3y + 5 = 0$

47. $y = (x - 2)^2$

48. $y = 4 - x^2$

49. $x^2 + y^2 = 25$

50. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

51. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

52. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

Representar una gráfica mediante una función vectorial. En los ejercicios 53-60, dibuje la curva en el espacio representada por la intersección de las superficies. Después represente la curva por una función vectorial utilizando el parámetro dado.

53. $z = x^2 + y^2, \quad x + y = 0$

Parámetro

54. $z = x^2 + y^2, \quad z = 4$

$x = 2\cos t$

55. $x^2 + y^2 = 4, \quad z = x^2$

$x = 2\sin t$

56. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16, \quad x = z^2$

$z = t$

57. $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x + z = 2$

$x = 1 + \sin t$

58. $x^2 + y^2 + z^2 = 10, \quad x + y = 4$

$x = 2 + \sin t$

59. $x^2 + z^2 = 4, \quad y^2 + z^2 = 4$

$x = t$ (primer octante)

60. $x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad xy = 4$

$x = t$ (primer octante)

61. Dibujar una curva. Demuestre que la función vectorial $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\cos t\mathbf{j} + 2t\sin t\mathbf{k}$ se encuentra en el cono $4x^2 = y^2 + z^2$. Dibuje la curva.

62. Dibujar una curva. Demuestre que la función vectorial $\mathbf{r}(t) = e^t\cos t\mathbf{i} + e^t\sin t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$ se encuentra en el cono $z^2 = x^2 + y^2$. Dibuje la curva.

Determinar un límite. En los ejercicios 63 a 68, evalúe el límite (si existe).

63. $\lim_{t \rightarrow \pi} (t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \sin t\mathbf{k})$

64. $\lim_{t \rightarrow 2} \left(3t\mathbf{i} + \frac{2}{t^2 - 1}\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k} \right)$

65. $\lim_{t \rightarrow 0} \left(t^2\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + \frac{1 - \cos t}{t}\mathbf{k} \right)$

66. $\lim_{t \rightarrow 1} \left(\sqrt{t}\mathbf{i} + \frac{\ln t}{t^2 - 1}\mathbf{j} + \frac{1}{t - 1}\mathbf{k} \right)$

67. $\lim_{t \rightarrow 0} \left(e^t\mathbf{i} + \frac{\sin t}{t}\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k} \right)$

68. $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(e^{-t}\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + \frac{t}{t^2 + 1}\mathbf{k} \right)$

Continuidad de una función vectorial. En los ejercicios 69-74, determine el (los) intervalo(s) en que la función vectorial es continua.

69. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j}$

70. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + \sqrt{t - 1}\mathbf{j}$

71. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \arcsen t\mathbf{j} + (t - 1)\mathbf{k}$

72. $\mathbf{r}(t) = 2e^{-t}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + \ln(t - 1)\mathbf{k}$

73. $\mathbf{r}(t) = (e^t, t^2, \tan t)$

74. $\mathbf{r}(t) = \langle 8, \sqrt{t}, \sqrt{t} \rangle$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

Escribir una transformación. En los ejercicios 75-78, considere la función vectorial $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t - 3)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

Dé una función vectorial $\mathbf{s}(t)$ que sea la transformación especificada de \mathbf{r} .

75. Una traslación vertical tres unidades hacia arriba.

76. Una traslación vertical dos unidades hacia abajo.

77. Una traslación horizontal dos unidades en dirección del eje x negativo.

78. Una traslación horizontal cinco unidades en dirección del eje y positivo.

79. Continuidad de una función vectorial. Escriba la definición de continuidad para una función vectorial. Dé un ejemplo de una función vectorial que esté definida pero no sea continua en $t = 2$.

80. Comparar funciones. ¿Cuáles de las siguientes gráficas representa la misma gráfica?

(a) $\mathbf{r}(t) = (-3\cos t + 1)\mathbf{i} + (5\sin t + 2)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{r}(t) = 4\mathbf{i} + (-3\cos t + 1)\mathbf{j} + (5\sin t + 2)\mathbf{k}$

(c) $\mathbf{r}(t) = (3\cos t - 1)\mathbf{i} + (-5\sin t - 2)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

(d) $\mathbf{r}(t) = (-3\cos 2t + 1)\mathbf{i} + (5\sin 2t + 2)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

Cambios en el contenido

El apéndice A (Demostración de teoremas seleccionados) ahora se presenta en formato de video (en inglés) en LarsonCalculus.com. Las demostraciones también se presentan en forma de texto (en inglés y con costo adicional) en CengageBrain.com.

Características confiables**Aplicaciones**

Se han elegido con cuidado ejercicios de aplicación y ejemplos que se incluyen para dirigir el tema: “¿Cuándo usaré esto?”. Estas aplicaciones son tomadas de diversas fuentes, tales como acontecimientos actuales, datos del mundo, tendencias de la industria y, además, están relacionadas con una amplia gama de intereses, entendiendo dónde se está utilizando (o se puede utilizar) el cálculo para fomentar una comprensión más completa del material.

Desarrollo de conceptos

Los ejercicios escritos al final de cada sección están diseñados para poner a prueba su comprensión de los conceptos básicos en cada sección, motivándole a verbalizar y escribir las respuestas, y fomentando las habilidades de comunicación técnica que le serán invaluable en sus futuras carreras.

Teoremas

Los teoremas proporcionan el marco conceptual del cálculo. Los teoremas se enuncian claramente y están separados del resto del libro mediante recuadros de referencia visual rápida. Las demostraciones importantes a menudo se ubican enseguida del teorema y se pueden encontrar en LarsonCalculus.com.

Definiciones

Como con los teoremas, las definiciones se enuncian claramente usando terminología precisa, formal y están separadas del texto mediante recuadros para una referencia visual rápida.

Definición de diferencial total

Si $z = f(x, y)$, y Δx y Δy son los incrementos en x y en y , entonces las **diferenciales** de las variables independientes x y y son

$$dx = \Delta x \quad y \quad dy = \Delta y$$

y la **diferencial total** de la variable dependiente z es

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy.$$

Exploraciones

Las exploraciones proporcionan retos únicos para estudiar conceptos que aún no se han cubierto formalmente en el libro. Le permiten aprender mediante el descubrimiento e introducir temas relacionados con los que está estudiando en ese momento. El explorar temas de esta manera le invita a pensar de manera más amplia.

Notas históricas y biografías

Las notas históricas le proporcionan información acerca de los fundamentos de cálculo. Las biografías presentan a las personas que crearon y contribuyeron al cálculo.

Tecnología

A través del libro, los recuadros de tecnología le enseñan a usar tecnología para resolver problemas y explorar

conceptos del cálculo. Estas sugerencias también indican algunos obstáculos del uso de la tecnología.

Proyectos de trabajo

Los proyectos de trabajo se presentan en algunas secciones y le invitan a explorar aplicaciones relacionadas con los temas que está estudiando. Proporcionan una forma interesante y atractiva para que usted y otros estudiantes trabajen e investiguen ideas de forma conjunta.

PROYECTO DE TRABAJO

Esferas deformadas

En los incisos (a) y (b), encuentre el volumen de las esferas deformadas. Estos sólidos se usan como modelos de tumores.

(a) Esfera arrugada

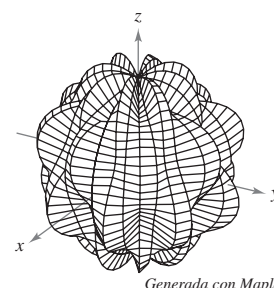
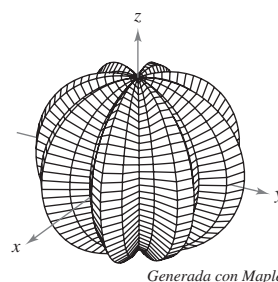
(b) Esfera deformada

$$\rho = 1 + 0.2 \sin 8\theta \sin \phi$$

$$\rho = 1 + 0.2 \sin 8\theta \sin 4\phi$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$$



■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para más información sobre estos tipos de esferas, consulte el artículo “Heat Therapy for Tumors”, de Leah Edelstein-Keshet, en *The UMAP Journal*.

Desafíos del examen Putnam

Las preguntas del examen Putnam se presentan en algunas secciones. Estas preguntas de examen Putnam lo desafían y le amplían los límites de su comprensión sobre el cálculo.

Agradecimientos

Queremos agradecer a todos los profesores que participaron en esta obra, sus aportaciones y sugerencias fueron invaluable para el desarrollo de la misma.

