

6.4 Campos vectoriales conservativos e independencia de la trayectoria

- Comprender y utilizar el teorema fundamental de las integrales de línea.
- Comprender el concepto de independencia de la trayectoria.
- Comprender el concepto de conservación de energía.

Teorema fundamental de las integrales de línea

El estudio iniciado en la sección 6.2 indica que en un campo gravitatorio el trabajo realizado por la gravedad sobre un objeto que se mueve entre dos puntos en el campo es independiente de la trayectoria seguida por el objeto. En esta sección estudiará una generalización importante de este resultado, a la que se conoce como el **teorema fundamental de las integrales de línea**. Para empezar, se presenta un ejemplo en el que se evalúa la integral de línea de un *campo vectorial conservativo* por tres trayectorias diferentes.

EJEMPLO 1 Integral de línea de un campo vectorial conservativo

Encuentre el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}xy\mathbf{i} + \frac{1}{4}x^2\mathbf{j}$$

sobre una partícula que se mueve de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ a lo largo de cada una de las trayectorias, como se muestra en la figura 6.19.

- a. $C_1: y = x$ b. $C_2: x = y^2$ c. $C_3: y = x^3$

Solución Observe que \mathbf{F} es conservativa, ya que las primeras derivadas parciales son iguales

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}xy\right] = \frac{1}{2}x \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{4}x^2\right] = \frac{1}{2}x$$

- a. Sea $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ para $0 \leq t \leq 1$, de manera que

$$d\mathbf{r} = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) dt \quad \text{y} \quad \mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{i} + \frac{1}{4}t^2\mathbf{j}.$$

Entonces, el trabajo realizado es

$$W = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \frac{3}{4}t^2 dt = \left[\frac{1}{4}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

- b. Sea $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j}$ para $0 \leq t \leq 1$, de manera que

$$d\mathbf{r} = \left(\mathbf{i} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathbf{j}\right) dt \quad \text{y} \quad \mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}t^{3/2}\mathbf{i} + \frac{1}{4}t^2\mathbf{j}.$$

Entonces, el trabajo realizado es

$$W = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \frac{5}{8}t^{3/2} dt = \left[\frac{1}{4}t^{5/2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

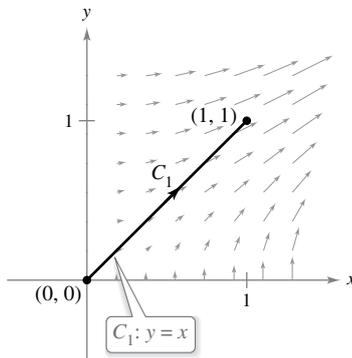
- c. Sea $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t\mathbf{i} + \frac{1}{8}t^3\mathbf{j}$ para $0 \leq t \leq 2$, de manera que

$$d\mathbf{r} = \left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{8}t^2\mathbf{j}\right) dt \quad \text{y} \quad \mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{32}t^4\mathbf{i} + \frac{1}{16}t^2\mathbf{j}.$$

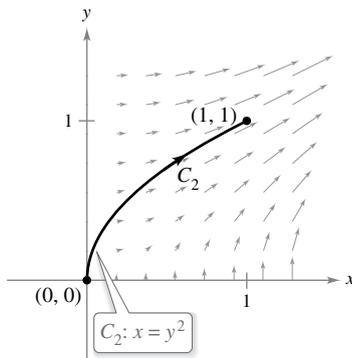
Entonces, el trabajo realizado es

$$W = \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 \frac{5}{128}t^4 dt = \left[\frac{1}{128}t^5\right]_0^2 = \frac{1}{4}.$$

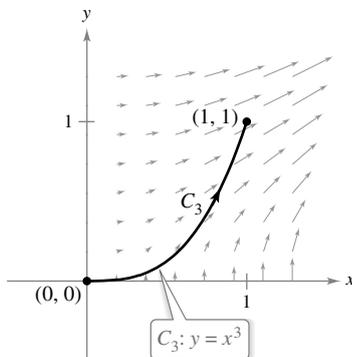
Por tanto, el trabajo realizado por un campo vectorial conservativo \mathbf{F} es el mismo para todas las trayectorias. ■



(a)



(b)



(c)

Figura 6.19

En el ejemplo 1, observe que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}xy\mathbf{i} + \frac{1}{4}x^2\mathbf{j}$ es conservativo porque $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$ donde $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2y$. En tales casos, el teorema siguiente establece que el valor de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ está dado por

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= f(x(1), y(1)) - f(x(0), y(0)) \\ &= \frac{1}{4} - 0 \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



COMENTARIO Observe cómo el teorema fundamental de las integrales de línea es similar al teorema fundamental de cálculo que establece que

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

donde $F'(x) = f(x)$.

TEOREMA 6.5 Teorema fundamental de las integrales de línea

Sea C una curva suave por partes contenida en una región abierta R y dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad a \leq t \leq b.$$

Si $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es conservativa en R , y M y N son continuas en R , entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

donde f es una función potencial de \mathbf{F} . Es decir $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$.

Demostración Esta demostración es sólo para una curva suave. Para curvas suaves en partes, el procedimiento se lleva a cabo por separado para cada parte suave. Puesto que

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \\ &= \int_a^b \left[f_x(x, y) \frac{dx}{dt} + f_y(x, y) \frac{dy}{dt} \right] dt \end{aligned}$$

y, por la regla de la cadena, se tiene

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \frac{d}{dt} [f(x(t), y(t))] dt \\ &= f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a)). \end{aligned}$$

El último paso es una aplicación del teorema fundamental del cálculo.

Consulte LarsonCalculus.com para el video de Bruce Edwards de esta demostración.

En el espacio, el teorema fundamental de las integrales de línea adopta la forma siguiente. Sea C una curva suave por partes contenida en una región abierta Q y dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b.$$

Si $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es conservativo y M , N y P son continuas, entonces

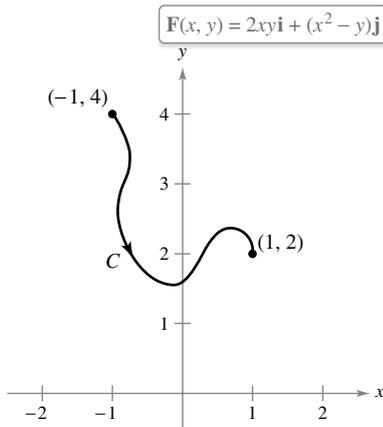
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x(b), y(b), z(b)) - f(x(a), y(a), z(a))$$

donde $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$.

El teorema fundamental de las integrales de línea establece que si el campo vectorial \mathbf{F} es conservativo, entonces la integral de línea entre dos puntos cualesquiera es simplemente la diferencia entre los valores de la función potencial f en estos puntos.

EJEMPLO 2

Aplicar el teorema fundamental de las integrales de línea



Aplicación del teorema fundamental de las integrales de línea, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.
Figura 6.20

Evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C es una curva suave por partes desde $(-1, 4)$ a $(1, 2)$ y

$$\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j}$$

como se muestra en la figura 6.20.

Solución Por el ejemplo 6 de la sección 6.1, sabe que \mathbf{F} es el gradiente de f , donde

$$f(x, y) = x^2y - \frac{y^2}{2} + K.$$

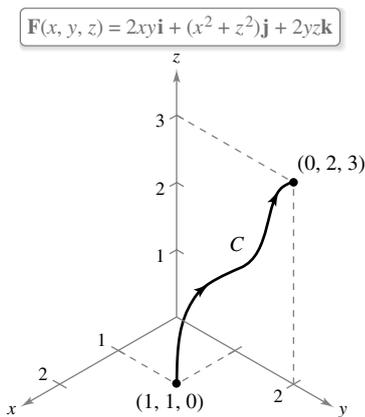
Por consiguiente, \mathbf{F} es conservativo, y por el teorema fundamental de las integrales de línea, se sigue que

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= f(1, 2) - f(-1, 4) \\ &= \left[1^2(2) - \frac{2^2}{2} \right] - \left[(-1)^2(4) - \frac{4^2}{2} \right] \\ &= 4. \end{aligned}$$

Observe que no es necesario incluir una constante K como parte de f , ya que se cancela por sustracción.

EJEMPLO 3

Aplicar el teorema fundamental de las integrales de línea



Aplicación del teorema fundamental de las integrales de línea, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.
Figura 6.21

Evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C es una curva suave por partes desde $(1, 1, 0)$ hasta $(0, 2, 3)$ y

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}$$

como se muestra en la figura 6.21.

Solución Por el ejemplo en la sección 6.1, sabe que \mathbf{F} es el gradiente de f , donde

$$f(x, y, z) = x^2y + yz^2 + K.$$

Por consiguiente, \mathbf{F} es conservativo, y por el teorema fundamental de las integrales de línea, se deduce que

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= f(0, 2, 3) - f(1, 1, 0) \\ &= [(0)^2(2) + (2)(3)^2] - [(1)^2(1) + (1)(0)^2] \\ &= 17. \end{aligned}$$

En los ejemplos 2 y 3 es importante que no pierda de vista que el valor de la integral de línea es el mismo para cualquier curva suave C que tenga los puntos inicial y final dados. Así, en el ejemplo 3 evalúe la integral de línea de la curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{i} + (1 + t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}.$$

Se obtendrá

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 (30t^2 + 16t - 1) dt \\ &= 17. \end{aligned}$$

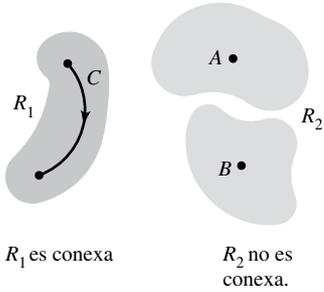


Figura 6.22

Independencia de la trayectoria

Por el teorema fundamental de las integrales de línea es evidente que si \mathbf{F} es continuo y conservativo en una región abierta R , el valor de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es el mismo para toda curva suave por partes C que vaya de un punto fijo de R a otro punto fijo de R . Esto se describe diciendo que la integral de línea es **independiente de la trayectoria** en la región R .

Una región en el plano (o en el espacio) es **conexa** si cada dos puntos en la región pueden ser unidos por una curva suave por partes que se encuentre completamente dentro de la región, como se muestra en la figura 6.22. En regiones abiertas y *conexas*, la independencia de la trayectoria de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es equivalente a la condición de que \mathbf{F} sea conservativo.

TEOREMA 6.6 Independencia de la trayectoria y campos vectoriales conservativos

Si \mathbf{F} es continuo en una región abierta y conexa, entonces la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

es independiente de la trayectoria si y sólo si \mathbf{F} es conservativo.

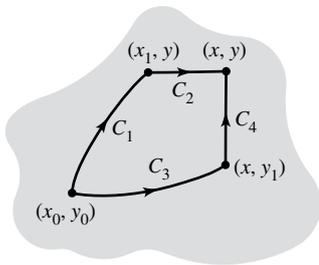


Figura 6.23

Demostración Si \mathbf{F} es conservativo, entonces, por el teorema fundamental de las integrales de línea, la integral de línea es independiente de la trayectoria. Ahora se demuestra el recíproco para una región plana conexa R . Sea $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ y sea (x_0, y_0) un punto fijo en R . Si (x, y) es cualquier punto en R , elíjase una curva suave por partes C que vaya de (x_0, y_0) a (x, y) y defínase f como

$$f(x, y) = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C M dx + N dy.$$

La existencia de C en R está garantizada por el hecho de que R es conexa. Se puede demostrar que f es una función potencial de \mathbf{F} considerando dos trayectorias diferentes entre (x_0, y_0) a (x, y) . Para la *primera* trayectoria, elíjase (x_1, y) en R tal que $x \neq x_1$. Esto es posible ya que R es abierta. Después elíjase C_1 y C_2 como se muestra en la figura 6.23. Utilizando la independencia de la trayectoria, se tiene que

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_C M dx + N dy \\ &= \int_{C_1} M dx + N dy + \int_{C_2} M dx + N dy. \end{aligned}$$

Como la primera integral no depende de x , y como $dy = 0$ en la segunda integral, se tiene

$$f(x, y) = g(y) + \int_{C_2} M dx$$

y entonces la derivada parcial de f respecto a x es $f_x(x, y) = M$. Para la *segunda* trayectoria, se elige un punto (x, y_1) . Utilizando un razonamiento similar al empleado para la primera trayectoria, puede concluir que $f_y(x, y) = N$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} \\ &= M\mathbf{i} + N\mathbf{j} \\ &= \mathbf{F}(x, y) \end{aligned}$$

y se sigue que \mathbf{F} es conservativo.

Consulte *LarsonCalculus.com* para el video de Bruce Edwards de esta demostración. ■

EJEMPLO 4

Trabajo en un campo de fuerzas conservativo

Para el campo de fuerzas dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \cos y \mathbf{i} - e^x \operatorname{sen} y \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

demuestre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria, y calcule el trabajo realizado por \mathbf{F} sobre un objeto que se mueve a lo largo de una curva C desde $(0, \pi/2, 1)$ hasta $(1, \pi, 3)$.

Solución Al expresar el campo de fuerzas en la forma $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$, tiene $M = e^x \cos y$, $N = -e^x \operatorname{sen} y$ y $P = 2$, y se deduce que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 = \frac{\partial M}{\partial z}$$

y

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -e^x \operatorname{sen} y = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Por tanto, \mathbf{F} es conservativo. Si f es una función potencial de \mathbf{F} , entonces

$$f_x(x, y, z) = e^x \cos y$$

$$f_y(x, y, z) = -e^x \operatorname{sen} y$$

y

$$f_z(x, y, z) = 2.$$

Integrando con respecto a x , y y z por separado, obtiene

$$f(x, y, z) = \int f_x(x, y, z) dx = \int e^x \cos y dx = e^x \cos y + g(y, z)$$

$$f(x, y, z) = \int f_y(x, y, z) dy = \int -e^x \operatorname{sen} y dy = e^x \cos y + h(x, z)$$

y

$$f(x, y, z) = \int f_z(x, y, z) dz = \int 2 dz = 2z + k(x, y).$$

Comparando estas tres versiones de $f(x, y, z)$ puede concluir que

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + 2z + K.$$

Así, el trabajo realizado por \mathbf{F} a lo largo de *cualquier* curva C desde $(0, \pi/2, 1)$ hasta $(1, \pi, 3)$ es

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \left[e^x \cos y + 2z \right]_{(0, \pi/2, 1)}^{(1, \pi, 3)} \\ &= (-e + 6) - (0 + 2) \\ &= 4 - e. \end{aligned}$$

¿Cuánto trabajo se realizaría si el objeto del ejemplo 4 se moviera del punto $(0, \pi/2, 1)$ al punto $(1, \pi, 3)$ y después volviera al punto de partida $(0, \pi/2, 1)$? El teorema fundamental de las integrales de línea establece que el trabajo realizado sería cero. Recuerde que, por definición, el trabajo puede ser negativo. Así, en el momento en el que el objeto vuelve a su punto de partida, la cantidad de trabajo que se registra positivamente se cancela por la cantidad de trabajo que se registra negativamente.

Una curva C dada por $\mathbf{r}(t)$ para $a \leq t \leq b$ es **cerrada** si $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$. Por el teorema fundamental de las integrales de línea, puede concluir que si \mathbf{F} es continuo y conservativo en una región abierta R , entonces la integral de línea sobre toda curva cerrada C es 0.

.....►
 ...COMENTARIO El teorema 6.7 proporciona varias opciones para calcular una integral de línea de un campo vectorial conservativo. Puede usar una función potencial, o puede ser más conveniente elegir una trayectoria particularmente simple, como un segmento de recta.

TEOREMA 6.7 Condiciones equivalentes

Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ con primeras derivadas parciales continuas en una región abierta conexa R , y sea C una curva suave por partes en R . Las condiciones siguientes son equivalentes.

1. \mathbf{F} es conservativo. Es decir, $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna función f .
2. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria.
3. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva *cerrada* C en R .

EJEMPLO 5 Evaluar una integral de línea

.....► Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

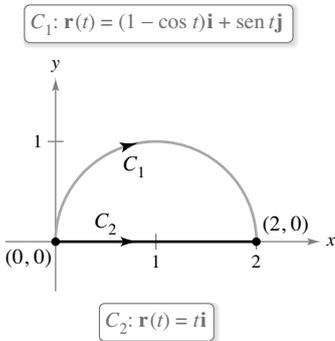


Figura 6.24

Evalúe $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^3 + 1)\mathbf{i} + (3xy^2 + 1)\mathbf{j}$$

y C_1 es la trayectoria semicircular de $(0, 0)$ a $(2, 0)$, que se muestra en la figura 6.24.

Solución Tiene las tres opciones siguientes:

a. Puede utilizar el método presentado en la sección 6.2 para evaluar la integral de línea a lo largo de la *curva dada*. Para esto, puede usar la parametrización $\mathbf{r}(t) = (1 - \cos t)\mathbf{i} + \text{sen } t\mathbf{j}$ donde $0 \leq t \leq \pi$. Con esta parametrización, se deduce que

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) dt = (\text{sen } t\mathbf{i} + \text{cos } t\mathbf{j}) dt$$

y

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^\pi (\text{sen } t + \text{sen}^4 t + \text{cos } t + 3 \text{sen}^2 t \text{cos } t - 3 \text{sen}^2 t \text{cos}^2 t) dt.$$

Esta integral puede desanimarlo si ha elegido esta opción.

b. Puede intentar hallar una *función potencial* y evaluar la integral de línea mediante el teorema fundamental de las integrales de línea. Empleando la técnica que se muestra en el ejemplo 4, puede encontrar que la función potencial es $f(x, y) = xy^3 + x + y + K$ y, por el teorema fundamental,

$$W = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(2, 0) - f(0, 0) = 2.$$

c. Sabiendo que \mathbf{F} es conservativo, tiene una tercera opción. Como el valor de la integral de línea es independiente de la trayectoria, puede reemplazar la trayectoria semicircular con una *trayectoria más simple*. Suponga que elige la trayectoria rectilínea C_2 desde $(0, 0)$ hasta $(2, 0)$. Sea $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i}$ para $0 \leq t \leq 2$. Así

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i} dt \quad \text{y} \quad \mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

Entonces, la integral es

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 1 dt = t \Big|_0^2 = 2.$$

Obviamente, de las tres opciones la tercera es la más sencilla. ■



MICHAEL FARADAY
(1791-1867)

Varios filósofos de la ciencia han considerado que la ley de Faraday de la conservación de la energía es la mayor generalización concebida por el pensamiento humano. Muchos físicos han contribuido a nuestro conocimiento de esta ley; dos de los primeros y más importantes fueron James Prescott Joule (1818-1889) y Hermann Ludwig Helmholtz (1821-1894).

Conservación de la energía

En 1840, el físico inglés Michael Faraday escribió: “En ninguna parte hay una creación o producción pura de energía sin un consumo correspondiente de algo que la proporcione.” Esta declaración representa la primera formulación de una de las leyes más importantes de la física: la **ley de conservación de la energía**. En la terminología moderna, la ley dice lo siguiente: *En un campo de fuerzas conservativo, la suma de energías potencial y cinética de un objeto se mantiene constante de punto a punto.*

Puede usar el teorema fundamental de las integrales de línea para deducir esta ley. De la física se sabe que la **energía cinética** de una partícula de masa m y velocidad v es

$$k = \frac{1}{2}mv^2. \quad \text{Energía cinética}$$

La **energía potencial** p de una partícula en el punto en un campo vectorial conservativo \mathbf{F} se define como $p(x, y, z) = -f(x, y, z)$, donde f es la función potencial de \mathbf{F} . En consecuencia, el trabajo realizado por \mathbf{F} a lo largo de una curva suave C desde A hasta B es

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(x, y, z) \Big|_A^B = -p(x, y, z) \Big|_A^B = p(A) - p(B)$$

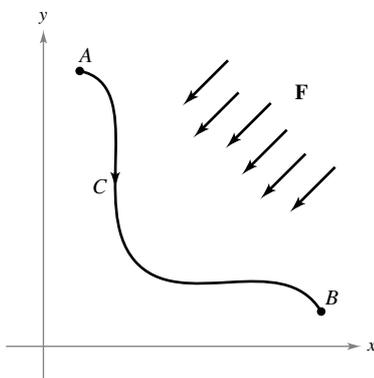
como se muestra en la figura 6.25. En otras palabras, el trabajo es igual a la diferencia entre las energías potenciales en A y B . Ahora, suponga que $\mathbf{r}(t)$ es el vector posición de una partícula que se mueve a lo largo de C desde $A = \mathbf{r}(a)$ hasta $B = \mathbf{r}(b)$. En cualquier instante t , la velocidad, aceleración y rapidez de la partícula son $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ y $v(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$, respectivamente. Así, por la segunda ley del movimiento de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}(t) = m(\mathbf{v}'(t))$ y el trabajo realizado por \mathbf{F} es

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}(t) dt \\ &= \int_a^b [m\mathbf{v}'(t)] \cdot \mathbf{v}(t) dt \\ &= \int_a^b m[\mathbf{v}'(t) \cdot \mathbf{v}(t)] dt \\ &= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} [\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] dt \\ &= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} [\|\mathbf{v}(t)\|^2] dt \\ &= \frac{m}{2} \left[\|\mathbf{v}(t)\|^2 \right]_a^b \\ &= \frac{m}{2} \left[[v(t)]^2 \right]_a^b \\ &= \frac{1}{2} m[v(b)]^2 - \frac{1}{2} m[v(a)]^2 \\ &= k(B) - k(A). \end{aligned}$$

Igualando estos dos resultados obtenidos para W se tiene

$$\begin{aligned} p(A) - p(B) &= k(B) - k(A) \\ p(A) + k(A) &= p(B) + k(B) \end{aligned}$$

lo cual implica que la suma de energías potencial y cinética permanece constante de punto a punto.



El trabajo realizado por \mathbf{F} a lo largo de C es $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = p(A) - p(B)$.

Figura 6.25

6.4 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Evaluar una integral de línea para diferentes parametrizaciones En los ejercicios 1 a 4, demuestre que el valor de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es el mismo para cada representación paramétrica de C .

- $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$
 - $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$
 - $\mathbf{r}_2(\theta) = \sin \theta \mathbf{i} + \sin^2 \theta \mathbf{j}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
- $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} - x\mathbf{j}$
 - $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 4$
 - $\mathbf{r}_2(w) = w^2\mathbf{i} + w\mathbf{j}, \quad 0 \leq w \leq 2$
- $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$
 - $\mathbf{r}_1(\theta) = \sec \theta \mathbf{i} + \tan \theta \mathbf{j}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$
 - $\mathbf{r}_2(t) = \sqrt{t+1}\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 3$
- $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$
 - $\mathbf{r}_1(t) = (2+t)\mathbf{i} + (3-t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 3$
 - $\mathbf{r}_2(w) = (2 + \ln w)\mathbf{i} + (3 - \ln w)\mathbf{j}, \quad 1 \leq w \leq e^3$

Probar campos conservativos En los ejercicios 5 a 10, determine si el campo vectorial es o no conservativo.

- $\mathbf{F}(x, y) = e^x(\sin y\mathbf{i} + \cos y\mathbf{j})$
- $\mathbf{F}(x, y) = 15x^2y^2\mathbf{i} + 10x^3y\mathbf{j}$
- $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{y^2}(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = y \ln z \mathbf{i} - x \ln z \mathbf{j} + \frac{xy}{z} \mathbf{k}$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z\mathbf{i} + 2xyz\mathbf{j} + xy^2\mathbf{k}$
- $\mathbf{F}(x, y, z) = \sin yz\mathbf{i} + xz \cos yz\mathbf{j} + xy \sin yz\mathbf{k}$

Evaluar una integral de línea de un campo vectorial En los ejercicios 11 a 24, encuentre el valor de la integral de línea

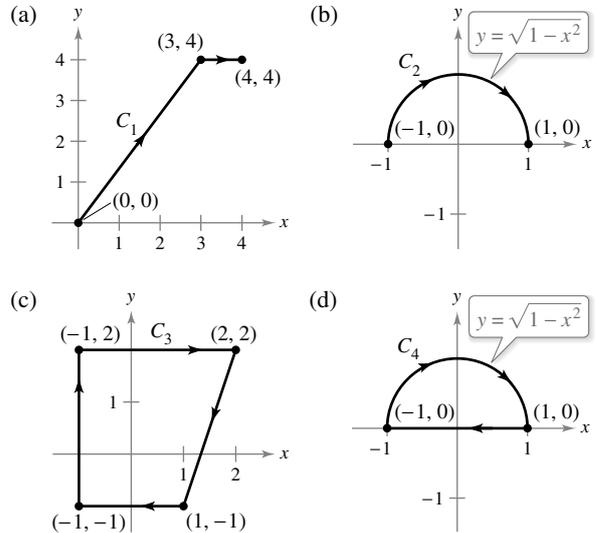
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

(Sugerencia: Si \mathbf{F} es conservativo, la integración puede ser más sencilla a través de una trayectoria alternativa.)

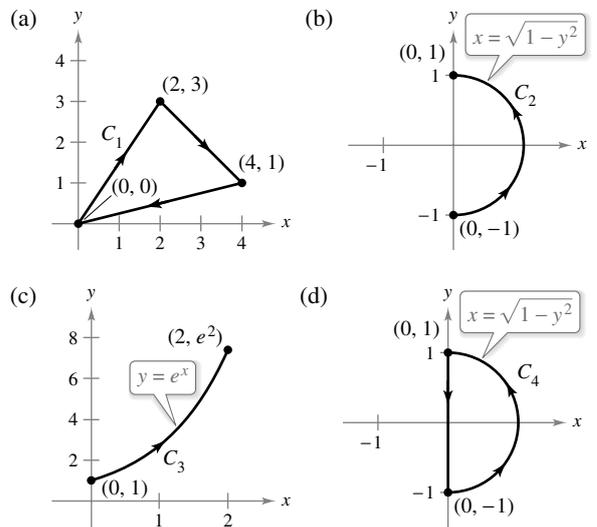
- $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$
 - $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$
 - $\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$
- $\mathbf{F}(x, y) = ye^{xy}\mathbf{i} + xe^{xy}\mathbf{j}$
 - $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} - (t-3)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 3$
 - La trayectoria cerrada consiste en segmentos de recta desde $(0, 3)$ hasta $(0, 0)$, después desde $(0, 0)$ hasta $(3, 0)$ y desde $(3, 0)$ hasta $(0, 3)$.
- $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$
 - $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$
 - $\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$
 - $\mathbf{r}_3(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$

- $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\mathbf{i} + 2x^2y\mathbf{j}$
 - $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j}, \quad 1 \leq t \leq 3$
 - $\mathbf{r}_2(t) = (t+1)\mathbf{i} - \frac{1}{3}(t-3)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2$

$$15. \int_C y^2 dx + 2xy dy$$



$$16. \int_C (2x - 3y + 1) dx - (3x + y - 5) dy$$



$$17. \int_C 2xy dx + (x^2 + y^2) dy$$

- C : elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ desde $(5, 0)$ hasta $(0, 4)$
- C : parábola $y = 4 - x^2$ desde $(2, 0)$ hasta $(0, 4)$

18. $\int_C (x^2 + y^2) dx + 2xy dy$
 (a) $\mathbf{r}_1(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2$
 (b) $\mathbf{r}_2(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
19. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$
 (a) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 4$
 (b) $\mathbf{r}_2(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2$
20. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$
 (a) $\mathbf{r}_1(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq \pi$
 (b) $\mathbf{r}_2(t) = (1 - 2t)\mathbf{i} + \pi^2 t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$
21. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2y + x)\mathbf{i} + (x^2 - z)\mathbf{j} + (2y - 4z)\mathbf{k}$
 (a) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$
 (b) $\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (2t - 1)^2\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$
22. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$
 (a) $\mathbf{r}_1(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq \pi$
 (b) $\mathbf{r}_2(t) = (1 - 2t)\mathbf{i} + \pi t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$
23. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^z(y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + xy\mathbf{k})$
 (a) $\mathbf{r}_1(t) = 4 \cos t\mathbf{i} + 4 \sin t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq \pi$
 (b) $\mathbf{r}_2(t) = (4 - 8t)\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$
24. $\mathbf{F}(x, y, z) = y \sin z\mathbf{i} + x \sin z\mathbf{j} + xy \cos x\mathbf{k}$
 (a) $\mathbf{r}_1(t) = t^2\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2$
 (b) $\mathbf{r}_2(t) = 4t\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$

Usar el teorema fundamental de las integrales de línea En los ejercicios 25 a 34, evalúe la integral de línea utilizando el teorema fundamental de las integrales de línea. Utilice un sistema algebraico por computadora y compruebe los resultados.

25. $\int_C (3y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{r}$
 C: curva suave desde (0, 0) hasta (3, 8)
26. $\int_C [2(x + y)\mathbf{i} + 2(x + y)\mathbf{j}] \cdot d\mathbf{r}$
 C: curva suave de (-1, 1) a (3, 2)
27. $\int_C \cos x \sin y dx + \sin x \cos y dy$
 C: segmento de recta de (0, - π) a ($\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$)
28. $\int_C \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$
 C: segmento de recta de (1, 1) a ($2\sqrt{3}$, 2)
29. $\int_C e^x \sin y dx + e^x \cos y dy$
 C: cicloide de $x = \theta - \sin \theta$, $y = 1 - \cos \theta$ desde (0, 0) hasta (2π , 0)
30. $\int_C \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} dy$
 C: círculo $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9$ en el sentido de las manecillas del reloj desde (7, 5) hasta (1, 5)

Caroline Warren/Photodisc/Getty Images

31. $\int_C (z + 2y) dx + (2x - z) dy + (x - y) dz$
 (a) C: segmento de recta desde (0, 0, 0) a (1, 1, 1)
 (b) C: segmento de recta desde (0, 0, 0) a (0, 0, 1) a (1, 1, 1)
 (c) C: segmento de recta desde (0, 0, 0) a (1, 0, 0) a (1, 1, 0) a (1, 1, 1)
32. Repita el ejercicio 31 usando la integral $\int_C zy dx + xz dy + xy dz$.
33. $\int_C -\sin x dx + z dy + y dz$
 C: curva suave desde (0, 0, 0) hasta ($\frac{\pi}{2}$, 3, 4)
34. $\int_C 6x dx - 4z dy - (4y - 20z) dz$
 C: curva suave desde (0, 0, 0) hasta (3, 4, 0)

Trabajo En los ejercicios 35 y 36, encuentre el trabajo realizado por el campo de fuerzas \mathbf{F} al mover un objeto desde P hasta Q .

35. $\mathbf{F}(x, y) = 9x^2y^2\mathbf{i} + (6x^3y - 1)\mathbf{j}$; $P(0, 0)$, $Q(5, 9)$
36. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{2x}{y}\mathbf{i} - \frac{x^2}{y^2}\mathbf{j}$; $P(-1, 1)$, $Q(3, 2)$
37. **Trabajo** Una piedra de 1 libra atada al extremo de una cuerda de 2 pies se hace girar horizontalmente con un extremo fijo. Realiza una revolución por segundo. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza \mathbf{F} que mantiene a la piedra en una trayectoria circular. [*Sugerencia:* Use fuerza = (masa)(aceleración centrípeta).]
38. **Trabajo** Si $\mathbf{F}(x, y, z) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ es un campo vectorial de fuerza constante, demuestre que el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la trayectoria desde P hasta Q es $W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{PQ}$.

••• **39. Trabajo** •••••

• Se instala una tirolesa a 50 metros del nivel del suelo. Corre desde su posición hasta un punto a 50 metros de la base de la instalación. Demuestre que el trabajo realizado por el campo de fuerzas gravitatorio para que una persona de 175 libras recorra la longitud del cable es el mismo en cada una de las trayectorias

• (a) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (50 - t)\mathbf{j}$

• (b) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{30}(50 - t)^2\mathbf{j}$

•••••

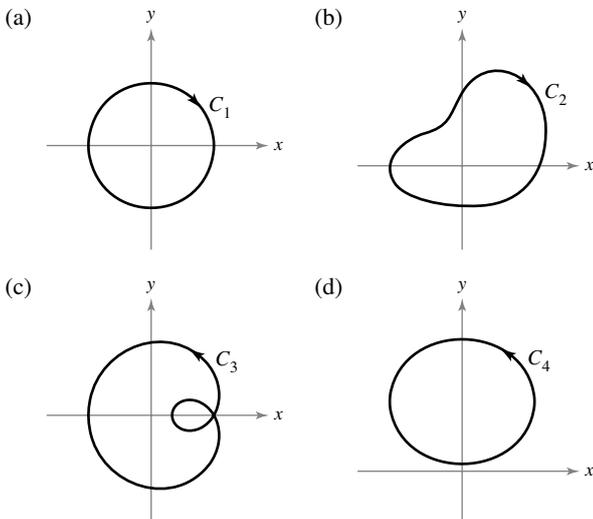


40. **Trabajo** ¿Puede encontrar una trayectoria para el cable de la tirolesa del ejercicio 39, tal que el trabajo realizado por el campo de fuerzas gravitatorio sea distinto de las cantidades de trabajo realizadas para las dos trayectorias dadas? Explique por qué sí o por qué no.

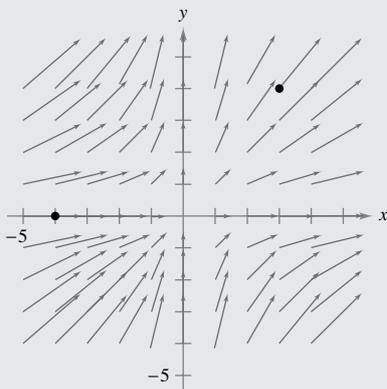
DESARROLLO DE CONCEPTOS

41. **Teorema fundamental de las integrales de línea** Enuncie el teorema fundamental de las integrales de línea.
42. **Independencia de la trayectoria** ¿Qué significa que una integral de línea sea independiente de la trayectoria? Enuncie el método para determinar si una integral de línea es independiente de la trayectoria.

43. **Piénselo** Sea $\mathbf{F}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} - \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$. Encuentre el valor de la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

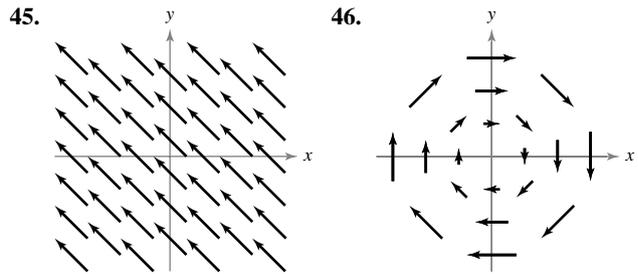


44. **¿CÓMO LO VE?** Considere el campo de fuerzas que se muestra en la figura. Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite MathGraphs.com.



- (a) Argumente verbalmente que el campo de fuerzas no es conservativo porque se pueden encontrar dos trayectorias que requieren cantidades diferentes de trabajo para mover un objeto desde $(-4, 0)$ hasta $(3, 4)$. De las dos trayectorias, ¿cuál requiere mayor cantidad de trabajo?
- (b) Argumente verbalmente que el campo de fuerzas no es conservativo porque se puede encontrar una curva cerrada C tal que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$.

Razonamiento gráfico En los ejercicios 45 y 46, considere el campo de fuerzas que se muestra en la figura. ¿Es el campo de fuerzas conservativo? Explique por qué sí o por qué no.



¿Verdadero o falso? En los ejercicios 47 a 50, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

47. Si C_1 , C_2 y C_3 tienen los mismos puntos inicial y final, y $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2$, entonces $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_1 = \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_3$.
48. Si $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ y C está dado por $\mathbf{r}(t) = (4 \sin t)\mathbf{i} + (3 \cos t)\mathbf{j}$, para $0 \leq t \leq \pi$, entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.
49. Si \mathbf{F} es conservativa en una región R acotada por una trayectoria cerrada simple y está contenida en R , entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria.
50. Si $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ y $\partial M/\partial x = \partial N/\partial y$, entonces \mathbf{F} es conservativa.

51. **Función armónica** Una función es *armónica* si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Demuestre que si f es armónica, entonces

$$\int_C \left(\frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy \right) = 0$$

donde C es una curva suave cerrada en el plano.

52. **Energía cinética y potencial** La energía cinética de un objeto que se mueve a través de un campo de fuerzas conservativo disminuye a una razón de 15 unidades por minuto. ¿A qué razón cambia su energía potencial?

53. **Investigación** Sea $\mathbf{F}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} - \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$.

- (a) Demuestre que

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

donde

$$M = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad y \quad N = \frac{-x}{x^2 + y^2}$$

- (b) Si $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$ para $0 \leq t \leq \pi$, encuentre $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.
- (c) Si $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j}$ para $0 \leq t \leq \pi$, encuentre $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.
- (d) Si $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$ para $0 \leq t \leq 2\pi$, encuentre $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. ¿Por qué esto no contradice el teorema 6.7?
- (e) Demuestre que $\nabla \left(\arctan \frac{y}{x} \right) = \mathbf{F}$.

6.5 Teorema de Green

- Utilizar el teorema de Green para evaluar una integral de línea.
- Utilizar formas alternativas del teorema de Green.

Teorema de Green

En esta sección estudiará el **teorema de Green**, que recibe este nombre en honor del matemático inglés George Green (1793-1841). Este teorema establece que el valor de una integral doble sobre una región *simplemente conexa* R está determinado por el valor de una integral de línea a lo largo de la frontera de R .

Una curva C dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, donde $a \leq t \leq b$, es **simple** si no se corta a sí misma, es decir, $\mathbf{r}(c) \neq \mathbf{r}(d)$ para todo c y d en el intervalo abierto (a, b) . Una región plana R es **simplemente conexa** si cada curva cerrada simple en R encierra sólo los puntos que están en R (ver la figura 6.26). De manera informal, una región simplemente conexa no puede consistir de partes separadas o con agujeros.

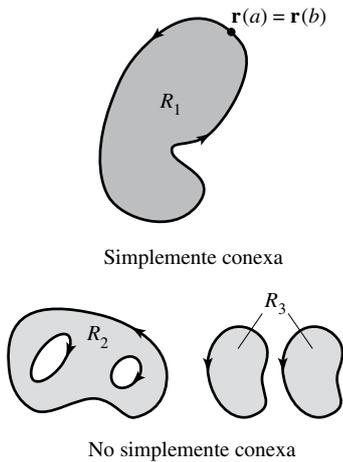
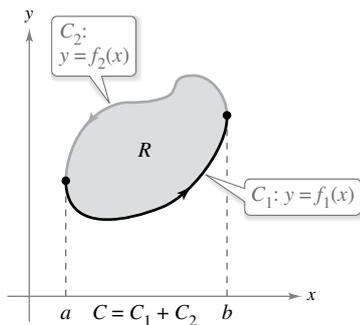
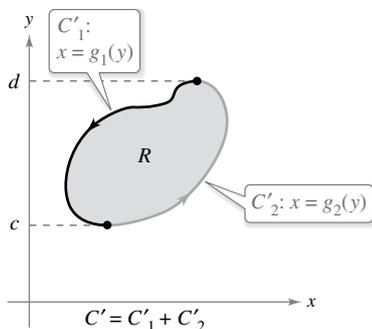


Figura 6.26



R es verticalmente simple.



R es horizontalmente simple.

Figura 6.27

TEOREMA 6.8 Teorema de Green

Sea R una región simplemente conexa cuya frontera es una curva C suave por partes, orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj (es decir, C se recorre *una vez* de manera que la región R siempre esté a la *izquierda*). Si M y N tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a R , entonces

$$\int_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA.$$

Demostración Se da una demostración sólo para una región que es vertical y horizontalmente simple, como se muestra en la figura 6.27.

$$\begin{aligned} \int_C M dx &= \int_{C_1} M dx + \int_{C_2} M dx \\ &= \int_a^b M(x, f_1(x)) dx + \int_b^a M(x, f_2(x)) dx \\ &= \int_a^b [M(x, f_1(x)) - M(x, f_2(x))] dx \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dA &= \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy dx \\ &= \int_a^b M(x, y) \Big|_{f_1(x)}^{f_2(x)} dx \\ &= \int_a^b [M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x))] dx. \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\int_C M dx = - \iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dA.$$

De manera similar, puede usar $g_1(y)$ y $g_2(y)$ para demostrar que $\int_C N dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dA$. Sumando las integrales $\int_C M dx$ y $\int_C N dy$, llega a la conclusión establecida en el teorema.

Consulte LarsonCalculus.com para el video de Bruce Edwards de esta demostración.

Un signo de integral con un círculo es algunas veces utilizado para indicar una integral de línea alrededor de una curva cerrada simple, como se muestra a continuación. Para indicar la orientación de la frontera, se puede utilizar una flecha. Por ejemplo, en la segunda integral, la flecha indica que la frontera C está orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj.

$$1. \oint_C M dx + N dy \qquad 2. \oint_C M dx + N dy$$

EJEMPLO 1 Aplicar el teorema de Green

Utilice el teorema de Green para evaluar la integral de línea

$$\int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy$$

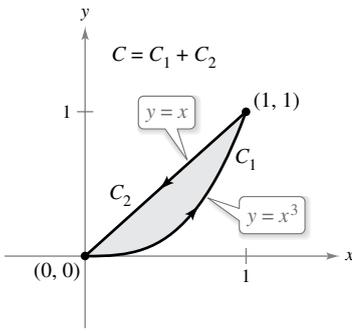
donde C es la trayectoria desde $(0, 0)$, hasta $(1, 1)$ a lo largo de la gráfica de $y = x^3$, desde $(1, 1)$ hasta $(0, 0)$ a lo largo de la gráfica de $y = x$, como se muestra en la figura 6.28.

Solución Como $M = y^3$ y $N = x^3 + 3xy^2$, tiene que

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2.$$

Aplicando el teorema de Green, tiene entonces

$$\begin{aligned} \int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy &= \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \\ &= \int_0^1 \int_{x^3}^x [(3x^2 + 3y^2) - 3y^2] dy dx \\ &= \int_0^1 \int_{x^3}^x 3x^2 dy dx \\ &= \int_0^1 3x^2 y \Big|_{x^3}^x dx \\ &= \int_0^1 (3x^3 - 3x^5) dx \\ &= \left[\frac{3x^4}{4} - \frac{x^6}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



C es simple y cerrada, y la región R siempre se encuentra a la izquierda de C .

Figura 6.28

**GEORGE GREEN
(1793-1841)**

Green, autodidacta, hijo de un molinero, publicó por primera vez el teorema que lleva su nombre en 1828 en un ensayo sobre electricidad y magnetismo. En ese tiempo no había casi ninguna teoría matemática para explicar los fenómenos eléctricos. "Considerando cuán deseable sería que una energía de naturaleza universal, como la electricidad, fuera susceptible, hasta donde fuera posible, de someterse al cálculo... me vi impulsado a intentar descubrir cualquier posible relación general entre esta función y las cantidades de electricidad en los cuerpos que la producen."

El teorema de Green no se puede aplicar a toda integral de línea. Entre las restricciones establecidas en el teorema 6.8, la curva C debe ser simple y cerrada. Sin embargo, cuando el teorema de Green es aplicable, puede ahorrar tiempo. Para ver esto, trate de aplicar las técnicas descritas en la sección 6.2 para evaluar la integral de línea del ejemplo 1. Para esto, necesita escribir la integral de línea como

$$\begin{aligned} \int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy &= \int_{C_1} y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy + \int_{C_2} y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy \end{aligned}$$

donde C_1 es la trayectoria cúbica dada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$$

desde $t = 0$ hasta $t = 1$ y C_2 es el segmento de recta dado por

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j}$$

desde $t = 0$ hasta $t = 1$.

EJEMPLO 2 Aplicar el teorema de Green para calcular trabajo

$$\mathbf{F}(x, y) = y^3\mathbf{i} + (x^3 + 3xy^2)\mathbf{j}$$

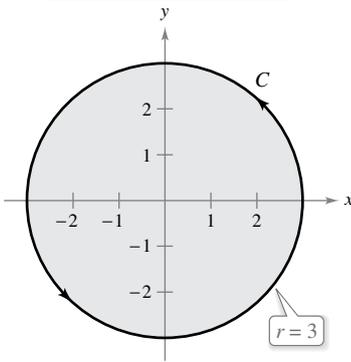


Figura 6.29

Estando sometida a la fuerza

$$\mathbf{F}(x, y) = y^3\mathbf{i} + (x^3 + 3xy^2)\mathbf{j}$$

una partícula recorre una vez el círculo de radio 3 que se muestra en la figura 6.29. Aplique el teorema de Green para hallar el trabajo realizado por \mathbf{F} .

Solución Por el ejemplo 1 sabe, de acuerdo con el teorema de Green, que

$$\int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy = \iint_R 3x^2 dA.$$

En coordenadas polares, usando $x = r \cos \theta$ y $dA = r dr d\theta$ el trabajo realizado es

$$\begin{aligned} W &= \iint_R 3x^2 dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 3(r \cos \theta)^2 r dr d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^3 \cos^2 \theta dr d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \cos^2 \theta \right]_0^3 d\theta \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \frac{81}{4} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{243}{8} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{243}{8} \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{243\pi}{4}. \end{aligned}$$

Al evaluar integrales de línea sobre curvas cerradas, recuerde que en campos vectoriales conservativos (en los que $\partial N/\partial x = \partial M/\partial y$), el valor de la integral de línea es 0. Esto es fácil de ver a partir de lo establecido en el teorema de Green

$$\int_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = 0.$$

EJEMPLO 3 Teorema de Green y campos vectoriales conservativos

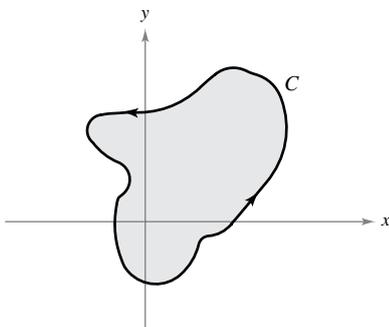
Evalúe la integral de línea

$$\int_C y^3 dx + 3xy^2 dy$$

donde C es la trayectoria que se muestra en la figura 6.30.

Solución A partir de esta integral de línea, $M = y^3$ y $N = 3xy^2$. Así que, $\partial N/\partial x = 3y^2$ y $\partial M/\partial y = 3y^2$. Esto implica que el campo vectorial $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es conservativo, y como C es cerrada, puede concluir que

$$\int_C y^3 dx + 3xy^2 dy = 0.$$

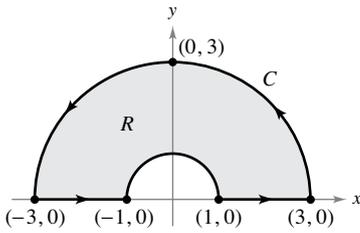


C es cerrada.

Figura 6.30

EJEMPLO 4 Aplicar el teorema de Green

•••► Consulte *LarsonCalculus.com* para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.



C es suave por partes.

Figura 6.31

Evalúe

$$\int_C (\arctan x + y^2) dx + (e^y - x^2) dy$$

donde C es la trayectoria que encierra la región anular que se muestra en la figura 6.31.

Solución En coordenadas polares, R está dada por $1 \leq r \leq 3$ para $0 \leq \theta \leq \pi$. Además

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = -2x - 2y = -2(r \cos \theta + r \sin \theta).$$

Así, por el teorema de Green,

$$\begin{aligned} \int_C (\arctan x + y^2) dx + (e^y - x^2) dy &= \iint_R -2(x + y) dA \\ &= \int_0^\pi \int_1^3 -2r(\cos \theta + \sin \theta)r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi -2(\cos \theta + \sin \theta) \frac{r^3}{3} \Big|_1^3 d\theta \\ &= \int_0^\pi \left(-\frac{52}{3}\right)(\cos \theta + \sin \theta) d\theta \\ &= -\frac{52}{3} \left[\sin \theta - \cos \theta \right]_0^\pi \\ &= -\frac{104}{3}. \end{aligned}$$

En los ejemplos 1, 2 y 4, el teorema de Green se utilizó para evaluar integrales de línea como integrales dobles. También puede utilizar el teorema para evaluar integrales dobles como integrales de línea. Una aplicación útil se da cuando $\partial N/\partial x - \partial M/\partial y = 1$.

$$\begin{aligned} \int_C M dx + N dy &= \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_R 1 dA && \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1 \\ &= \text{Área de la región } R \end{aligned}$$

Entre las muchas opciones para M y N que satisfacen la condición establecida, la opción de

$$M = -\frac{y}{2} \quad \text{y} \quad N = \frac{x}{2}$$

genera la siguiente integral de línea para el área de la región R.

TEOREMA 6.9 Integral de línea para el área

Si R es una región plana acotada por una curva simple C, cerrada y suave por partes, orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj, entonces el área de R está dada por

$$A = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx.$$

EJEMPLO 5 Hallar el área mediante una integral de línea

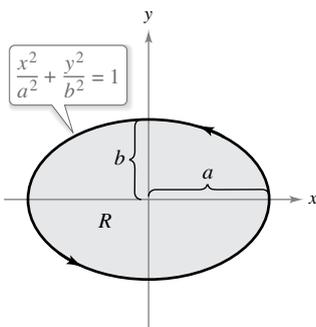


Figura 6.32

Use una integral de línea para hallar el área de la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$.

Solución Utilizando la figura 6.32, puede inducir a la trayectoria elíptica una orientación en sentido contrario a las manecillas del reloj haciendo $x = a \cos t$ y $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Por tanto, el área es

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_C x \, dy - y \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(a \cos t)(b \cos t) \, dt - (b \sin t)(-a \sin t) \, dt] \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) \, dt \\ &= \frac{ab}{2} \left[t \right]_0^{2\pi} \\ &= \pi ab. \end{aligned}$$

El teorema de Green puede extenderse para cubrir algunas regiones que no son simplemente conexas. Esto se demuestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 6 El teorema de Green extendido a una región con un orificio

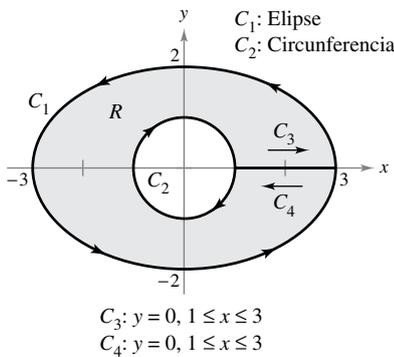


Figura 6.33

Sea R la región interior a la elipse $(x^2/9) + (y^2/4) = 1$ y exterior al círculo $x^2 + y^2 = 1$. Evalúe la integral de línea

$$\int_C 2xy \, dx + (x^2 + 2x) \, dy$$

donde $C = C_1 + C_2$ es la frontera de R , como se muestra en la figura 6.33.

Solución Para empezar, introduzca los segmentos de recta C_3 y C_4 como se muestra en la figura 6.33. Observe que como las curvas tienen orientaciones opuestas, las integrales de línea sobre ellas se cancelan entre sí. Además, puede aplicar el teorema de Green a la región R utilizando la frontera $C_1 + C_4 + C_2 + C_3$ para obtener

$$\begin{aligned} \int_C 2xy \, dx + (x^2 + 2x) \, dy &= \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_R (2x + 2 - 2x) dA \\ &= 2 \iint_R dA \\ &= 2(\text{área de } R) \\ &= 2(\pi ab - \pi r^2) \\ &= 2[\pi(3)(2) - \pi(1^2)] \\ &= 10\pi. \end{aligned}$$

En la sección 6.1 se estableció una condición necesaria y suficiente para campos vectoriales conservativos. Ahí sólo se presentó una dirección de la demostración. Ahora puede dar la otra dirección, usando el teorema de Green. Sea $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ definido en un disco abierto R . Usted quiere demostrar que si M y N tienen primeras derivadas parciales continuas y $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$, entonces \mathbf{F} es conservativo. Suponga que C es una trayectoria cerrada que forma la frontera de una región conexa contenida en R . Entonces, usando el hecho de que $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ puede aplicar el teorema de Green para concluir que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C M \, dx + N \, dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = 0.$$

Esto es, a su vez, equivalente a demostrar que \mathbf{F} es conservativo (vea el teorema 6.7).

Formas alternativas del teorema de Green

Esta sección concluye con la deducción de dos formulaciones vectoriales del teorema de Green para regiones en el plano. La extensión de estas formas vectoriales a tres dimensiones es la base del estudio en el resto de las secciones de este capítulo. Si \mathbf{F} es un campo vectorial en el plano, puede escribir

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

por lo que el rotacional de \mathbf{F} , como se describió en la sección 6.1, está dado por

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial N}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial M}{\partial z}\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Por consiguiente

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \left[-\frac{\partial N}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial M}{\partial z}\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k} \right] \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Con condiciones apropiadas sobre \mathbf{F} , C y R , puede escribir el teorema de Green en forma vectorial

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_R (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} dA. \end{aligned} \quad \text{Primera forma alternativa}$$

La extensión de esta forma vectorial del teorema de Green a superficies en el espacio da lugar al **teorema de Stokes**, que se estudia en la sección 6.9.

Para la segunda forma vectorial del teorema de Green, suponga las mismas condiciones sobre \mathbf{F} , C y R . Utilizando el parámetro longitud de arco s para C , tiene $\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}$. Por tanto, un vector unitario tangente \mathbf{T} a la curva C está dado por $\mathbf{r}'(s) = \mathbf{T} = x'(s)\mathbf{i} + y'(s)\mathbf{j}$. En la figura 6.34 puede ver que el vector unitario normal *hacia fuera* \mathbf{N} puede entonces escribirse como

$$\mathbf{N} = y'(s)\mathbf{i} - x'(s)\mathbf{j}.$$

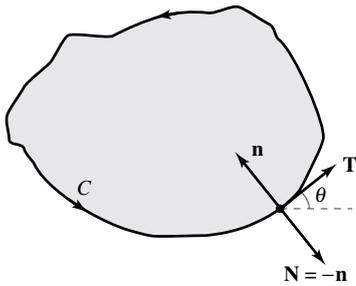
Por consiguiente, para $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ se puede aplicar el teorema de Green para obtener

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} ds &= \int_a^b (M\mathbf{i} + N\mathbf{j}) \cdot (y'(s)\mathbf{i} - x'(s)\mathbf{j}) ds \\ &= \int_a^b \left(M \frac{dy}{ds} - N \frac{dx}{ds} \right) ds \\ &= \int_C M dy - N dx \\ &= \int_C -N dx + M dy \\ &= \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dA \quad \text{Teorema de Green} \\ &= \iint_R \text{div } \mathbf{F} dA. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} ds = \iint_R \text{div } \mathbf{F} dA. \quad \text{Segunda forma alternativa}$$

Una generalización de esta forma a tres dimensiones se llama **teorema de la divergencia**, discutido en la sección 6.8. En las secciones 6.8 y 6.9 se analizarán las interpretaciones físicas de divergencia y del rotacional.



$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \cos \theta \mathbf{i} + \text{sen } \theta \mathbf{j} \\ \mathbf{n} &= \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{i} + \text{sen} \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{j} \\ &= -\text{sen } \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} \\ \mathbf{N} &= \text{sen } \theta \mathbf{i} - \cos \theta \mathbf{j} \end{aligned}$$

Figura 6.34

6.5 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Verificación del teorema de Green En los ejercicios 1 a 4, compruebe el teorema de Green evaluando ambas integrales

$$\int_C y^2 dx + x^2 dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

para la trayectoria dada.

1. C : frontera de la región que yace entre las gráficas de $y = x$ y $y = x^2$.
2. C : frontera de la región que yace entre las gráficas de $y = x$ y $y = \sqrt{x}$.
3. C : cuadrado con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$
4. C : rectángulo con vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 4)$, $(0, 4)$

 **Verificar el teorema de Green** En los ejercicios 5 y 6, compruebe el teorema de Green utilizando un sistema algebraico por computadora y evalúe ambas integrales

$$\int_C xe^y dx + e^x dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

sobre la trayectoria dada.

5. C : circunferencia dada por $x^2 + y^2 = 4$
6. C : frontera de la región comprendida entre las gráficas de $y = x$ y $y = x^3$ en el primer cuadrante

Evaluar una integral de línea utilizando el teorema de Green En los ejercicios 7 a 10, utilice el teorema de Green para evaluar la integral

$$\int_C (y - x) dx + (2x - y) dy$$

sobre la trayectoria dada.

7. C : frontera de la región comprendida entre las gráficas de $y = x$ y $y = x^2 - 2x$
8. C : $x = 2 \cos \theta$, $y = \sin \theta$
9. C : frontera de la región interior al rectángulo acotado por $x = -5$, $x = 5$, $y = -3$ y $y = 3$, y exterior al cuadrado acotado por $x = -1$, $x = 1$, $y = -1$ y $y = 1$.
10. C : frontera de la región interior al semicírculo $y = \sqrt{25 - x^2}$ y exterior al semicírculo $y = \sqrt{9 - x^2}$

Evaluar una integral de línea usando el teorema de Green En los ejercicios 11 a 20, utilice el teorema de Green para evaluar la integral de línea.

$$11. \int_C 2xy dx + (x + y) dy$$

C : frontera de la región comprendida entre las gráficas de, $y = 0$ y $y = 1 - x^2$

$$12. \int_C y^2 dx + xy dy$$

C : frontera de la región comprendida entre las gráficas de, $y = 0$, $y = \sqrt{x}$ y $x = 9$

$$13. \int_C (x^2 - y^2) dx + 2xy dy \quad 14. \int_C (x^2 - y^2) dx + 2xy dy$$

$$C: x^2 + y^2 = 16$$

$$C: r = 1 + \cos \theta$$

$$15. \int_C e^x \cos 2y dx - 2e^x \sin 2y dy$$

$$C: x^2 + y^2 = a^2$$

$$16. \int_C 2 \arctan \frac{y}{x} dx + \ln(x^2 + y^2) dy$$

$$C: x = 4 + 2 \cos \theta, y = 4 + \sin \theta$$

$$17. \int_C \cos y dx + (xy - x \sin y) dy$$

C : frontera de la región comprendida entre las gráficas de, $y = x$ y $y = \sqrt{x}$

$$18. \int_C (e^{-x^2/2} - y) dx + (e^{-y^2/2} + x) dy$$

C : frontera de la región comprendida entre las gráficas de la circunferencia, $x = 6 \cos \theta$, $y = 6 \sin \theta$ y la elipse, $x = 3 \cos \theta$, $y = 2 \sin \theta$

$$19. \int_C (x - 3y) dx + (x + y) dy$$

C : frontera de la región comprendida entre las gráficas de $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$

$$20. \int_C 3x^2 e^y dx + e^y dy$$

C : frontera de la región comprendida entre los cuadrados con vértices $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ y $(1, -1)$ y $(2, 2)$, $(-2, 2)$, $(-2, -2)$ y $(2, -2)$

Trabajo En los ejercicios 21 a 24, utilice el teorema de Green para calcular el trabajo realizado por la fuerza F sobre una partícula que se mueve, en sentido contrario a las manecillas del reloj, por la trayectoria cerrada C .

$$21. F(x, y) = xy\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$$

$$C: x^2 + y^2 = 1$$

$$22. F(x, y) = (e^x - 3y)\mathbf{i} + (e^y + 6x)\mathbf{j}$$

$$C: r = 2 \cos \theta$$

$$23. F(x, y) = (x^{3/2} - 3y)\mathbf{i} + (6x + 5\sqrt{y})\mathbf{j}$$

C : frontera del triángulo con vértices, $(0, 0)$, $(5, 0)$ y $(0, 5)$

$$24. F(x, y) = (3x^2 + y)\mathbf{i} + 4xy^2\mathbf{j}$$

C : frontera de la región comprendida entre las gráficas de $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 9$

Área En los ejercicios 25 a 28, utilice una integral de línea para hallar el área de la región R .

$$25. R: \text{región acotada por la gráfica de } x^2 + y^2 = a^2$$

$$26. R: \text{triángulo acotado por las gráficas de } x = 0, 3x - 2y = 0 \text{ y } x + 2y = 8$$

27. R : región acotada por la gráfica de $y = 5x - 3$ y $y = x^2 + 1$
 28. R : región interior al lazo de la hoja o folio de Descartes acotada por la gráfica de

$$x = \frac{3t}{t^3 + 1}, \quad y = \frac{3t^2}{t^3 + 1}$$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

29. **Teorema de Green** Enuncie el teorema de Green.

30. **Área** Dé la integral de línea para el área de una región R acotada por una curva simple suave por partes C .

Usar el teorema de Green para comprobar una fórmula
 En los ejercicios 31 y 32, utilice el teorema de Green para verificar las fórmulas de las integrales de línea.

31. La centroide de una región de área A acotada por una trayectoria simple cerrada C es

$$\bar{x} = \frac{1}{2A} \int_C x^2 dy, \quad \bar{y} = -\frac{1}{2A} \int_C y^2 dx.$$

32. El área de una región plana acotada por la trayectoria simple cerrada C dada en coordenadas polares es

$$A = \frac{1}{2} \int_C r^2 d\theta.$$

Centroide En los ejercicios 33 a 36, utilice un sistema algebraico por computadora y los resultados del ejercicio 31 para hallar el centroide de la región.

33. R : región acotada por las gráficas de $y = 0$ y $y = 4 - x^2$
 34. R : región acotada por las gráficas de $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ y $y = 0$
 35. R : región acotada por las gráficas de $y = x^3$ y $y = x, 0 \leq x \leq 1$
 36. R : triángulo cuyos vértices son $(-a, 0), (a, 0)$ y (b, c) , donde $-a \leq b \leq a$

Área En los ejercicios 37 a 40, utilice los resultados del ejercicio 32 para hallar el área de la región acotada por la gráfica de la ecuación polar

37. $r = a(1 - \cos \theta)$
 38. $r = a \cos 3\theta$
 39. $r = 1 + 2 \cos \theta$ (lazo interior)
 40. $r = \frac{3}{2 - \cos \theta}$

41. Valor máximo

(a) Evalúe $\int_{C_1} y^3 dx + (27x - x^3) dy$,

donde C_1 es el círculo unitario dado por $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}$, para $0 \leq t \leq 2\pi$.

(b) Determine el valor máximo de $\int_C y^3 dx + (27x - x^3) dy$, donde C es cualquier curva cerrada en el plano xy , orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj.

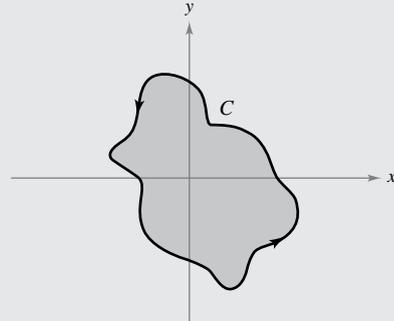


42.

¿CÓMO LO VE? Utilice el teorema de Green para explicar por qué

$$\int_C f(x) dx + g(y) dy = 0$$

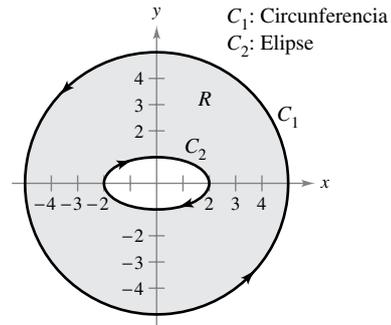
donde f y g son funciones derivables y C es una trayectoria cerrada simple suave por partes (vea la figura).



43. **Teorema de Green: región con un agujero** Sea R la región dentro del círculo $x = 5 \cos \theta, y = 5 \sin \theta$ y fuera de la elipse $x = 2 \cos \theta, y = \sin \theta$. Evalúe la integral de línea

$$\int_C (e^{-x^2/2} - y) dx + (e^{-y^2/2} + x) dy$$

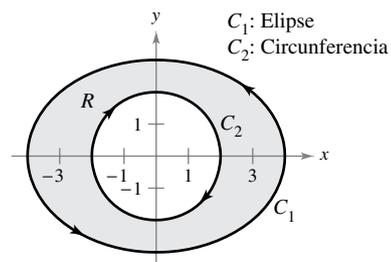
donde $C = C_1 + C_2$ es la frontera de R , como se muestra en la figura.



44. **Teorema de Green: región con un agujero** Sea R la región dentro de la elipse $x = 4 \cos \theta, y = 3 \sin \theta$ y fuera del círculo $x = 2 \cos \theta, y = 2 \sin \theta$. Evalúe la integral de línea

$$\int_C (3x^2y + 1) dx + (x^3 + 4x) dy$$

donde $C = C_1 + C_2$ es la frontera de R , como se muestra en la figura.



45. **Piénselo** Sea

$$I = \int_C \frac{y \, dx - x \, dy}{x^2 + y^2}$$

donde C es una circunferencia orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Demuestre que $I = 0$ si C no contiene al origen. ¿Cuál es el valor de I si C contiene al origen?

46. **Piénselo** Para cada trayectoria dada, compruebe el teorema de Green demostrando que

$$\int_C y^2 \, dx + x^2 \, dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA.$$

Para cada trayectoria, ¿cuál es la integral más fácil de evaluar? Explique.

- (a) C : triángulo con vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$ y $(4, 4)$
- (b) C : circunferencia dada por $x^2 + y^2 = 1$

47. **Demostración**

- (a) Sea C el segmento de recta que une (x_1, y_1) y (x_2, y_2) . Demuestre que $\int_C -y \, dx + x \, dy = x_2 y_2 - x_2 y_1$.
- (b) Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ los vértices de un polígono. Demuestre que el área encerrada es

$$\frac{1}{2} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \dots + (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}) + (x_n y_1 - x_1 y_n)].$$

48. **Área** Utilice el resultado del ejercicio 47(b) para hallar el área encerrada por el polígono cuyos vértices se dan.

- (a) Pentágono: $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 2)$, $(1, 4)$ y $(-1, 1)$
- (b) Hexágono: $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 2)$, $(2, 4)$, $(0, 3)$ y $(-1, 1)$

Demostración En los ejercicios 49 y 50, demuestre la identidad, donde R es una región simplemente conexa con frontera C . Suponga que las derivadas parciales requeridas de las funciones escalares f y g son continuas. Las expresiones $D_N f$ y $D_N g$ son las derivadas en la dirección del vector normal exterior \mathbf{N} de C y se definen por $D_N f = \nabla f \cdot \mathbf{N}$ y $D_N g = \nabla g \cdot \mathbf{N}$.

49. Primera identidad de Green

$$\iint_R (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dA = \int_C f D_N g \, ds$$

[Sugerencia: Utilice la segunda forma alternativa del teorema de Green y la propiedad $\text{div}(f\mathbf{G}) = f \text{div } \mathbf{G} + \nabla f \cdot \mathbf{G}$.]

50. Segunda identidad de Green

$$\iint_R (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) \, dA = \int_C (f D_N g - g D_N f) \, ds$$

[Sugerencia: Utilice la primera identidad de Green, dada en el ejercicio 49, dos veces.]

51. **Demostración** Sea $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$, donde M y N tienen primeras derivadas parciales continuas en una región simplemente conexa R . Demuestre que si C es cerrada, simple y suave, y $N_x = M_y$, entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM

52. Determine la mínima área posible de un conjunto convexo en el plano que interseca ambas ramas de la hipérbola $xy = 1$ y ambas ramas de la hipérbola $xy = -1$. (Un conjunto S en el plano se llama convexo si para cualesquiera dos puntos en S el segmento de recta que los conecta está contenido en S .)

Estos problemas fueron preparados por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

PROYECTO DE TRABAJO

Funciones hiperbólicas y trigonométricas

- (a) Dibuje la curva plana representada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \cosh t \mathbf{i} + \sinh t \mathbf{j}$ en el intervalo $0 \leq t \leq 5$. Demuestre que la ecuación rectangular que corresponde a $\mathbf{r}(t)$ es la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$. Compruebe el dibujo utilizando una herramienta de graficación para representar la hipérbola.
- (b) Sea $P = (\cosh \phi, \sinh \phi)$ el punto de la hipérbola correspondiente a $\mathbf{r}(\phi)$ para $\phi > 0$. Utilice la fórmula para el área

$$A = \frac{1}{2} \int_C x \, dy - y \, dx$$

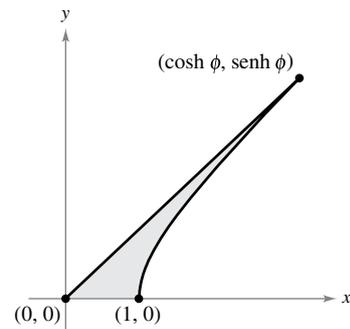
para comprobar que el área de la región que se muestra en la figura es $\frac{1}{2}\phi$.

(c) Demuestre que el área de la región indicada está dada por la integral

$$A = \int_0^{\sinh \phi} [\sqrt{1 + y^2} - (\coth \phi)y] \, dy.$$

Confirme su respuesta para la parte (b) por aproximación numérica de la integral para $\phi = 1, 2, 4$ y 10 .

- (d) Considere la circunferencia unitaria dada por $x^2 + y^2 = 1$. Sea θ el ángulo formado por el eje x y el radio a (x, y) . El área del sector correspondiente es $\frac{1}{2}\theta$. Es decir, las funciones trigonométricas $f(\theta) = \cos \theta$ y $g(\theta) = \sin \theta$ podrían haber sido definidas como las coordenadas del punto en el círculo unitario que determina un sector de área $\frac{1}{2}\theta$. Escriba un párrafo breve explicando cómo definir las funciones hiperbólicas de una manera similar, utilizando la “hipérbola unitaria” $x^2 - y^2 = 1$.



6.6 Superficies paramétricas

- Comprender la definición y esbozar la gráfica de una superficie paramétrica.
- Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para representar una superficie.
- Hallar un vector normal y un plano tangente a una superficie paramétrica.
- Hallar el área de una superficie paramétrica.

Superficies paramétricas

Ya sabe representar una curva en el plano o en el espacio mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas o, de forma equivalente, por una función vectorial.

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad \text{Curva en el plano}$$

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad \text{Curva en el espacio}$$

En esta sección aprenderá a representar una superficie en el espacio mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas o mediante una función vectorial. Observe que en el caso de las curvas, la función vectorial \mathbf{r} es función de *un solo* parámetro t . En el caso de las superficies, la función vectorial es función de *dos* parámetros u y v .

Definición de superficie paramétrica

Sean x, y y z funciones de u y v , continuas en un dominio D del plano uv . Al conjunto de puntos x, y, z dado por

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad \text{Superficie paramétrica}$$

se le llama una **superficie paramétrica**. Las ecuaciones

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad \text{y} \quad z = z(u, v) \quad \text{Ecuaciones paramétricas}$$

son las **ecuaciones paramétricas** para la superficie.

Si S es una superficie paramétrica dada por la función vectorial \mathbf{r} , entonces S es trazada por el vector posición $\mathbf{r}(u, v)$ a medida que el punto (u, v) se mueve por el dominio D , como se indica en la figura 6.35.

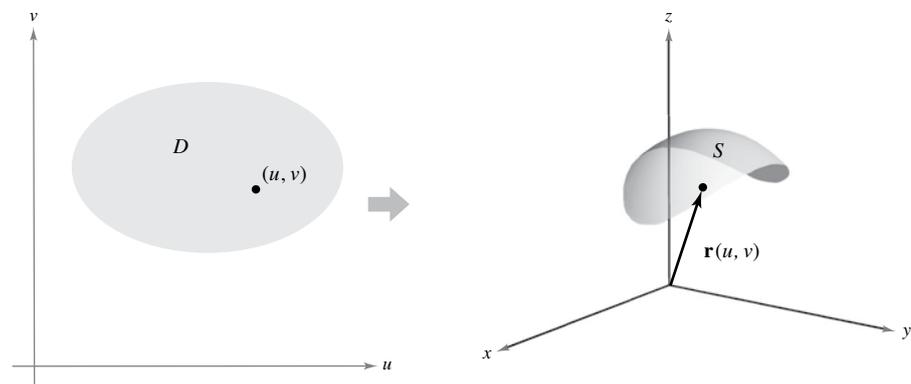


Figura 6.35

- ▷ **TECNOLOGÍA** Algunos sistemas algebraicos por computadora dibujan superficies paramétricas. Si tiene acceso a este tipo de software, utilícelo para representar gráficamente algunas de las superficies de los ejemplos y ejercicios de esta sección.

EJEMPLO 1

Trazar una superficie paramétrica

Identifique y dibuje la superficie paramétrica S dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = 3 \cos u \mathbf{i} + 3 \operatorname{sen} u \mathbf{j} + v \mathbf{k}$$

donde $0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq 4$.

Solución Dado que $x = 3 \cos u$ y $y = 3 \operatorname{sen} u$, sabe que en cada punto (x, y, z) de la superficie, x y y están relacionados mediante la ecuación

$$x^2 + y^2 = 3^2.$$

En otras palabras, cada sección transversal de S , paralela al plano xy , es una circunferencia de radio 3, centrada en el eje z . Como $z = v$, donde

$$0 \leq v \leq 4$$

puede ver que la superficie es un cilindro circular recto de altura 4. El radio del cilindro es 3, y el eje z forma el eje del cilindro, como se muestra en la figura 6.36.

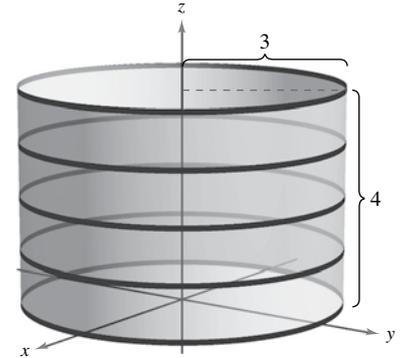


Figura 6.36

Como ocurre con las representaciones paramétricas de curvas, las representaciones paramétricas de superficies no son únicas. Es decir, hay muchos conjuntos de ecuaciones paramétricas que podrían usarse para representar la superficie que se muestra en la figura 6.36.

EJEMPLO 2

Trazar una superficie paramétrica

Identifique y dibuje una superficie paramétrica S dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = \operatorname{sen} u \cos v \mathbf{i} + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \mathbf{j} + \cos u \mathbf{k}$$

donde $0 \leq u \leq \pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.

Solución Para identificar la superficie, puede tratar de emplear identidades trigonométricas para eliminar los parámetros. Después de experimentar un poco, descubre que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (\operatorname{sen} u \cos v)^2 + (\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v)^2 + (\cos u)^2 \\ &= \operatorname{sen}^2 u \cos^2 v + \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^2 v + \cos^2 u \\ &= \operatorname{sen}^2 u (\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) + \cos^2 u \\ &= \operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u \\ &= 1. \end{aligned}$$

Así pues, cada punto en S se encuentra en la esfera unitaria o esfera unidad, centrada en el origen, como se muestra en la figura 6.37. Para una $u = d_i$, $\mathbf{r}(u, v)$ fija, trace las circunferencias de latitud

$$x^2 + y^2 = \operatorname{sen}^2 d_i, \quad 0 \leq d_i \leq \pi$$

que son paralelas al plano xy , y para una $v = c_i$, $\mathbf{r}(u, v)$ fija, trace semicírculos de longitud o meridianos.

Para convencerse de que $\mathbf{r}(u, v)$, trace toda la esfera unitaria, recordando que las ecuaciones paramétricas

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \quad y \quad z = \rho \cos \phi$$

donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq \pi$, describen la conversión de coordenadas esféricas a coordenadas rectangulares, como se vio en la sección 5.7.

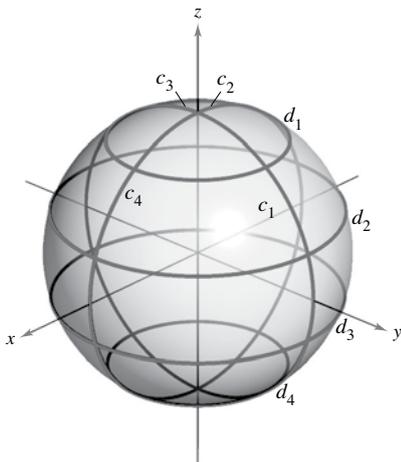


Figura 6.37

Ecuaciones paramétricas para superficies

En los ejemplos 1 y 2 se le pidió identificar la superficie descrita por un conjunto dado de ecuaciones paramétricas. El problema inverso, el de asignar un conjunto de ecuaciones paramétricas a una superficie dada, es generalmente más difícil. Sin embargo, un tipo de superficie para la que este problema es sencillo, es una superficie dada por $z = f(x, y)$. Tal superficie la puede parametrizar como

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}.$$

EJEMPLO 3 Representar una superficie paraméricamente

Dé un conjunto de ecuaciones paramétricas para el cono dado por

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

como el que se muestra en la figura 6.38.

Solución Como esta superficie está dada en la forma $z = f(x, y)$, puede tomar x y y como parámetros. Entonces el cono se representa por la función vectorial

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{k}$$

donde (x, y) varía sobre todo el plano xy .

Un segundo tipo de superficie fácil de representar paraméricamente es una superficie de revolución. Por ejemplo, para representar la superficie generada por revolución de la gráfica de

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

en torno al eje x , utilice

$$x = u, \quad y = f(u) \cos v \quad y \quad z = f(u) \sin v$$

donde $a \leq u \leq b$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.

EJEMPLO 4 Representar una superficie de revolución paraméricamente

... ▶ Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Escriba un conjunto de ecuaciones paramétricas para la superficie de revolución obtenida al hacer girar

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad 1 \leq x \leq 10$$

en torno al eje x .

Solución Utilice los parámetros u y v como se describió antes para obtener

$$x = u, \quad y = f(u) \cos v = \frac{1}{u} \cos v \quad y \quad z = f(u) \sin v = \frac{1}{u} \sin v$$

donde

$$1 \leq u \leq 10 \quad y \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

La superficie resultante es una porción de la *trompeta de Gabriel*, como se muestra en la figura 6.39.

La superficie de revolución del ejemplo se forma haciendo girar la gráfica de $y = f(x)$ en torno al eje x . Para otros tipos de superficies de revolución, puede usarse una parametrización similar. Por ejemplo, para parametrizar la superficie formada por revolución de la gráfica de $x = f(z)$ en torno al eje z , puede usar

$$z = u, \quad x = f(u) \cos v \quad y \quad y = f(u) \sin v.$$

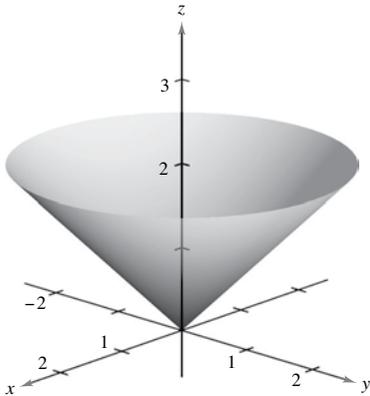


Figura 6.38

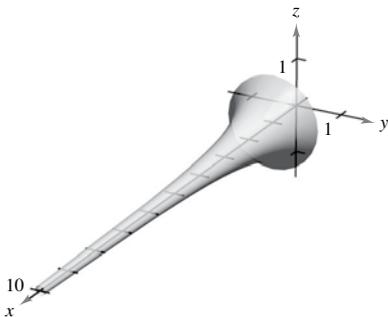


Figura 6.39

Vectores normales y planos tangentes

Sea S una superficie paramétrica dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

sobre una región abierta D tal que x , y y z tienen derivadas parciales continuas en D . Las **derivadas parciales de \mathbf{r}** respecto a u y v están definidas como

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u, v)\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u, v)\mathbf{k}.$$

Cada una de estas derivadas parciales es una función vectorial que puede interpretarse geoméricamente en términos de vectores tangentes. Por ejemplo, si $v = v_0$ se mantiene constante, entonces $\mathbf{r}(u, v_0)$ es una función vectorial de un solo parámetro y define una curva que se encuentra en la superficie S . El vector tangente a C_1 en el punto

$$(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$$

está dado por

$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{k}$$

como se muestra en la figura 6.40. De manera similar, si $u = u_0$ se mantiene constante, entonces $\mathbf{r}(u_0, v)$ es una función vectorial de un solo parámetro y define una curva C_2 que se encuentra en la superficie S . El vector tangente a C_2 en el punto $(x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v))$ está dado por

$$\mathbf{r}_v(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{k}.$$

Si el vector normal $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ no es $\mathbf{0}$ para todo (u, v) en D , entonces se dice que la superficie es **suave** y tendrá un plano tangente. De manera informal, una superficie suave es una superficie que no tiene puntos angulosos o cúspides. Por ejemplo, esferas, elipsoides y paraboloides son suaves, mientras que el cono del ejemplo 3 no es suave.

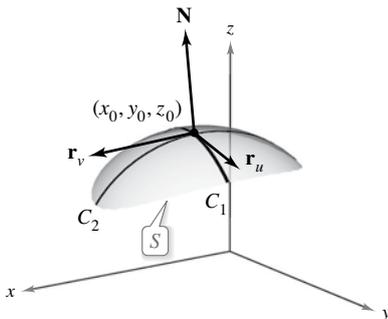


Figura 6.40

Vector normal a una superficie paramétrica suave

Sea S una superficie paramétrica suave

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

definida sobre una región abierta D en el plano uv . Sea (u_0, v_0) un punto en D . Un vector normal en el punto

$$(x_0, y_0, z_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$$

está dado por

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

La figura 6.40 muestra el vector normal $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$. El vector $\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u$ también es normal a S y apunta en la dirección opuesta.

EJEMPLO 5 Hallar un plano tangente a una superficie paramétrica

Encuentre una ecuación para el plano tangente al paraboloides dado por

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u^2 + v^2)\mathbf{k}$$

en el punto (1, 2, 5).

Solución El punto en el plano uv que es llevado al punto $(x, y, z) = (1, 2, 5)$ es $(u, v) = (1, 2)$. Así, derivadas parciales de \mathbf{r} son

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{i} + 2u\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_v = \mathbf{j} + 2v\mathbf{k}.$$

El vector normal está dado por

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = -2u\mathbf{i} - 2v\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

lo que implica que el vector normal en (1, 2, 5) es

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Por tanto, una ecuación del plano tangente en (1, 2, 5) es

$$\begin{aligned} -2(x - 1) - 4(y - 2) + (z - 5) &= 0 \\ -2x - 4y + z &= -5. \end{aligned}$$

El plano tangente se muestra en la figura 6.41.

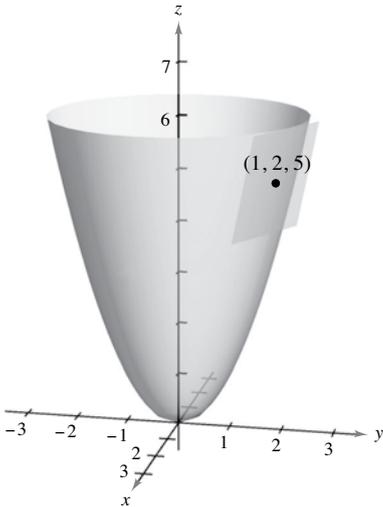


Figura 6.41

Área de una superficie paramétrica

Para definir el área de una superficie paramétrica, puede usar un desarrollo similar al dado en la sección 5.5. Para empezar construya una partición interna de D que consiste en n rectángulos, donde el área del rectángulo i -ésimo D_i es $\Delta A_i = \Delta u_i \Delta v_i$, como se muestra en la figura 6.42. En cada D_i sea (u_i, v_i) el punto más cercano al origen. En el punto $(x_i, y_i, z_i) = (x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i))$ de la superficie S , construya un plano tangente T_i . El área de la porción en que corresponde a D_i , ΔT_i puede ser aproximada por un paralelogramo en el plano tangente. Es decir, $\Delta T_i \approx \Delta S_i$. Por tanto, la superficie de S está dada por $\Sigma \Delta S_i \approx \Sigma \Delta T_i$. El área del paralelogramo en el plano tangente es

$$\|\Delta u_i \mathbf{r}_u \times \Delta v_i \mathbf{r}_v\| = \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \Delta u_i \Delta v_i$$

lo cual conduce a la definición siguiente.

Área de una superficie paramétrica

Sea S una superficie paramétrica suave

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

definida sobre una región abierta D en el plano uv . Si cada punto de la superficie S corresponde exactamente a un punto del dominio D , entonces el **área de la superficie** de S está dada por

$$\text{Área de la superficie} = \iint_S dS = \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dA$$

donde

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k} \quad \text{and} \quad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}.$$

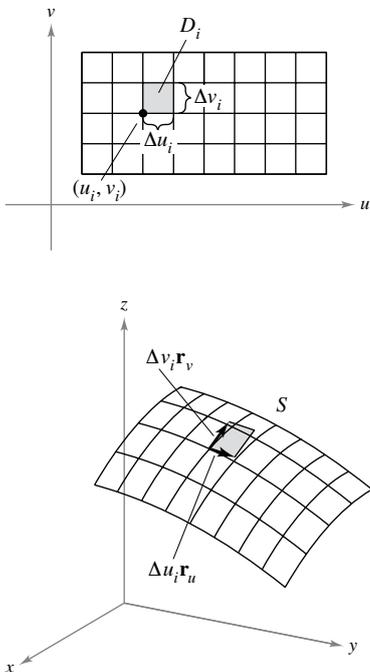


Figura 6.42

Para una superficie S dada por $z = f(x, y)$ esta fórmula para el área de la superficie corresponde a la dada en la sección 5.5. Para ver esto, puede parametrizar la superficie utilizando la función vectorial

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}$$

definida sobre la región R en el plano xy . Utilizando

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + f_x(x, y)\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + f_y(x, y)\mathbf{k}$$

se tiene

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x(x, y) \\ 0 & 1 & f_y(x, y) \end{vmatrix} = -f_x(x, y)\mathbf{i} - f_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

y

$$\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| = \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}.$$

Esto implica que el área de la superficie de S es

$$\begin{aligned} \text{Área de la superficie} &= \iint_R \|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| \, dA \\ &= \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} \, dA. \end{aligned}$$



EJEMPLO 6

Hallar el área de una superficie

COMENTARIO La superficie del ejemplo 6 no satisface totalmente la hipótesis de que cada punto de la superficie corresponde exactamente a un punto de D . Para esta superficie, $\mathbf{r}(u, 0) = \mathbf{r}(u, 2\pi)$ para todo valor u . Sin embargo, como el traslape consiste sólo en un semi-círculo que no tiene área, puede aplicar la fórmula para el área de una superficie paramétrica.

Encuentre el área de la superficie de la esfera unitaria dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = \sen u \cos v \mathbf{i} + \sen u \sen v \mathbf{j} + \cos u \mathbf{k}$$

donde el dominio D está dado por $0 \leq u \leq \pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.

Solución Para empezar, calcule \mathbf{r}_u y \mathbf{r}_v .

$$\mathbf{r}_u = \cos u \cos v \mathbf{i} + \cos u \sen v \mathbf{j} - \sen u \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = -\sen u \sen v \mathbf{i} + \sen u \cos v \mathbf{j}$$

El producto vectorial de estos dos vectores es

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos u \cos v & \cos u \sen v & -\sen u \\ -\sen u \sen v & \sen u \cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= \sen^2 u \cos v \mathbf{i} + \sen^2 u \sen v \mathbf{j} + \sen u \cos u \mathbf{k} \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| &= \sqrt{(\sen^2 u \cos v)^2 + (\sen^2 u \sen v)^2 + (\sen u \cos u)^2} \\ &= \sqrt{\sen^4 u + \sen^2 u \cos^2 u} \\ &= \sqrt{\sen^2 u} \\ &= \sen u. \quad \text{sen } u > 0 \text{ para } 0 \leq u \leq \pi \end{aligned}$$

Por último, el área de la superficie de la esfera es

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sen u \, du \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} 2 \, dv \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$



EJEMPLO 7 Hallar el área de una superficie

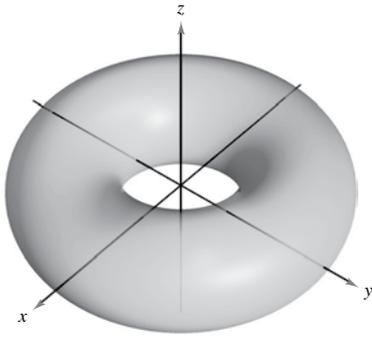


Figura 6.43

Encuentre el área de la superficie del toro dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = (2 + \cos u) \cos v \mathbf{i} + (2 + \cos u) \sin v \mathbf{j} + \sin u \mathbf{k}$$

donde el dominio D está dado por $0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. (Vea la figura 6.43.)

Solución Para empezar, calcule \mathbf{r}_u y \mathbf{r}_v

$$\mathbf{r}_u = -\sin u \cos v \mathbf{i} - \sin u \sin v \mathbf{j} + \cos u \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = -(2 + \cos u) \sin v \mathbf{i} + (2 + \cos u) \cos v \mathbf{j}$$

El producto vectorial de estos dos vectores es

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin u \cos v & -\sin u \sin v & \cos u \\ -(2 + \cos u) \sin v & (2 + \cos u) \cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= -(2 + \cos u)(\cos v \cos u \mathbf{i} + \sin v \cos u \mathbf{j} + \sin u \mathbf{k}) \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| &= (2 + \cos u) \sqrt{(\cos v \cos u)^2 + (\sin v \cos u)^2 + \sin^2 u} \\ &= (2 + \cos u) \sqrt{\cos^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + \sin^2 u} \\ &= (2 + \cos u) \sqrt{\cos^2 u + \sin^2 u} \\ &= 2 + \cos u. \end{aligned}$$

Por último, el área de la superficie del toro es

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (2 + \cos u) \, du \, dv \\ &= \int_0^{2\pi} 4\pi \, dv \\ &= 8\pi^2. \end{aligned}$$

Exploración

Para el toro del ejemplo 7, describa la función $\mathbf{r}(u, v)$ para u fijo. Después, describa la función para $\mathbf{r}(u, v)$ para v fijo.

Si la superficie es una superficie de revolución, puede demostrar que la fórmula para el área de la superficie, conocida, es equivalente a la fórmula dada en esta sección. Por ejemplo, suponga que f sea una función no negativa tal que f' sea continua sobre el intervalo $[a, b]$. Sea S la superficie de revolución formada por revolución de la gráfica de f donde $a \leq x \leq b$, en torno al eje x . Se sabe que el área de la superficie está dada por

$$\text{Área de la superficie} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx.$$

Para representar S paramétricamente sea

$$x = u, \quad y = f(u) \cos v \quad y \quad z = f(u) \sin v$$

donde $a \leq u \leq b$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. Entonces

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + f(u) \cos v \mathbf{j} + f(u) \sin v \mathbf{k}.$$

Intente demostrar que la fórmula

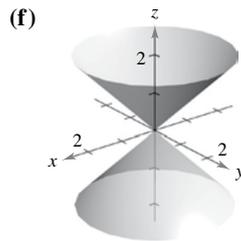
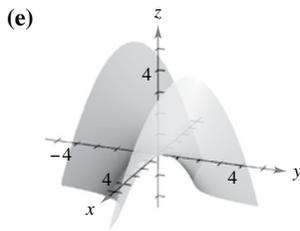
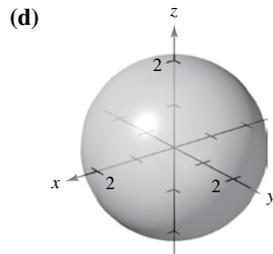
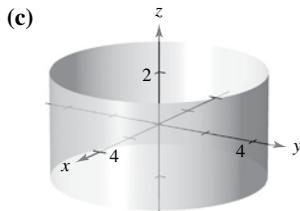
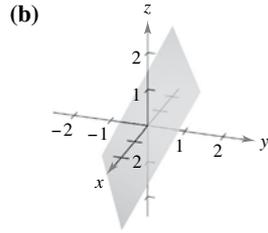
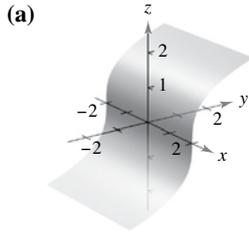
$$\text{Área de la superficie} = \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, dA$$

es equivalente a la fórmula dada arriba (vea el ejercicio 58).

6.6 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Relacionar En los ejercicios 1 a 6, relacione la función vectorial con su gráfica. [Las gráficas están marcadas (a), (b), (c), (d), (e) y (f).]



- $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + uv\mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + \frac{1}{2}(u + v)\mathbf{j} + v\mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + \frac{1}{4}v^3\mathbf{j} + v\mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos v \cos u\mathbf{i} + 2 \cos v \sin u\mathbf{j} + 2 \sin v\mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(u, v) = 4 \cos u\mathbf{i} + 4 \sin u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$

Dibujar una superficie paramétrica En los ejercicios 7 a 10, encuentre la ecuación rectangular de la superficie por eliminación de los parámetros de la función vectorial. Identifique la superficie y dibuje su gráfica.

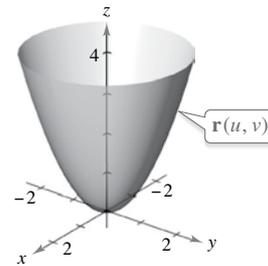
- $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \frac{v}{2}\mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(u, v) = 2u \cos v\mathbf{i} + 2u \sin v\mathbf{j} + \frac{1}{2}u^2\mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + 2 \sin u\mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(u, v) = 3 \cos v \cos u\mathbf{i} + 3 \cos v \sin u\mathbf{j} + 5 \sin v\mathbf{k}$

Trazar la gráfica de una superficie paramétrica En los ejercicios 11 a 16, utilice un sistema algebraico por computadora y represente gráficamente la superficie dada por la función vectorial.

- $\mathbf{r}(u, v) = 2u \cos v\mathbf{i} + 2u \sin v\mathbf{j} + u^4\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$

- $\mathbf{r}(u, v) = 2 \cos v \cos u\mathbf{i} + 4 \cos v \sin u\mathbf{j} + \sin v\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$
- $\mathbf{r}(u, v) = 2 \sinh u \cos v\mathbf{i} + \sinh u \sin v\mathbf{j} + \cosh u\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$
- $\mathbf{r}(u, v) = 2u \cos v\mathbf{i} + 2u \sin v\mathbf{j} + v\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 3\pi$
- $\mathbf{r}(u, v) = (u - \sin u) \cos v\mathbf{i} + (1 - \cos u) \sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$
- $\mathbf{r}(u, v) = \cos^3 u \cos v\mathbf{i} + \sin^3 u \sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$

Piénselo En los ejercicios 17 a 20, determine cómo la gráfica de la superficie $s(u, v)$ difiere de la gráfica de $s(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \sin v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$ (vea la figura), donde $0 \leq u \leq 2$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. (No es necesario representar a s gráficamente.)



- $s(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \sin v\mathbf{j} - u^2\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$
- $s(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u^2\mathbf{j} + u \sin v\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$
- $s(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \sin v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq 3, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$
- $s(u, v) = 4u \cos v\mathbf{i} + 4u \sin v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$

Representar una superficie en forma paramétrica En los ejercicios 21 a 30, encuentre una función vectorial cuya gráfica sea la superficie indicada.

- El plano $z = y$
- El plano $x + y + z = 6$
- El plano $y = \sqrt{4x^2 + 9z^2}$
- El cono $x = \sqrt{16y^2 + z^2}$
- El cilindro $x^2 + y^2 = 25$
- El cilindro $4x^2 + y^2 = 16$
- El cilindro $z = x^2$
- El elipsoide $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$

29. La parte del plano $z = 4$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 9$
 30. La parte del paraboloido $z = x^2 + y^2$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 9$

Superficie de revolución En los ejercicios 31 a 34, dé un conjunto de ecuaciones paramétricas para la superficie de revolución obtenida por revolución de la gráfica de la función en torno al eje dado.

Función	Eje de revolución
31. $y = \frac{x}{2}, 0 \leq x \leq 6$	Eje x
32. $y = \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 4$	Eje x
33. $x = \sin z, 0 \leq z \leq \pi$	Eje z
34. $z = y^2 + 1, 0 \leq y \leq 2$	Eje y

Plano tangente En los ejercicios 35 a 38, encuentre una ecuación para el plano tangente a la superficie dada por la función vectorial en el punto indicado.

35. $\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + v\mathbf{k}, (1, -1, 1)$

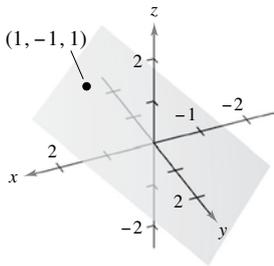


Figura para 35

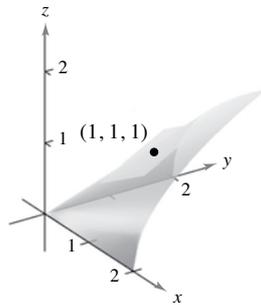
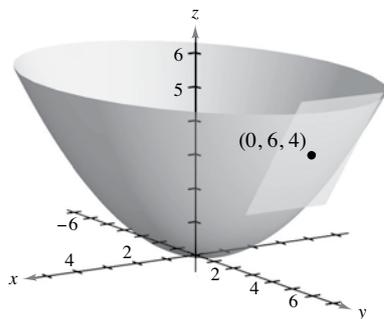
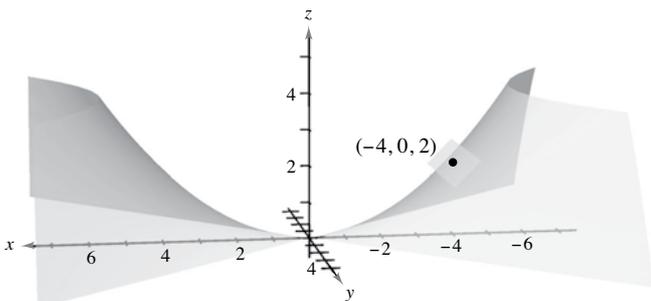


Figura para 36

36. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \sqrt{uv}\mathbf{k}, (1, 1, 1)$
 37. $\mathbf{r}(u, v) = 2u \cos v\mathbf{i} + 3u \sin v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}, (0, 6, 4)$



38. $\mathbf{r}(u, v) = 2u \cosh v\mathbf{i} + 2u \sinh v\mathbf{j} + \frac{1}{2}u^2\mathbf{k}, (-4, 0, 2)$



Área En los ejercicios 39 a 46, encuentre el área de la superficie sobre la región dada. Utilice un sistema algebraico por computadora para comprobar los resultados.

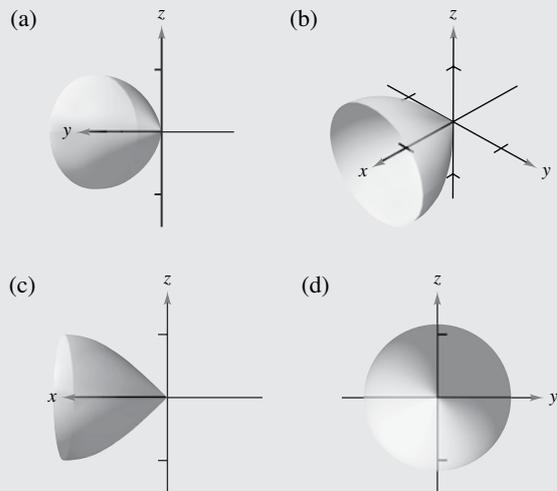
39. La parte del plano $\mathbf{r}(u, v) = 4u\mathbf{i} - v\mathbf{j} + v\mathbf{k}$, donde $0 \leq u \leq 2$ y $0 \leq v \leq 1$
 40. La parte del paraboloido $\mathbf{r}(u, v) = 2u \cos v\mathbf{i} + 2u \sin v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$, donde $0 \leq u \leq 2$ y $0 \leq v \leq 2\pi$
 41. La parte del cilindro $\mathbf{r}(u, v) = a \cos u\mathbf{i} + a \sin u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$, donde $0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq b$
 42. La esfera $\mathbf{r}(u, v) = a \sin u \cos v\mathbf{i} + a \sin u \sin v\mathbf{j} + a \cos u\mathbf{k}$, donde $0 \leq u \leq \pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$
 43. La parte del cono $\mathbf{r}(u, v) = au \cos v\mathbf{i} + au \sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, donde $0 \leq u \leq b$ y $0 \leq v \leq 2\pi$
 44. El toro $\mathbf{r}(u, v) = (a + b \cos v)\cos u\mathbf{i} + (a + b \cos v)\sin u\mathbf{j} + b \sin v\mathbf{k}$, donde $a > b, 0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$
 45. La superficie de revolución $\mathbf{r}(u, v) = \sqrt{u} \cos v\mathbf{i} + \sqrt{u} \sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, donde $0 \leq u \leq 4$ y $0 \leq v \leq 2\pi$
 46. La superficie de revolución $\mathbf{r}(u, v) = \sin u \cos v\mathbf{i} + u\mathbf{j} + \sin u \sin v\mathbf{k}$, donde $0 \leq u \leq \pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

47. **Superficie paramétrica** Defina una superficie paramétrica.
 48. **Área de una superficie** Dé la integral doble con la que se obtiene el área de la superficie de una superficie paramétrica sobre una región abierta D .
 49. **Representación paramétrica de un cono** Demuestre que se puede representar el cono del ejemplo 3 de manera paramétrica mediante $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \sin v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, donde $0 \leq u$ y $0 \leq v \leq 2\pi$



¿CÓMO LO VE? Las figuras que se muestran a continuación son las gráficas de $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + \sin u \cos v\mathbf{j} + \sin u \sin v\mathbf{k}$, donde $0 \leq u \leq \pi/2$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. Relacione cada una de las gráficas con el punto en el espacio desde la que se ve la superficie. Los puntos son $(10, 0, 0)$, $(-10, 10, 0)$, $(0, 10, 0)$ y $(10, 10, 10)$.



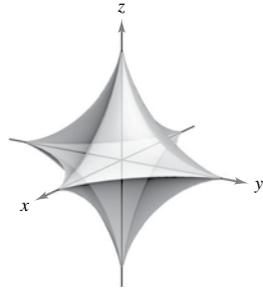
51. **Esfera asteroidal** Una ecuación de una **esfera asteroidal** en x , y y z es

$$x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}.$$

A continuación se presenta una gráfica de una esfera asteroidal. Demuestre que esta superficie puede representarse paraméricamente por medio de

$$\mathbf{r}(u, v) = a \sen^3 u \cos^3 v \mathbf{i} + a \sen^3 u \sen^3 v \mathbf{j} + a \cos^3 u \mathbf{k}$$

donde $0 \leq u \leq \pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.



52. **Diferentes vistas de una superficie** Utilice un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente tres perspectivas de la gráfica de la función vectorial

$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sen v \mathbf{j} + v \mathbf{k}$, $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq \pi$ desde los puntos $(10, 0, 0)$, $(0, 0, 10)$ y $(10, 10, 10)$.

53. **Investigación** Utilice un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente el toro

$$\mathbf{r}(u, v) = (a + b \cos v) \cos u \mathbf{i} + (a + b \cos v) \sen u \mathbf{j} + b \sen v \mathbf{k}$$

para cada conjunto de valores de a y b , donde $0 \leq u \leq 2\pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. Utilice los resultados para describir los efectos de a y b en la forma del toro.

- (a) $a = 4$, $b = 1$ (b) $a = 4$, $b = 2$
 (c) $a = 8$, $b = 1$ (d) $a = 8$, $b = 3$

54. **Investigación** Considere la función del ejercicio 14.
- Dibuje una gráfica de la función donde u se mantenga constante en $u = 1$. Identifique la gráfica.
 - Dibuje una gráfica de la función donde v se mantenga constante en $v = 2\pi/3$. Identifique la gráfica.
 - Suponga que una superficie está representada por la función vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$. ¿Qué generalización puede hacer acerca de la gráfica de la función si uno de los parámetros se mantiene constante?

55. **Área de la superficie** La superficie de la cúpula de un museo está dada por

$$\mathbf{r}(u, v) = 20 \sen u \cos v \mathbf{i} + 20 \sen u \sen v \mathbf{j} + 20 \cos u \mathbf{k}$$

donde $0 \leq u \leq \pi/3$ y $0 \leq v \leq 2\pi$, y \mathbf{r} está en metros. Determine el área de la superficie de la cúpula.

56. **Hiperboloide** Encuentre una función vectorial para el hiperboloide

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

y determine el plano tangente en $(1, 0, 0)$.

57. **Área** Represente gráficamente y encuentre el área de una vuelta completa de la rampa en espiral

$$\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sen v \mathbf{j} + 2v \mathbf{k}$$

donde $0 \leq u \leq 3$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.

58. **Área de la superficie** Sea f una función no negativa tal que f' es continua en el intervalo $[a, b]$. Sea S la superficie de revolución formada por revolución de la gráfica de f , donde $a \leq x \leq b$, en torno al eje x . Sea $x = u$, $y = f(u) \cos v$ y $z = f(u) \sen v$, donde $a \leq u \leq b$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. Entonces S se representa paraméricamente por $\mathbf{r}(u, v) = u \mathbf{i} + f(u) \cos v \mathbf{j} + f(u) \sen v \mathbf{k}$. Demuestre que las siguientes fórmulas son equivalentes.

$$\text{Área de la superficie} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$\text{Área de la superficie} = \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| dA$$

59. **Proyecto abierto** Las ecuaciones paramétricas

$$x = 3 + \sen u [7 - \cos(3u - 2v) - 2 \cos(3u + v)]$$

$$y = 3 + \cos u [7 - \cos(3u - 2v) - 2 \cos(3u + v)]$$

$$z = \sen(3u - 2v) + 2 \sen(3u + v)$$

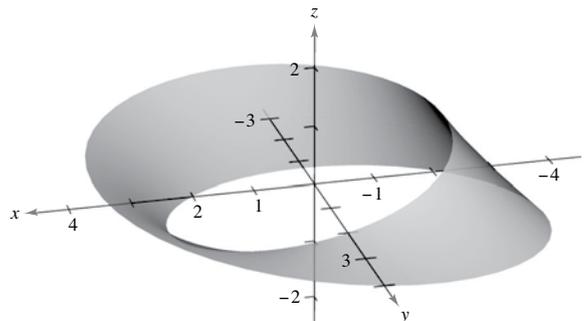
donde $-\pi \leq u \leq \pi$ y $-\pi \leq v \leq \pi$, representan la superficie que se muestra en la siguiente figura. Trate de crear una superficie paramétrica propia utilizando un sistema algebraico por computadora.



60. **Banda de Möbius** La superficie que se muestra en la figura se llama **banda de Möbius** y se puede representar mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = \left(a + u \cos \frac{v}{2}\right) \cos v, y = \left(a + u \cos \frac{v}{2}\right) \sen v, z = u \sen \frac{v}{2}$$

donde $-1 \leq u \leq 1$ y $0 \leq v \leq 2\pi$, y $a = 3$. Trate de representar gráficamente otra banda de Möbius para diferentes valores de a utilizando un sistema algebraico por computadora.



6.7 Integrales de superficie

- Evaluar una integral de superficie como una integral doble.
- Evaluar integrales de superficie sobre superficies paramétricas.
- Determinar la orientación de una superficie.
- Comprender el concepto de integral de flujo.

Integrales de superficie

El resto de este capítulo se ocupa principalmente de **integrales de superficie**. Primero se consideran superficies dadas por $z = g(x, y)$. Más adelante, en esta sección, se consideran superficies más generales dadas en forma paramétrica.

Sea S una superficie dada por $z = g(x, y)$ y sea R su proyección sobre el plano xy , como se muestra en la figura 6.44. Suponga que g , g_x y g_y son continuas en todos los puntos de R , y que f es una función escalar definida en S . Empleando el procedimiento usado para hallar el área de una superficie en la sección 5.5, evalúe f en (x_i, y_i, z_i) y se forma la suma

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i$$

donde

$$\Delta S_i \approx \sqrt{1 + [g_x(x_i, y_i)]^2 + [g_y(x_i, y_i)]^2} \Delta A_i.$$

Siempre que el límite de la suma anterior cuando $\|\Delta\|$ tiende a 0 exista, la **integral de f sobre S** se define como

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i.$$

Esta integral se puede evaluar mediante una integral doble.

TEOREMA 6.10 Evaluación de una integral de superficie

Sea S una superficie cuya ecuación es $z = g(x, y)$ y sea R su proyección sobre el plano xy . Si g , g_x y g_y son continuas en R , y f es continua en S , entonces la integral de superficie de f sobre S es

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_R f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} \, dA.$$

Para las superficies descritas por funciones de x y z (o y y z), al teorema 6.10 se le pueden hacer los siguientes ajustes. Si S es la gráfica de $y = g(x, z)$ y R es su proyección sobre el plano xz , entonces

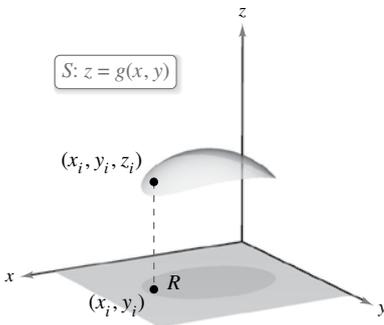
$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_R f(x, g(x, z), z) \sqrt{1 + [g_x(x, z)]^2 + [g_z(x, z)]^2} \, dA.$$

Si S es la gráfica de $x = g(y, z)$ y R es la proyección sobre el plano yz , entonces

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_R f(g(y, z), y, z) \sqrt{1 + [g_y(y, z)]^2 + [g_z(y, z)]^2} \, dA.$$

Si $f(x, y, z) = 1$, la integral de superficie sobre S da el área de la superficie de S . Por ejemplo, suponga que la superficie S es el plano dado por $z = x$, donde $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$. El área de la superficie de S es $\sqrt{2}$ unidades cuadradas. Trate de verificar que

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \sqrt{2}.$$



La función escalar f asigna un número a cada punto de S .

Figura 6.44

EJEMPLO 1 Evaluar una integral de superficie

Evalúe la integral de superficie

$$\iint_S (y^2 + 2yz) \, dS$$

donde S es la porción del plano que se encuentra en el primer octante.

$$2x + y + 2z = 6.$$

Solución Para empezar escriba S como

$$z = \frac{1}{2}(6 - 2x - y)$$

$$g(x, y) = \frac{1}{2}(6 - 2x - y).$$

Usando las derivadas parciales $g_x(x, y) = -1$ y $g_y(x, y) = -\frac{1}{2}$, puede escribir

$$\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} = \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}.$$

Utilizando la figura 6.45 y el teorema 6.10, obtiene

$$\begin{aligned} \iint_S (y^2 + 2yz) \, dS &= \iint_R f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} \, dA \\ &= \iint_R \left[y^2 + 2y \left(\frac{1}{2} \right) (6 - 2x - y) \right] \left(\frac{3}{2} \right) \, dA \\ &= 3 \int_0^3 \int_0^{2(3-x)} y(3-x) \, dy \, dx \\ &= 6 \int_0^3 (3-x)^3 \, dx \\ &= -\frac{3}{2} (3-x)^4 \Big|_0^3 \\ &= \frac{243}{2}. \end{aligned}$$

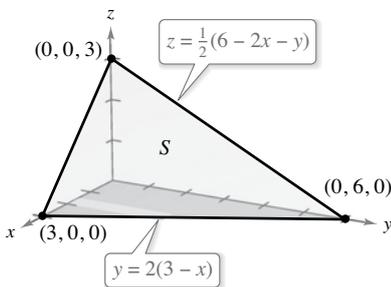


Figura 6.45

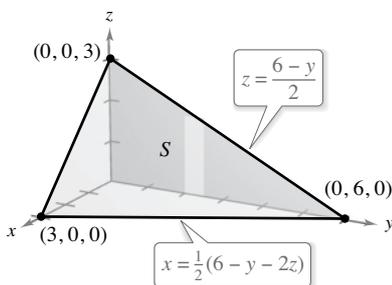


Figura 6.46

Una solución alternativa para el ejemplo 1 sería proyectar S sobre el plano yz , como se muestra en la figura 6.46. Entonces $x = \frac{1}{2}(6 - y - 2z)$, y

$$\sqrt{1 + [g_y(y, z)]^2 + [g_z(y, z)]^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1} = \frac{3}{2}.$$

Por tanto, la integral de superficie es

$$\begin{aligned} \iint_S (y^2 + 2yz) \, dS &= \iint_R f(g(y, z), y, z) \sqrt{1 + [g_y(y, z)]^2 + [g_z(y, z)]^2} \, dA \\ &= \int_0^6 \int_0^{(6-y)/2} (y^2 + 2yz) \left(\frac{3}{2} \right) \, dz \, dy \\ &= \frac{3}{8} \int_0^6 (36y - y^3) \, dy \\ &= \frac{243}{2}. \end{aligned}$$

Trate de resolver el ejemplo 1 proyectando S sobre el plano xz .

En el ejemplo 1 se podría haber proyectado la superficie S en cualquiera de los tres planos de coordenadas. En el ejemplo 2, S es una porción de un cilindro centrado en el eje x , y puede ser proyectado en el plano xz o en el plano xy .

EJEMPLO 2 Evaluar una integral de superficie

•••► Consulte *LarsonCalculus.com* para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Evalúe la integral de superficie

$$\iint_S (x + z) \, dS$$

donde S es la porción del cilindro que se encuentra en el primer octante,

$$y^2 + z^2 = 9$$

entre $x = 0$ y $x = 4$, como se muestra en la figura 6.47.

Solución Projete S sobre el plano xy , de manera que

$$z = g(x, y) = \sqrt{9 - y^2}$$

y obtiene

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{-y}{\sqrt{9 - y^2}}\right)^2} \\ &= \frac{3}{\sqrt{9 - y^2}}. \end{aligned}$$

El teorema 6.10 no se puede aplicar directamente, porque g_y no es continua en $y = 3$. Sin embargo, puede aplicar el teorema para $0 \leq b < 3$ y después tomar el límite cuando b se aproxima a 3, como sigue

$$\begin{aligned} \iint_S (x + z) \, dS &= \lim_{b \rightarrow 3^-} \int_0^b \int_0^4 (x + \sqrt{9 - y^2}) \frac{3}{\sqrt{9 - y^2}} \, dx \, dy \\ &= \lim_{b \rightarrow 3^-} 3 \int_0^b \int_0^4 \left(\frac{x}{\sqrt{9 - y^2}} + 1 \right) \, dx \, dy \\ &= \lim_{b \rightarrow 3^-} 3 \int_0^b \left[\frac{x^2}{2\sqrt{9 - y^2}} + x \right]_0^4 \, dy \\ &= \lim_{b \rightarrow 3^-} 3 \int_0^b \left(\frac{8}{\sqrt{9 - y^2}} + 4 \right) \, dy \\ &= \lim_{b \rightarrow 3^-} 3 \left[4y + 8 \arcsen \frac{y}{3} \right]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow 3^-} 3 \left(4b + 8 \arcsen \frac{b}{3} \right) \\ &= 36 + 24 \left(\frac{\pi}{2} \right) \\ &= 36 + 12\pi \end{aligned}$$

► **TECNOLOGÍA** Algunos sistemas algebraicos por computadora evalúan integrales impropias. Si se tiene acceso a uno de estos programas, utilícelo para evaluar la integral impropia

$$\int_0^3 \int_0^4 (x + \sqrt{9 - y^2}) \frac{3}{\sqrt{9 - y^2}} \, dx \, dy.$$

••• ¿Se obtiene el mismo resultado que en el ejemplo 2?

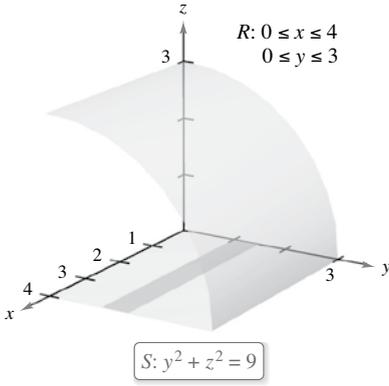


Figura 6.47

Usted ha visto que si la función f definida sobre la superficie S es simplemente $f(x, y, z) = 1$, la integral de superficie da el *área de la superficie* S .

$$\text{Área de la superficie} = \iint_S 1 \, dS$$

Por otro lado, si S es una lámina de densidad variable y $\rho(x, y, z)$ es la densidad en el punto (x, y, z) , entonces la *masa* de la lámina está dada por

$$\text{Masa de la lámina} = \iint_S \rho(x, y, z) \, dS.$$

EJEMPLO 3 Hallar la masa de una lámina bidimensional

Una lámina bidimensional S en forma de cono está dada por

$$z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \leq z \leq 4$$

como se muestra en la figura 6.48. En todo punto de S , la densidad es proporcional a la distancia entre el punto y el eje z . Encuentre la masa m de la lámina.

Solución Al proyectar S sobre el plano xy se obtiene

$$S: z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2} = g(x, y), \quad 0 \leq z \leq 4$$

$$R: x^2 + y^2 \leq 4$$

con densidad de $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$. Usando una integral de superficie, puede encontrar que la masa es

$$\begin{aligned} m &= \iint_S \rho(x, y, z) \, dS \\ &= \iint_R k\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} \, dA \\ &= k \iint_R \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{x^2 + y^2} + \frac{4y^2}{x^2 + y^2}} \, dA \\ &= k \iint_R \sqrt{5} \sqrt{x^2 + y^2} \, dA \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^2 (\sqrt{5}r) r \, dr \, d\theta \quad \text{Coordenadas polares} \\ &= \frac{\sqrt{5}k}{3} \int_0^{2\pi} r^3 \Big|_0^2 \, d\theta \\ &= \frac{8\sqrt{5}k}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{8\sqrt{5}k}{3} [\theta]_0^{2\pi} \\ &= \frac{16\sqrt{5}k\pi}{3}. \end{aligned}$$

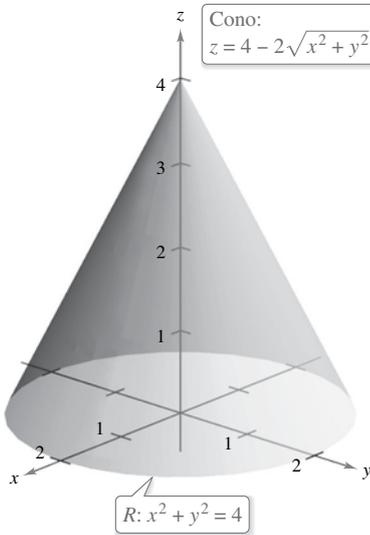


Figura 6.48

► **TECNOLOGÍA** Utilice un sistema algebraico por computadora para confirmar el resultado del ejemplo 3. El sistema algebraico por computadora *Mathematica* calcula la integral de la siguiente manera:

$$k \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{5} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = k \int_0^{2\pi} \int_0^2 (\sqrt{5}r) r \, dr \, d\theta = \frac{16\sqrt{5}k\pi}{3}$$

Superficies paramétricas e integrales de superficie

Usted puede demostrar que para una superficie S dada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad \text{Superficie paramétrica}$$

definida sobre una región D en el plano uv , la integral de superficie de $f(x, y, z)$ sobre S está dada por

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\| \, dA.$$

Observe la analogía con una integral de línea sobre una curva C en el espacio

$$\int_C f(x, y, z) \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt \quad \text{Integral de línea}$$

Observe que ds y dS pueden escribirse como

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt \quad \text{y} \quad dS = \|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\| \, dA.$$

EJEMPLO 4 Evaluar una integral de superficie

En el ejemplo 2 se mostró una evaluación de la integral de superficie

$$\iint_S (x + z) \, dS$$

donde S es la porción, en el primer octante, del cilindro

$$y^2 + z^2 = 9$$

entre $x = 0$ y $x = 4$ (ver la figura 6.49). Evalúe esta misma integral, ahora en forma paramétrica.

Solución En forma paramétrica, la superficie está dada por

$$\mathbf{r}(x, \theta) = x\mathbf{i} + 3 \cos \theta \mathbf{j} + 3 \sin \theta \mathbf{k}$$

donde $0 \leq x \leq 4$ y $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Para evaluar la integral de superficie en forma paramétrica, comience por calcular lo siguiente.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_x &= \mathbf{i} \\ \mathbf{r}_\theta &= -3 \sin \theta \mathbf{j} + 3 \cos \theta \mathbf{k} \\ \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 \sin \theta & 3 \cos \theta \end{vmatrix} = -3 \cos \theta \mathbf{j} - 3 \sin \theta \mathbf{k} \\ \|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta\| &= \sqrt{9 \cos^2 \theta + 9 \sin^2 \theta} = 3 \end{aligned}$$

Por tanto, la integral de superficie es

$$\begin{aligned} \iint_D (x + 3 \sin \theta) 3 \, dA &= \int_0^4 \int_0^{\pi/2} (3x + 9 \sin \theta) \, d\theta \, dx \\ &= \int_0^4 \left[3x\theta - 9 \cos \theta \right]_0^{\pi/2} \, dx \\ &= \int_0^4 \left(\frac{3\pi}{2}x + 9 \right) \, dx \\ &= \left[\frac{3\pi}{4}x^2 + 9x \right]_0^4 \\ &= 12\pi + 36 \end{aligned}$$

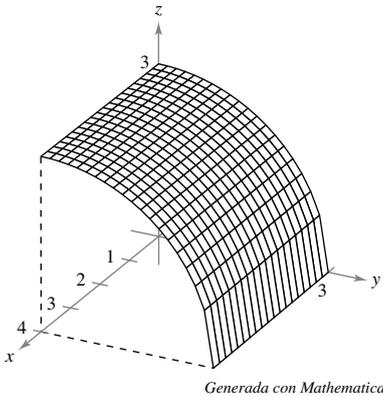


Figura 6.49

Orientación de una superficie

Para inducir una orientación en una superficie S en el espacio se utilizan vectores unitarios normales. Se dice que una superficie es **orientable** si en todo punto de S que no sea un punto frontera puede definirse un vector unitario normal \mathbf{N} de manera tal que los vectores normales varíen continuamente sobre la superficie S . Si esto es posible, S es una **superficie orientable**.

Una superficie orientable S tiene dos caras. Así, al orientar una superficie, elige uno de los dos vectores unitarios normales posibles. Si S es una superficie cerrada, como por ejemplo una esfera, se acostumbra escoger como vector unitario normal \mathbf{N} el que apunta hacia fuera de la esfera.

Las superficies más comunes, como esferas, paraboloides, elipses y planos, son orientables. (Vea en el ejercicio 3 un ejemplo de una superficie que *no* es orientable.) Además, en una superficie orientable el vector gradiente proporciona una manera adecuada de hallar un vector unitario normal. Es decir, en una superficie orientable S dada por

$$z = g(x, y) \quad \text{Superficie orientable}$$

se hace

$$G(x, y, z) = z - g(x, y).$$

Entonces, S puede orientarse, ya sea por el vector unitario normal

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \frac{\nabla G(x, y, z)}{\|\nabla G(x, y, z)\|} \\ &= \frac{-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}} \end{aligned} \quad \text{Unitario normal hacia arriba}$$

o por el vector unitario normal

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \frac{-\nabla G(x, y, z)}{\|\nabla G(x, y, z)\|} \\ &= \frac{g_x(x, y)\mathbf{i} + g_y(x, y)\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}} \end{aligned} \quad \text{Unitario normal hacia abajo}$$

como se muestra en la figura 6.50. Si la superficie suave orientable S está dada en forma paramétrica por

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad \text{Superficie paramétrica}$$

entonces los vectores unitarios normales están dados por

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}$$

y

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u}{\|\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u\|}.$$

Para una superficie orientable dada por

$$y = g(x, z) \quad \text{o} \quad x = g(y, z)$$

puede usar el vector gradiente

$$\nabla G(x, y, z) = -g_x(x, z)\mathbf{i} + \mathbf{j} - g_z(x, z)\mathbf{k} \quad G(x, y, z) = y - g(x, z)$$

o

$$\nabla G(x, y, z) = \mathbf{i} - g_y(y, z)\mathbf{j} - g_z(y, z)\mathbf{k} \quad G(x, y, z) = x - g(y, z)$$

para orientar la superficie.

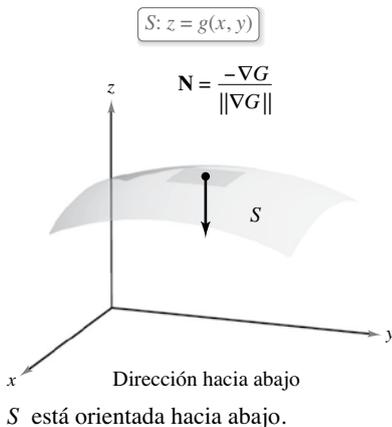
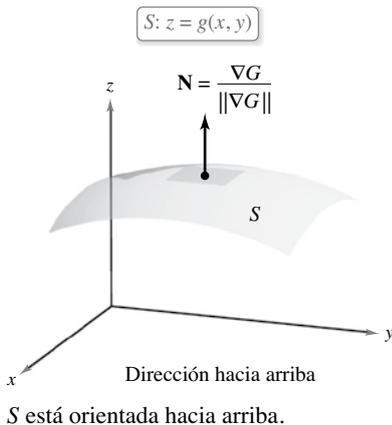
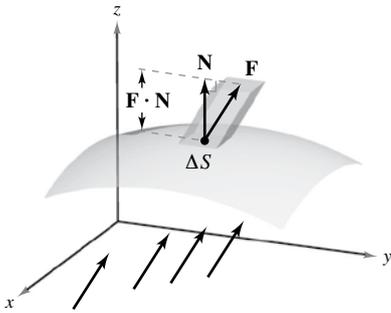


Figura 6.50



El campo de velocidades \mathbf{F} indica la dirección del flujo del fluido.

Figura 6.51

Integrales de flujo

Una de las aplicaciones principales que emplean la forma vectorial de una integral de superficie se refiere al flujo de un fluido a través de una superficie S . Suponga que una superficie orientada S se sumerge en un fluido que tiene un campo de velocidad continua \mathbf{F} . Sea el área de una pequeña porción de la superficie S sobre la cual \mathbf{F} es casi constante. Entonces la cantidad de fluido que atraviesa esta región por unidad de tiempo se aproxima mediante el volumen de la columna de altura $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}$ que se muestra en la figura 6.51. Es decir,

$$\begin{aligned} \Delta V &= (\text{altura})(\text{área de la base}) \\ &= (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}) \Delta S. \end{aligned}$$

Por consiguiente, el volumen del fluido que atraviesa la superficie S por unidad de tiempo (llamada el **flujo de \mathbf{F} a través de S**) está dado por la integral de superficie de la definición siguiente.

Definición de integral de flujo

Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$, donde M, N y P tienen primeras derivadas parciales continuas sobre la superficie S orientada mediante un vector unitario normal \mathbf{N} . La **integral de flujo de \mathbf{F} a través de S** está dada por

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS.$$

Geoméricamente, una integral de flujo es la integral de superficie sobre S de la *componente normal* de \mathbf{F} . Si $\rho(x, y, z)$ es la densidad del fluido en la integral de flujo

$$\iint_S \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

representa la *masa* del fluido que fluye a través de S por unidad de tiempo.

Para evaluar una integral de flujo de una superficie dada por $z = g(x, y)$, sea

$$G(x, y, z) = z - g(x, y).$$

Entonces, $\mathbf{N} \, dS$ puede escribirse como sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \, dS &= \frac{\nabla G(x, y, z)}{\|\nabla G(x, y, z)\|} \, dS \\ &= \frac{\nabla G(x, y, z)}{\sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2 + 1}} \sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2 + 1} \, dA \\ &= \nabla G(x, y, z) \, dA \end{aligned}$$

TEOREMA 6.11 Evaluación de una integral de flujo

Sea S una superficie orientada dada por $z = g(x, y)$ y sea R su proyección sobre el plano xy .

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint_R \mathbf{F} \cdot [-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}] \, dA \quad \text{Orientada hacia arriba}$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint_R \mathbf{F} \cdot [g_x(x, y)\mathbf{i} + g_y(x, y)\mathbf{j} - \mathbf{k}] \, dA \quad \text{Orientada hacia abajo}$$

Para la primera integral, la superficie está orientada hacia arriba, y en la segunda integral, la superficie está orientada hacia abajo.

EJEMPLO 5

Usar una integral de flujo para hallar la razón del flujo de masa

Sea S la porción del paraboloides

$$z = g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$$

que se encuentra sobre el plano xy , orientado por medio de un vector unitario normal dirigido hacia arriba, como se muestra en la figura 6.52. Un fluido de densidad constante ρ fluye a través de la superficie S de acuerdo con el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Encuentre la razón de flujo de masa a través de S .

Solución Empiece calculando las derivadas parciales de

$$g_x(x, y) = -2x$$

y

$$g_y(x, y) = -2y$$

La razón de flujo de masa a través de la superficie S es

$$\begin{aligned} \iint_S \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \rho \iint_R \mathbf{F} \cdot [-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}] \, dA \\ &= \rho \iint_R [x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (4 - x^2 - y^2)\mathbf{k}] \cdot (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}) \, dA \\ &= \rho \iint_R [2x^2 + 2y^2 + (4 - x^2 - y^2)] \, dA \\ &= \rho \iint_R (4 + x^2 + y^2) \, dA \\ &= \rho \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 + r^2)r \, dr \, d\theta && \text{Coordenadas polares} \\ &= \rho \int_0^{2\pi} 12 \, d\theta \\ &= 24\pi\rho. \end{aligned}$$

Para una superficie orientada S dada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad \text{Superficie paramétrica}$$

definida sobre una región D del plano uv , puede definir la integral de flujo de \mathbf{F} a través de S como

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iint_D \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} \right) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, dA \\ &= \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \, dA. \end{aligned}$$

Observe la semejanza de esta integral con la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds.$$

En las siguientes páginas se presenta un resumen de las fórmulas para integrales de línea y de superficie.

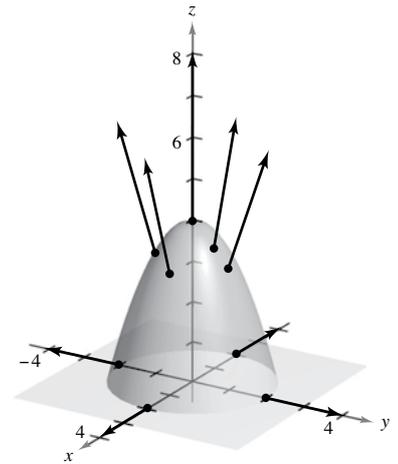


Figura 6.52

EJEMPLO 6 Hallar el flujo de un campo cuadrático inverso

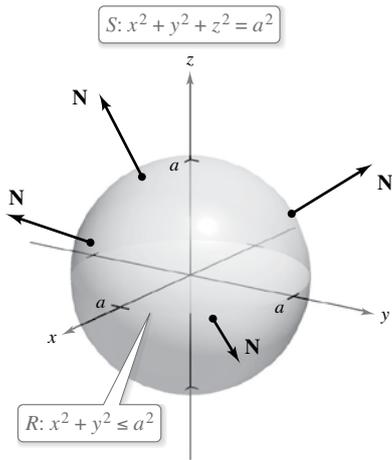


Figura 6.53

Encuentre el flujo sobre la esfera S dada por

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \text{Esfera } S$$

donde \mathbf{F} es un campo cuadrático inverso dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{kq}{\|\mathbf{r}\|^2} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = \frac{kq\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} \quad \text{Campo cuadrático inverso } \mathbf{F}$$

y

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Suponga que S está orientada hacia fuera, como se muestra en la figura 6.53.

Solución La esfera está dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \\ &= a \cos u \cos v \mathbf{i} + a \cos u \sin v \mathbf{j} + a \cos u \mathbf{k} \end{aligned}$$

donde $0 \leq u \leq \pi$ y $0 \leq v \leq 2\pi$. Las derivadas parciales de \mathbf{r} son

$$\mathbf{r}_u(u, v) = a \cos u \cos v \mathbf{i} + a \cos u \sin v \mathbf{j} - a \sin u \mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{r}_v(u, v) = -a \sin u \sin v \mathbf{i} + a \sin u \cos v \mathbf{j}$$

lo cual implica que el vector normal $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ es

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cos u \cos v & a \cos u \sin v & -a \sin u \\ -a \sin u \sin v & a \sin u \cos v & 0 \end{vmatrix} \\ &= a^2(\sin^2 u \cos v \mathbf{i} + \sin^2 u \sin v \mathbf{j} + \sin u \cos u \mathbf{k}). \end{aligned}$$

Ahora, usando

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x, y, z) &= \frac{kq\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} \\ &= kq \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\|x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\|^3} \\ &= \frac{kq}{a^3}(a \cos u \cos v \mathbf{i} + a \cos u \sin v \mathbf{j} + a \cos u \mathbf{k}) \end{aligned}$$

se deduce que

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) &= \frac{kq}{a^3} [(a \cos u \cos v \mathbf{i} + a \cos u \sin v \mathbf{j} + a \cos u \mathbf{k}) \cdot \\ &\quad a^2(\sin^2 u \cos v \mathbf{i} + \sin^2 u \sin v \mathbf{j} + \sin u \cos u \mathbf{k})] \\ &= kq(\sin^3 u \cos^2 v + \sin^3 u \sin^2 v + \sin u \cos^2 u) \\ &= kq \sin u. \end{aligned}$$

Por último, el flujo sobre la esfera S está dado por

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iint_D (kq \sin u) \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi kq \sin u \, du \, dv \\ &= 4\pi kq. \end{aligned}$$

El resultado del ejemplo muestra que el flujo a través de una esfera S en un campo cuadrático inverso es independiente del radio de S . En particular, si \mathbf{E} es un campo eléctrico, entonces el resultado obtenido en el ejemplo 6, junto con la ley de Coulomb, proporciona una de las leyes básicas de electrostática, conocida como la **ley de Gauss**:

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{N} \, dS = 4\pi kq \quad \text{Ley de Gauss}$$

donde q es una carga puntual localizada en el centro de la esfera y k es la constante de Coulomb. La ley de Gauss es válida para superficies cerradas más generales que contengan el origen, y relaciona el flujo que sale de la superficie con la carga total q dentro de la superficie.

Las integrales de superficie también se usan en el estudio de **flujo de calor**. Los flujos de calor de las áreas de alta temperatura a las áreas de baja temperatura en la dirección de máximo cambio. Como un resultado, la medición de **flujo de calor** implica el gradiente de temperatura. El flujo depende del área de la superficie. Ésta es la dirección normal a la superficie, que es importante ya que el calor que fluye en la dirección tangencial a la superficie no producirá pérdidas de calor. Por lo tanto, suponga que el flujo que pasa por una porción de la superficie de área ΔS está dado por $\Delta H \approx -k\nabla T \cdot \mathbf{N} \, dS$, donde T es la temperatura, \mathbf{N} es el vector unitario normal a la superficie en la dirección de flujo de calor y k es la difusividad térmica del material. El flujo de calor que fluye a través de la superficie está dado por

$$H = \iint_S -k\nabla T \cdot \mathbf{N} \, dS.$$

Esta sección concluye con un resumen de fórmulas de integrales de línea y de integrales de superficie.

RESUMEN DE INTEGRALES DE LÍNEA Y DE SUPERFICIE

Integrales de línea

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt \\ = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \, dt$$

$$\int_C f(x, y, z) \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \, ds \quad \text{Forma escalar}$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds \\ = \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt \quad \text{Forma vectorial}$$

Integrales de superficie $[z = g(x, y)]$

$$dS = \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} \, dA$$

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_R f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2} \, dA \quad \text{Forma escalar}$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint_R \mathbf{F} \cdot [-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}] \, dA \quad \text{Forma vectorial (normal hacia arriba)}$$

Integrales de superficie (forma paramétrica)

$$dS = \|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\| \, dA$$

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \, dS \quad \text{Forma escalar}$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \, dA \quad \text{Forma vectorial}$$

6.7 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Evaluar una integral de superficie En los ejercicios 1 a 4, evalúe

$$\iint_S (x - 2y + z) \, dS.$$

1. $S: z = 4 - x, \quad 0 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq y \leq 3$
2. $S: z = 15 - 2x + 3y, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 4$
3. $S: z = 2, \quad x^2 + y^2 \leq 1$
4. $S: z = \frac{2}{3}x^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x$

Evaluar una integral de superficie En los ejercicios 5 a 6, evalúe

$$\iint_S xy \, dS.$$

5. $S: z = 3 - x - y$, primer octante
6. $S: z = h, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$

 **Evaluar una integral de superficie** En los ejercicios 7 y 8, utilice un sistema algebraico por computadora para evaluar

$$\iint_S xy \, dS.$$

7. $S: z = 9 - x^2, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq x$
8. $S: z = \frac{1}{2}xy, \quad 0 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq y \leq 4$

 **Evaluar una integral de superficie** En los ejercicios 9 y 10, utilice un sistema algebraico por computadora para evaluar

$$\iint_S (x^2 - 2xy) \, dS.$$

9. $S: z = 10 - x^2 - y^2, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 2$
10. $S: z = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2}x$

Masa En los ejercicios 11 y 12, encuentre la masa de la superficie de la lámina S de densidad ρ .

11. $S: 2x + 3y + 6z = 12$, primer octante, $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$
12. $S: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad \rho(x, y, z) = kz$

Evaluar una integral de superficie En los ejercicios 13 a 16, evalúe

$$\iint_S f(x, y) \, dS.$$

13. $f(x, y) = y + 5$
 $S: \mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + 2v\mathbf{k}, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 2$
14. $f(x, y) = xy$
 $S: \mathbf{r}(u, v) = 2 \cos u\mathbf{i} + 2 \sin u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq v \leq 1$

15. $f(x, y) = x + y$
 $S: \mathbf{r}(u, v) = 2 \cos u\mathbf{i} + 2 \sin u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq v \leq 1$

16. $f(x, y) = x + y$
 $S: \mathbf{r}(u, v) = 4u \cos v\mathbf{i} + 4u \sin v\mathbf{j} + 3u\mathbf{k}$
 $0 \leq u \leq 4, \quad 0 \leq v \leq \pi$

Evaluar una integral de superficie En los ejercicios 17 a 22, evalúe

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS.$$

17. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
 $S: z = x + y, \quad x^2 + y^2 \leq 1$

18. $f(x, y, z) = \frac{xy}{z}$
 $S: z = x^2 + y^2, \quad 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16$

19. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
 $S: z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq 4$

20. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
 $S: z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x - 1)^2 + y^2 \leq 1$

21. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
 $S: x^2 + y^2 = 9, \quad 0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 3, \quad 0 \leq z \leq 9$

22. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
 $S: x^2 + y^2 = 9, \quad 0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq z \leq x$

Evaluar una integral de flujo En los ejercicios 23 a 28, determine el flujo \mathbf{F} a través de S ,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

donde \mathbf{N} es el vector unitario normal a S dirigido hacia arriba.

23. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3z\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + y\mathbf{k}$
 $S: z = 1 - x - y$, primer octante
24. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
 $S: z = 6 - 3x - 2y$, primer octante
25. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 $S: z = 1 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$
26. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 36$, primer octante
27. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
 $S: z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 4$
28. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$
 $S: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

Evaluar una integral de flujo En los ejercicios 29 y 30, encuentre el flujo de \mathbf{F} sobre la superficie cerrada. (Sea \mathbf{N} el vector unitario normal a la superficie dirigido hacia fuera.)

29. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 $S: z = 16 - x^2 - y^2, z = 0$
30. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4xy\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$
 $S: \text{cubo unitario acotado por } x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$
31. **Carga eléctrica** Sea $\mathbf{E} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ un campo electrostático. Use la ley de Gauss para hallar la carga total que hay en el interior de la superficie cerrada formada por el hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y su base circular en el plano xy .
32. **Carga eléctrica** Sea $\mathbf{E} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ un campo electrostático. Use la ley de Gauss para hallar la carga total encerrada por la superficie cerrada que consiste del hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y su base circular en el plano xy .

Momento de inercia En los ejercicios 33 y 34, utilice las fórmulas siguientes para los momentos de inercia respecto a los ejes coordenados de una lámina bidimensional de densidad ρ .

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2)\rho(x, y, z) \, dS$$

$$I_y = \iint_S (x^2 + z^2)\rho(x, y, z) \, dS$$

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\rho(x, y, z) \, dS$$

33. Compruebe que el momento de inercia de una capa cónica de densidad uniforme, respecto a su eje, es $\frac{1}{2}ma^2$, donde m es la masa y a es el radio y altura.
34. Compruebe que el momento de inercia de una capa esférica de densidad uniforme, respecto a su diámetro, es $\frac{2}{5}ma^2$, donde m es la masa y a es el radio.

Momento de inercia En los ejercicios 35 y 36, calcule I_z para la lámina especificada con densidad uniforme igual a 1. Utilice un sistema algebraico por computadora para verificar los resultados.

35. $x^2 + y^2 = a^2, 0 \leq z \leq h$ 36. $z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq h$

Razón de flujo En los ejercicios 37 y 38, use un sistema algebraico por computadora para encontrar la razón de flujo de masa de un fluido de densidad ρ a través de la superficie S orientada hacia fuera cuando el campo de velocidades está dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = 0.5z\mathbf{k}$.

37. $S: z = 16 - x^2 - y^2, z \geq 0$

38. $S: z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

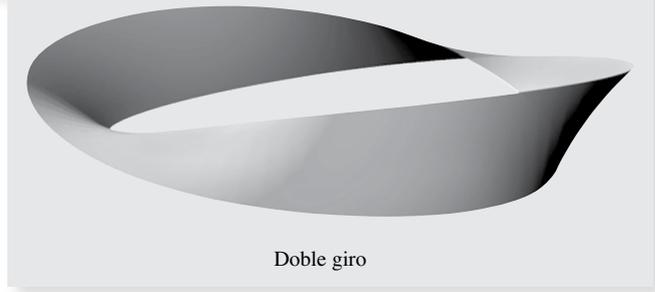
DESARROLLO DE CONCEPTOS

39. **Integral de superficie** Defina una integral de superficie de la función escalar f sobre una superficie $z = g(x, y)$. Explique cómo evalúa la integral de superficie.
40. **Superficie orientable** Describa una superficie orientable.
41. **Integral de flujo** Defina una integral de flujo y explique cómo se evalúa.



42.

¿CÓMO LO VE? ¿Es orientable la superficie de la figura adjunta? Explique.



43. Investigación

- (a) Utilice un sistema algebraico por computadora y represente gráficamente la función vectorial $\mathbf{r}(u, v) = (4 - v \sin u) \cos(2u)\mathbf{i} + (4 - v \sin u) \sin(2u)\mathbf{j} + v \cos uk, 0 \leq u \leq \pi, -1 \leq v \leq 1$.
 A esta superficie se le llama banda de Möbius.
- (b) Explique por qué esta superficie no es orientable.
- (c) Utilice un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la curva en el espacio dada por $\mathbf{r}(u, 0)$. Identifique la curva.
- (d) Construya una banda de Möbius cortando una tira de papel, dándole un solo giro y pegando los extremos.
- (e) Corte la banda de Möbius a lo largo de la curva en el espacio del inciso (c) y describa el resultado.

PROYECTO DE TRABAJO

Hiperboloide de una hoja

Considere la superficie paramétrica dada por la función

$$\mathbf{r}(u, v) = a \cosh u \cos v \mathbf{i} + a \cosh u \sin v \mathbf{j} + b \sinh uk.$$

- (a) Use una herramienta de graficación para representar \mathbf{r} para varios valores de las constantes a y b . Describa el efecto de las constantes sobre la forma de la superficie.

- (b) Demuestre que la superficie es un hiperboloide de una hoja dado por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

- (c) Para valores fijos $u = u_0$, describa las curvas dadas por

$$\mathbf{r}(u, v_0) = a \cosh u \cos v_0 \mathbf{i} + a \cosh u \sin v_0 \mathbf{j} + b \sinh uk.$$

- (d) Para valores fijos $v = v_0$, describa las curvas dadas por

$$\mathbf{r}(u, v_0) = a \cosh u \cos v_0 \mathbf{i} + a \cosh u \sin v_0 \mathbf{j} + b \sinh uk.$$

- (e) Encuentre un vector normal a la superficie en $(u, v) = (0, 0)$.

6.8 Teorema de la divergencia

- Comprender y utilizar el teorema de la divergencia.
- Utilizar el teorema de la divergencia para calcular flujo.

Teorema de la divergencia

Recuerde que en la sección 6.5 vio que una forma alternativa del teorema de Green es

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, ds = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dA$$

$$= \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA.$$

De manera análoga, el **teorema de la divergencia** da la relación entre una integral triple sobre una región sólida Q y una integral de superficie sobre la superficie de Q . En el enunciado del teorema, la superficie S es **cerrada** en el sentido de que forma toda la frontera completa del sólido Q . Ejemplos de superficies cerradas surgen de las regiones acotadas por esferas, elipsoides, cubos, tetraedros o combinaciones de estas superficies. Suponga que Q es una región sólida sobre la cual se evalúa una integral triple, y que la superficie cerrada S está orientada mediante vectores normales unitarios dirigidos hacia el *exterior*, como se muestra en la figura 6.54. Con estas restricciones sobre S y Q , el teorema de la divergencia se puede establecer como se muestra en la figura siguiente.



CARL FRIEDRICH GAUSS
(1777-1855)

Al teorema de la divergencia también se le llama *teorema de Gauss*, en honor al famoso matemático alemán Carl Friedrich Gauss. Gauss es reconocido, junto con Newton y Arquímedes, como uno de los tres más grandes matemáticos de la historia. Una de sus muchas contribuciones a las matemáticas la hizo a los 22 años, cuando, como parte de su tesis doctoral, demostró el *teorema fundamental del álgebra*. Consulte LarsonCalculus.com para leer más acerca de esta biografía.

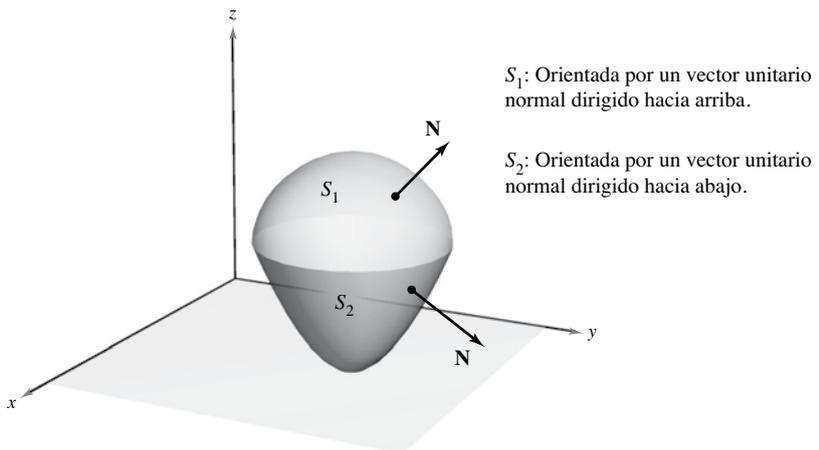


Figura 6.54

TEOREMA 6.12 Teorema de la divergencia

Sea Q una región sólida acotada por una superficie cerrada S orientada por un vector unitario normal dirigido hacia el exterior de Q . Si \mathbf{F} es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en Q , entonces

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV.$$

COMENTARIO Como se indica arriba, al teorema de la divergencia a veces se le llama *teorema de Gauss*. También se le llama *teorema de Ostrogradsky*, en honor al matemático ruso Michel Ostrogradsky (1801-1861).

.....► **COMENTARIO** Esta demostración se restringe a una región sólida *simple*. Es mejor dejar la demostración general para un curso de cálculo avanzado.

Demostración Para $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$, el teorema toma la forma

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iint_S (M\mathbf{i} \cdot \mathbf{N} + N\mathbf{j} \cdot \mathbf{N} + P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N}) \, dS \\ &= \iiint_Q \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) dV.\end{aligned}$$

Puede demostrar esto verificando que las tres ecuaciones siguientes son válidas

$$\begin{aligned}\iint_S M\mathbf{i} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iiint_Q \frac{\partial M}{\partial x} dV \\ \iint_S N\mathbf{j} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iiint_Q \frac{\partial N}{\partial y} dV \\ \iint_S P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z} dV\end{aligned}$$

Como las verificaciones de las tres ecuaciones son similares, sólo se verá la tercera. La demostración se restringe a una región **sólida simple**, con superficie superior

$$z = g_2(x, y) \quad \text{Superficie superior}$$

y superficie inferior

$$z = g_1(x, y) \quad \text{Superficie inferior}$$

cuyas proyecciones sobre el plano xy coinciden y forman la región R . Si Q tiene una superficie lateral, como en la figura 6.55, entonces un vector normal es horizontal, lo cual implica $P\mathbf{k} \times \mathbf{N} = 0$. Por consiguiente, tiene

$$\iint_S P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint_{S_1} P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N} \, dS + \iint_{S_2} P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N} \, dS + 0.$$

Sobre la superficie superior S_2 el vector normal dirigido hacia el exterior apunta hacia arriba, mientras que en la superficie inferior el vector normal dirigido hacia el exterior apunta hacia abajo. Por tanto, por el teorema 6.11, tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iint_R P(x, y, g_1(x, y))\mathbf{k} \cdot \left(\frac{\partial g_1}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial g_1}{\partial y}\mathbf{j} - \mathbf{k} \right) dA \\ &= - \iint_R P(x, y, g_1(x, y)) \, dA\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\iint_{S_2} P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iint_R P(x, y, g_2(x, y))\mathbf{k} \cdot \left(-\frac{\partial g_2}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g_2}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dA \\ &= \iint_R P(x, y, g_2(x, y)) \, dA.\end{aligned}$$

Sumando estos resultados, obtiene

$$\begin{aligned}\iint_S P\mathbf{k} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iint_R [P(x, y, g_2(x, y)) - P(x, y, g_1(x, y))] \, dA \\ &= \iint_R \left[\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} \frac{\partial P}{\partial z} dz \right] dA \\ &= \iiint_Q \frac{\partial P}{\partial z} dV.\end{aligned}$$

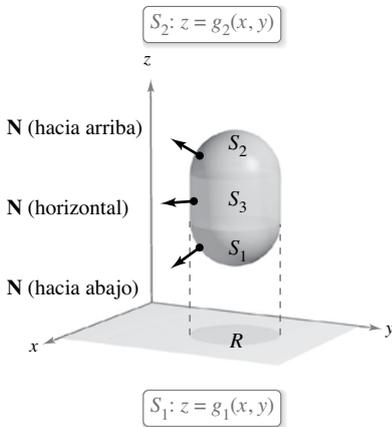


Figura 6.55

EJEMPLO 1 Aplicar el teorema de la divergencia

Sea Q la región sólida limitada o acotada por los planos coordenados y el plano

$$2x + 2y + z = 6$$

y sea $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Determine

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

donde S es la superficie de Q .

Solución En la figura 6.56 se ve que Q está limitada o acotada por cuatro superficies. Por tanto, se necesitarán cuatro *integrales de superficie* para evaluarla

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS.$$

Sin embargo, por el teorema de la divergencia, sólo necesita una integral triple. Como

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \\ &= 1 + 2y + 1 \\ &= 2 + 2y \end{aligned}$$

tiene

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV \\ &= \int_0^3 \int_0^{3-y} \int_0^{6-2x-2y} (2 + 2y) \, dz \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 \int_0^{3-y} (2z + 2yz) \Big|_0^{6-2x-2y} \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 \int_0^{3-y} (12 - 4x + 8y - 4xy - 4y^2) \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 \left[12x - 2x^2 + 8xy - 2x^2y - 4xy^2 \right]_0^{3-y} \, dy \\ &= \int_0^3 (18 + 6y - 10y^2 + 2y^3) \, dy \\ &= \left[18y + 3y^2 - \frac{10y^3}{3} + \frac{y^4}{2} \right]_0^3 \\ &= \frac{63}{2}. \end{aligned}$$

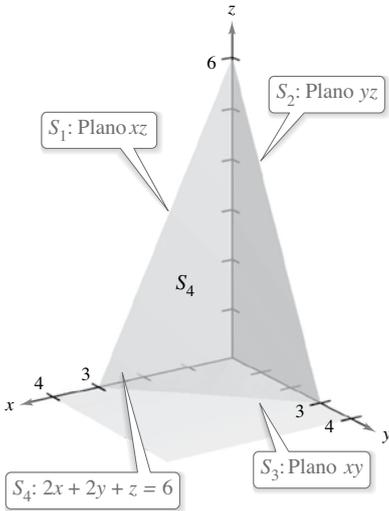


Figura 6.56

► **TECNOLOGÍA** Si tiene acceso a un sistema algebraico por computadora que pueda evaluar integrales iteradas triples, utilícelo para verificar el resultado del ejemplo 1. Al usar este sistema algebraico por computadora observe que el primer paso es convertir la integral triple en una integral iterada, este paso debe hacerse a mano. Para adquirir práctica para realizar este paso importante, encuentre los límites de integración de las integrales iteradas siguientes. Después use una computadora para comprobar que el valor es el mismo que el obtenido en el ejemplo 1.

$$\int_?^? \int_?^? \int_?^? (2 + 2y) \, dy \, dz \, dx, \quad \int_?^? \int_?^? \int_?^? (2 + 2y) \, dx \, dy \, dz$$

EJEMPLO 2

Comprobar el teorema de la divergencia

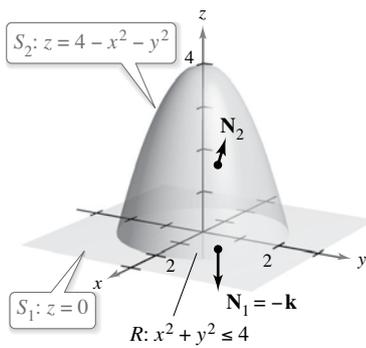


Figura 6.57

Sea Q la región sólida entre el paraboloides

$$z = 4 - x^2 - y^2$$

y el plano xy . Compruebe el teorema de la divergencia para

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}.$$

Solución De la figura 6.57, puede que el vector normal a la superficie S_1 , que apunta hacia fuera, sea $\mathbf{N}_1 = -\mathbf{k}$, mientras que el vector normal a la superficie S_2 , que apunta hacia fuera, sea

$$\mathbf{N}_2 = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Por tanto, por el teorema 6.11, tiene

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 \, dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 \, dS \\ &= \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}) \, dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \frac{(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k})}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \, dS \\ &= \iint_R -y^2 \, dA + \iint_R (4xz + 2xy + y^2) \, dA \\ &= -\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} y^2 \, dx \, dy + \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4xz + 2xy + y^2) \, dx \, dy \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4xz + 2xy) \, dx \, dy \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} [4x(4 - x^2 - y^2) + 2xy] \, dx \, dy \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (16x - 4x^3 - 4xy^2 + 2xy) \, dx \, dy \\ &= \int_{-2}^2 \left[8x^2 - x^4 - 2x^2y^2 + x^2y \right]_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \, dy \\ &= \int_{-2}^2 0 \, dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, como

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}[2z] + \frac{\partial}{\partial y}[x] + \frac{\partial}{\partial z}[y^2] = 0 + 0 + 0 = 0$$

puede aplicar el teorema de la divergencia para obtener el resultado equivalente

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV \\ &= \iiint_Q 0 \, dV \\ &= 0. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Aplicar el teorema de la divergencia

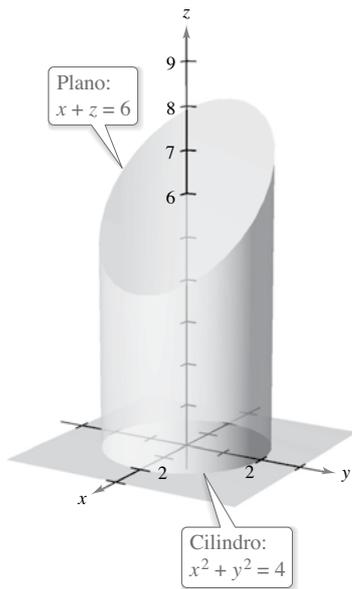


Figura 6.58

Sea Q el sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, el plano $x + z = 6$ y el plano xy , como se muestra en la figura 6.58. Encuentre

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

donde S es la superficie de Q y

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + \operatorname{sen} z)\mathbf{i} + (xy + \cos z)\mathbf{j} + e^y\mathbf{k}.$$

Solución La evaluación directa de esta integral de superficie será difícil. Sin embargo, por el teorema de la divergencia puede evaluar la integral como sigue.

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV \\ &= \iiint_Q (2x + x + 0) \, dV \\ &= \iiint_Q 3x \, dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{6-r \cos \theta} (3r \cos \theta)r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (18r^2 \cos \theta - 3r^3 \cos^2 \theta) \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (48 \cos \theta - 12 \cos^2 \theta) \, d\theta \\ &= \left[48 \operatorname{sen} \theta - 6 \left(\theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \right) \right]_0^{2\pi} \\ &= -12\pi \end{aligned}$$

Observe que para evaluar la integral triple se emplearon coordenadas cilíndricas con

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad dV = r \, dz \, dr \, d\theta.$$

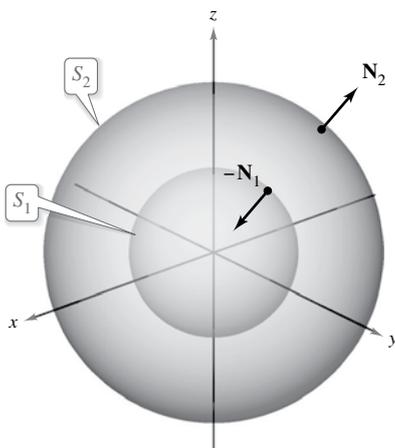


Figura 6.59

Aunque el teorema de la divergencia se formuló para una región sólida simple Q acotada por una superficie cerrada, el teorema también es válido para regiones que son uniones finitas de regiones sólidas simples. Por ejemplo, sea Q el sólido acotado por las superficies cerradas S_1 y S_2 , como se muestra en la figura 6.59. Para aplicar el teorema de la divergencia a este sólido, sea $S = S_1 \cup S_2$. El vector normal \mathbf{N} a S está dado por $-\mathbf{N}_1$ en S_1 y por \mathbf{N}_2 en S_2 . Por tanto, puede escribir

$$\begin{aligned} \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS \\ &= \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{N}_1) \, dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 \, dS \\ &= -\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 \, dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2 \, dS. \end{aligned}$$

Flujo y el teorema de la divergencia

Con el fin de comprender el teorema de la divergencia, considere los dos miembros de la ecuación

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV.$$

De acuerdo con la sección 6.7, sabe que la integral de flujo de la izquierda determina el flujo total de fluido que atraviesa la superficie S por unidad de tiempo. Esto puede aproximarse sumando el flujo que fluye a través de fragmentos pequeños de la superficie. La integral triple de la derecha mide este mismo flujo de fluido a través de S , pero desde una perspectiva muy diferente, a saber: calculando el flujo de fluido dentro o fuera de *cubos* pequeños de volumen ΔV_i . El flujo en el cubo i -ésimo es aproximadamente $\operatorname{div} \mathbf{F}(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$ para algún punto (x_i, y_i, z_i) en el i -ésimo cubo. Observe que en un cubo en el interior de Q , la ganancia (o pérdida) de fluido a través de cualquiera de sus seis caras es compensada por una pérdida o ganancia correspondiente a través de una de las caras de un cubo adyacente. Después de sumar sobre todos los cubos en Q , el único flujo de fluido que no se cancela uniendo cubos es el de las caras exteriores en los cubos del borde. Así, la suma

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{div} \mathbf{F}(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

aproxima el flujo total dentro (o fuera) de Q , y por consiguiente a través de la superficie S .

Para ver qué significa divergencia de \mathbf{F} en un punto, considere ΔV_α como el volumen de una esfera pequeña S_α de radio α y centro (x_0, y_0, z_0) contenida en la región Q , como se muestra en la figura 6.60. Aplicando el teorema de la divergencia a S_α resulta

$$\text{Flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } S_\alpha = \iiint_{Q_\alpha} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV \approx \operatorname{div} \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) \Delta V_\alpha$$

donde Q_α es el interior de S_α . Por consiguiente, tiene

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) \approx \frac{\text{flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } S_\alpha}{\Delta V_\alpha}$$

y tomando el límite cuando $\alpha \rightarrow 0$, se obtiene la divergencia de \mathbf{F} en el punto (x_0, y_0, z_0) .

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } S_\alpha}{\Delta V_\alpha} = \text{flujo por unidad de volumen en } (x_0, y_0, z_0)$$

En un campo vectorial el punto (x_0, y_0, z_0) es clasificado como una fuente, un sumidero o incompresible, como sigue

1. **Fuente**, si $\operatorname{div} \mathbf{F} > 0$ Vea la figura 6.61(a).
2. **Sumidero**, si $\operatorname{div} \mathbf{F} < 0$ Vea la figura 6.61(b).
3. **Incompresible**, si $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ Vea la figura 6.61(c).

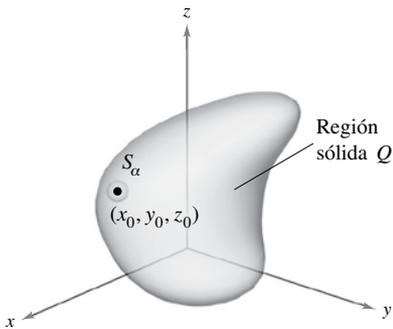
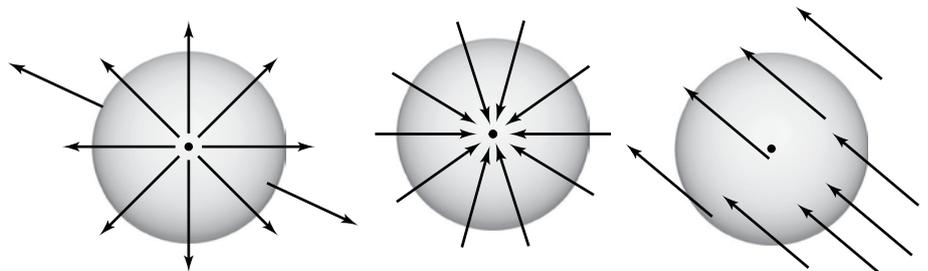


Figura 6.60

...**COMENTARIO** En hidrodinámica, una *fuentes* es un punto por el que se considera que se introduce fluido adicional a la región ocupada por el fluido. Un *sumidero* es un punto en el que se considera que escapa fluido.



(a) Fuente: $\operatorname{div} \mathbf{F} > 0$ (b) Sumidero: $\operatorname{div} \mathbf{F} < 0$ (c) Incompresible: $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$

Figura 6.61

EJEMPLO 5

Calcular el flujo mediante el teorema de la divergencia

...► Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Sea Q la región acotada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Encuentre el flujo dirigido hacia fuera del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x^3\mathbf{i} + 2y^3\mathbf{j} + 2z^3\mathbf{k}$ a través de la esfera.

Solución Por el teorema de la divergencia, tiene

$$\begin{aligned} \text{Flujo a través de } S &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS \\ &= \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV \\ &= \iiint_Q 6(x^2 + y^2 + z^2) \, dV \\ &= 6 \int_0^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho^4 \operatorname{sen} \phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho && \text{Coordenadas esféricas} \\ &= 6 \int_0^2 \int_0^\pi 2\pi \rho^4 \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\rho \\ &= 12\pi \int_0^2 2\rho^4 \, d\rho \\ &= 24\pi \left(\frac{32}{5}\right) \\ &= \frac{768\pi}{5}. \end{aligned}$$

6.8 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Comprobar el teorema de la divergencia En los ejercicios 1 a 6, compruebe el teorema de la divergencia evaluando

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

como una integral de superficie y como una integral triple.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

S : cubo acotado por los planos $x = 0, x = a, y = 0, y = a, z = 0, z = a$

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

S : cilindro $x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq h$

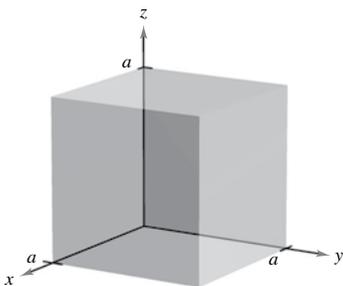


Figura para 1

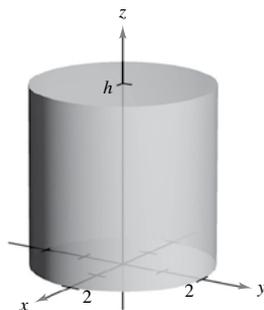


Figura para 2

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x - y)\mathbf{i} - (2y - z)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

S : superficie acotada por el plano $2x + 4y + 2z = 12$ y los planos coordenados

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + z\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$

S : superficie acotada por el plano $y = 4$ y $z = 4 - x$ y los planos coordenados

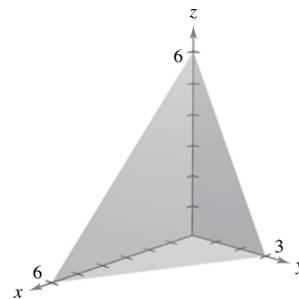


Figura para 3

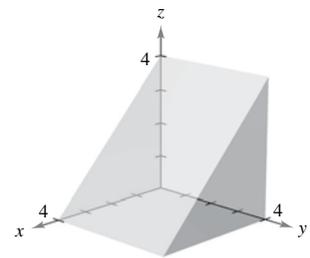


Figura para 4

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + zy\mathbf{j} + 2z^2\mathbf{k}$

S : superficie acotada por $z = 1 - x^2 - y^2$ y $z = 0$

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} + yx^2\mathbf{j} + e\mathbf{k}$

S : superficie acotada por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = 4$

Uso del teorema de la divergencia En los ejercicios 7 a 16, utilice el teorema de la divergencia para evaluar

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

y hallar el flujo de \mathbf{F} dirigido hacia el exterior a través de la superficie del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones. Utilice un sistema algebraico por computadora para verificar los resultados.

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$
 $S: x = 0, x = a, y = 0, y = a, z = 0, z = a$
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z^2\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3xyz\mathbf{k}$
 $S: x = 0, x = a, y = 0, y = a, z = 0, z = a$
9. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k}$
 $S: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, z = 0$
10. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - yz\mathbf{k}$
 $S: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, z = 0$
11. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 9$
12. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{j}$
 $S: x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = 5$
13. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - z\mathbf{k}$
 $S: x^2 + y^2 = 25, z = 0, z = 7$
14. $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2 + \cos z)\mathbf{i} + (x^2y + \sin z)\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$
 $S: z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}, z = 8$
15. $\mathbf{F}(x, y, z) = xe^z\mathbf{i} + ye^z\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$
 $S: z = 4 - y, z = 0, x = 0, x = 6, y = 0$
16. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$
 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 16$

Uso del teorema de la divergencia En los ejercicios 17 y 18, evalúe

$$\iiint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

donde S es la superficie cerrada del sólido acotado por las gráficas de $x = 4$ y $z = 9 - y^2$ y los planos coordenados.

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = (4xy + z^2)\mathbf{i} + (2x^2 + 6yz)\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$
18. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \cos z\mathbf{i} + yz \sin x\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$

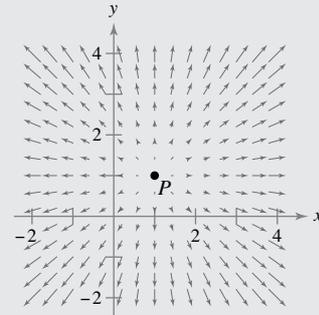
DESARROLLO DE CONCEPTOS

19. **Teorema de la divergencia** Enuncie el teorema de la divergencia.
20. **Clasificar un punto en un campo vectorial** ¿Cómo determina si un punto (x_0, y_0, z_0) de un campo vectorial es una fuente, un sumidero o es incompresible?
21. **Superficie cerrada** Compruebe que

$$\iiint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = 0$$
 para cualquier superficie cerrada S .



¿CÓMO LO VE? La gráfica muestra un campo vectorial. ¿La gráfica sugiere que la divergencia de \mathbf{F} en P es positiva, negativa o cero?



23. Volumen

- (a) Utilice el teorema de la divergencia para comprobar que el volumen del sólido acotado por una superficie S es

$$\iiint_S x \, dy \, dz = \iiint_S y \, dz \, dx = \iiint_S z \, dx \, dy.$$

- (b) Compruebe el resultado del inciso (a) para el cubo acotado por $x = 0, x = a, y = 0, y = a, z = 0$ y $z = a$.

24. **Campo vectorial constante** Para el campo vectorial constante dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, compruebe la siguiente integral para cualquier superficie cerrada S .

$$\iiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = 0$$

25. **Campo vectorial constante** Para el campo vectorial constante dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, compruebe la siguiente integral, donde V es el volumen del sólido acotado por la superficie cerrada S .

$$\iiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = 3V$$

26. **Comprobar una identidad** Para el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, compruebe que

$$\frac{1}{\|\mathbf{F}\|} \iiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \frac{3}{\|\mathbf{F}\|} \iiint_Q dV.$$

Demostración En los ejercicios 27 y 28, demuestre la identidad, suponiendo que Q, S y \mathbf{N} satisfacen las condiciones del teorema de la divergencia y que las derivadas parciales necesarias de las funciones escalares f y g son continuas. Las expresiones $D_N f$ y $D_N g$ son las derivadas en la dirección del vector \mathbf{N} y se definen por $D_N f = \nabla f \cdot \mathbf{N}$, $D_N g = \nabla g \cdot \mathbf{N}$.

$$27. \iiint_Q (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) \, dV = \iint_S f D_N g \, dS$$

[Sugerencia: Utilice $\text{div}(f\mathbf{G}) = f \text{div } \mathbf{G} + \nabla f \cdot \mathbf{G}$.]

$$28. \iiint_Q (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) \, dV = \iint_S (f D_N g - g D_N f) \, dS$$

[Sugerencia: Utilice el ejercicio 27 dos veces.]

6.9 Teorema de Stokes

- Comprender y utilizar el teorema de Stokes.
- Utilizar el rotacional para analizar el movimiento de un líquido en rotación.

Teorema de Stokes

Un segundo teorema, análogo al teorema de Green, pero con más dimensiones, es el **teorema de Stokes**, llamado así en honor al físico matemático inglés George Gabriel Stokes. Stokes formó parte de un grupo de físicos matemáticos ingleses conocido como la Escuela de Cambridge, entre los que se encontraban William Thomson (Lord Kelvin) y James Clerk Maxwell. Además de hacer contribuciones a la física, Stokes trabajó con series infinitas y con ecuaciones diferenciales, así como con los resultados de integración que se presentan en esta sección.

El teorema de Stokes establece la relación entre una integral de superficie sobre una superficie orientada S y una integral de línea a lo largo de una curva cerrada C en el espacio que forma la frontera o el borde de S , como se muestra en la figura 6.62. La dirección positiva a lo largo de C es la dirección en sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto al vector normal \mathbf{N} . Es decir, si se imagina que toma el vector normal \mathbf{N} con la mano derecha, con el dedo pulgar apuntando en la dirección de \mathbf{N} , los demás dedos apuntarán en la dirección positiva de C , como se muestra en la figura 6.63.



GEORGE GABRIEL STOKES
(1819-1903)

Stokes se convirtió en profesor Lucasiano de matemáticas en Cambridge en 1849. Cinco años después, publicó el teorema que lleva su nombre como examen para optar a un premio de investigación. Consulte LarsonCalculus.com para leer más acerca de esta biografía.

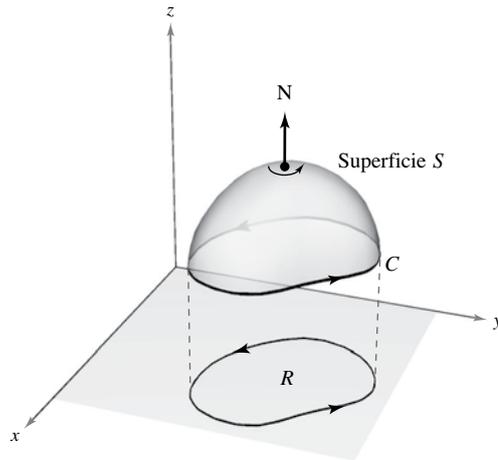


Figura 6.62



La dirección a lo largo de C es en sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto a \mathbf{N} .

Figura 6.63

TEOREMA 6.13 Teorema de Stokes

Sea S una superficie orientada con vector unitario normal \mathbf{N} , acotada por una curva cerrada simple, suave a trozos C , con orientación positiva. Si \mathbf{F} es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a S y a C , entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS.$$

En el teorema 6.13, observe que la integral de línea puede escribirse en forma diferencial $\int_C M dx + N dy + P dz$ o en forma vectorial $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$.

EJEMPLO 1 Aplicar el teorema de Stokes

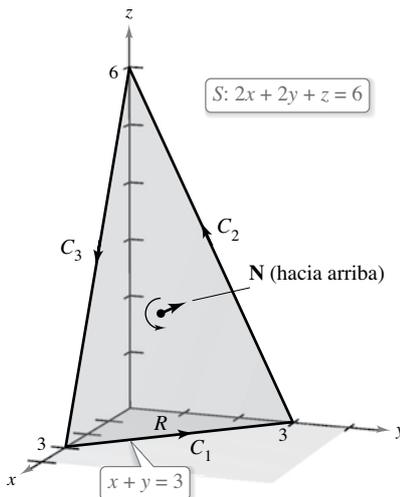


Figura 6.64

Sea C el triángulo orientado situado en el plano

$$2x + 2y + z = 6$$

como se muestra en la figura 6.64. Evalúe

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

donde $\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$.

Solución Usando el teorema de Stokes, empiece por hallar el rotacional de \mathbf{F}

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & z & x \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$$

Considerando

$$z = g(x, y) = 6 - 2x - 2y$$

puede usar el teorema 6.11 para un vector normal dirigido hacia arriba para obtener

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS \\ &= \iint_R (-\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2y\mathbf{k}) \cdot [-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}] \, dA \\ &= \iint_R (-\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2y\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \, dA \\ &= \int_0^3 \int_0^{3-y} (2y - 4) \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 (-2y^2 + 10y - 12) \, dy \\ &= \left[-\frac{2y^3}{3} + 5y^2 - 12y \right]_0^3 \\ &= -9. \end{aligned}$$

Intente evaluar la integral de línea del ejemplo 1 directamente, *sin usar* el teorema de Stokes. Una manera de hacerlo es considerar a C como la unión de C_1 , C_2 y C_3 , como sigue

$$C_1: \mathbf{r}_1(t) = (3 - t)\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 3$$

$$C_2: \mathbf{r}_2(t) = (6 - t)\mathbf{j} + (2t - 6)\mathbf{k}, \quad 3 \leq t \leq 6$$

$$C_3: \mathbf{r}_3(t) = (t - 6)\mathbf{i} + (18 - 2t)\mathbf{k}, \quad 6 \leq t \leq 9$$

El valor de la integral de la línea es

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_1'(t) \, dt + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_2'(t) \, dt + \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_3'(t) \, dt \\ &= \int_0^3 t^2 \, dt + \int_3^6 (-2t + 6) \, dt + \int_6^9 (-2t + 12) \, dt \\ &= 9 - 9 - 9 \\ &= -9. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Comprobar el teorema de Stokes

•••► Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

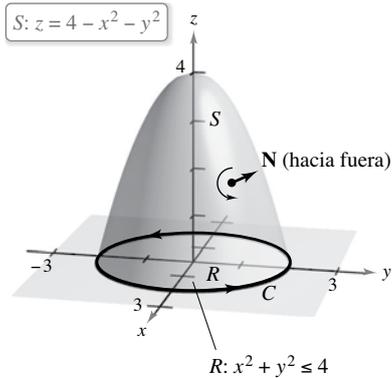


Figura 6.65

Sea S la parte del paraboloide

$$z = 4 - x^2 - y^2$$

que permanece sobre el plano xy , orientado hacia arriba (ver la figura 6.65). Sea C su curva frontera en el plano xy orientada en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. Compruebe el teorema de Stokes para

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$$

evaluando la integral de superficie y la integral de línea equivalente.

Solución Como *integral de superficie*, tiene $z = g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, $g_x = -2x$, $g_y = -2y$, y

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z & x & y^2 \end{vmatrix} = 2y\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

De acuerdo con el teorema 6.11, obtiene

$$\begin{aligned} \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iint_R (2y\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}) \, dA \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4xy + 4y + 1) \, dy \, dx \\ &= \int_{-2}^2 \left[2xy^2 + 2y^2 + y \right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \, dx \\ &= \int_{-2}^2 2\sqrt{4-x^2} \, dx \\ &= \text{Área del círculo de radio 2} \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

Como *integral de línea*, puede parametrizar C como

$$\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + 0\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Para $\mathbf{F}(x, y, z) = 2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$ obtiene

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C M \, dx + N \, dy + P \, dz \\ &= \int_C 2z \, dx + x \, dy + y^2 \, dz \\ &= \int_0^{2\pi} [0 + 2 \cos t(2 \cos t) + 0] \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 4 \cos^2 t \, dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) \, dt \\ &= 2 \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{2\pi} \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

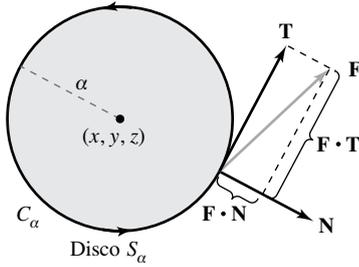


Figura 6.66

Interpretación física del rotacional

El teorema de Stokes proporciona una interesante interpretación física del rotacional. En un campo vectorial \mathbf{F} sea S_α un *pequeño* disco circular de radio α centrado en (x, y, z) y con frontera C_α , como se muestra en la figura 6.66. En cada punto en la circunferencia C_α , \mathbf{F} tiene un componente normal $\mathbf{F} \times \mathbf{N}$ y un componente tangencial $\mathbf{F} \times \mathbf{T}$. Cuanto más alineados están \mathbf{F} y \mathbf{T} , mayor es el valor de $\mathbf{F} \times \mathbf{T}$. Así, un fluido tiende a moverse a lo largo del círculo en lugar de a través de él. Por consiguiente, se dice que la integral de línea alrededor de C_α mide la **circulación de \mathbf{F} alrededor de C_α** . Es decir,

$$\int_{C_\alpha} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \text{circulación de } \mathbf{F} \text{ alrededor de } C_\alpha.$$

Ahora considere un pequeño disco S_α centrado en algún punto (x, y, z) de la superficie, como se muestra en la figura 6.67. En un disco tan pequeño, $\text{rot } \mathbf{F}$ es casi constante, porque varía poco con respecto a su valor en (x, y, z) . Es más, $\text{rot } \mathbf{F} \times \mathbf{N}$ es casi constante en S_α porque todos los vectores unitarios normales a S_α son prácticamente iguales. Por consiguiente, del teorema de Stokes se tiene que

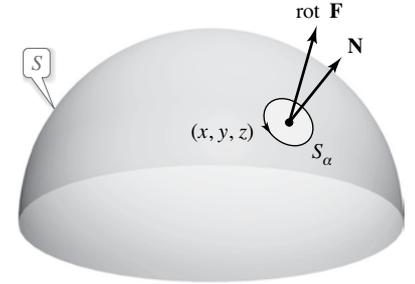


Figura 6.67

$$\begin{aligned} \int_{C_\alpha} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds &= \int_{S_\alpha} \int (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS \\ &\approx (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \int_{S_\alpha} \int dS \\ &\approx (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} (\pi\alpha^2). \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} &\approx \frac{\int_{C_\alpha} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds}{\pi\alpha^2} \\ &= \frac{\text{circulación de } \mathbf{F} \text{ alrededor de } C_\alpha}{\text{área del disco } S_\alpha} \\ &= \text{razón de circulación.} \end{aligned}$$

Suponiendo que las condiciones son tales que la aproximación mejora con discos cada vez más pequeños ($\alpha \rightarrow 0$), se deduce que

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\alpha^2} \int_{C_\alpha} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

lo que se conoce como **rotación de \mathbf{F} respecto de \mathbf{N}** . Esto es,

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{N} = \text{rotación de } \mathbf{F} \text{ respecto de } \mathbf{N} \text{ en } (x, y, z).$$

En este caso, la rotación de \mathbf{F} es máxima cuando $\text{rot } \mathbf{F}$ y \mathbf{N} tienen la misma dirección. Normalmente esta tendencia a rotar variará de punto a punto de la superficie S , y el teorema de Stokes

$$\underbrace{\int_S \int (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS}_{\text{Integral de superficie}} = \underbrace{\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}_{\text{Integral de línea}}$$

afirma que la medida colectiva de esta tendencia *rotacional* considerada sobre toda la superficie S (integral de superficie) es igual a la tendencia de un fluido a *circular* alrededor de la frontera C (integral de línea).

EJEMPLO 3 Una aplicación del rotacional

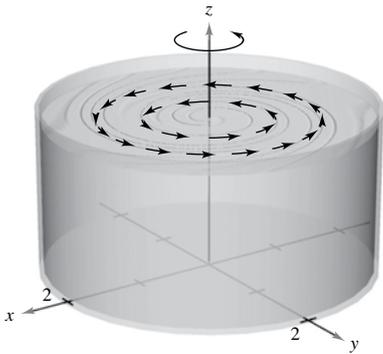


Figura 6.68

Un líquido es agitado en un recipiente cilíndrico de radio 2, de manera que su movimiento se describe por el campo de velocidad

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -y\sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{i} + x\sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{j}$$

como se muestra en la figura 6.68. Encuentre

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS$$

donde S es la superficie superior del recipiente cilíndrico.

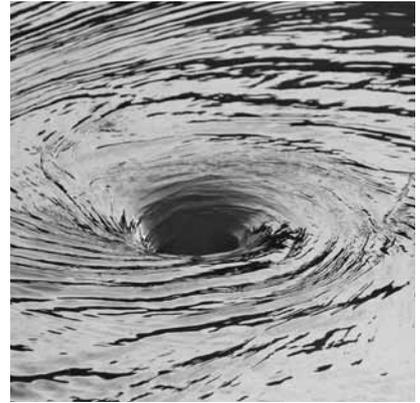
Solución El rotacional de \mathbf{F} está dado por

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y\sqrt{x^2 + y^2} & x\sqrt{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} = 3\sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{k}.$$

Haciendo $\mathbf{N} = \mathbf{k}$, tiene

$$\begin{aligned} \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iint_R 3\sqrt{x^2 + y^2} \, dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (3r)r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} r^3 \Big|_0^2 \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 8 \, d\theta \\ &= 16\pi. \end{aligned}$$

Si $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ en toda la región Q , la rotación de \mathbf{F} respecto a cada vector unitario normal \mathbf{N} es 0. Es decir, \mathbf{F} es irrotacional. De la sección 6.1, sabe que ésta es una característica de los campos vectoriales conservativos.



RESUMEN DE FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN

Teorema fundamental del cálculo

$$\int_a^b F'(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

Teorema de Green

$$\int_C M \, dx + N \, dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \, dA = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dA$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, ds = \iint_R \text{div } \mathbf{F} \, dA$$

Teorema de la divergencia

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iiint_Q \text{div } \mathbf{F} \, dV$$

Teorema fundamental de las integrales de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

Teorema de Stokes

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS$$

6.9 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Determinar el rotacional de un campo vectorial En los ejercicios 1 a 4, encuentre el rotacional del campo vectorial F .

- $F(x, y, z) = (2y - z)\mathbf{i} + e^z\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$
- $F(x, y, z) = x \sin y\mathbf{i} - y \cos x\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$
- $F(x, y, z) = e^{x^2+y^2}\mathbf{i} + e^{y^2+z^2}\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$
- $F(x, y, z) = \arcsen y\mathbf{i} + \sqrt{1 - x^2}\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$

Comprobar el teorema de Stokes En los ejercicios 5 a 8, compruebe el teorema de Stokes evaluando $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ como integral de línea e integral doble.

- $F(x, y, z) = (-y + z)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$
 $S: z = 9 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$
- $F(x, y, z) = (-y + z)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$
 $S: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
- $F(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 $S: 6x + 6y + z = 12, \text{ primer octante}$
- $F(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$
 $S: z = y^2, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq a$

Usar el teorema de Stokes En los ejercicios 9 a 18, utilice el teorema de Stokes para evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. En cada uno de los casos, C está orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj, como se vio anteriormente.

- $F(x, y, z) = 2y\mathbf{i} + 3z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$
 C : triángulo con vértices $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 2)$
- $F(x, y, z) = \arctan \frac{x}{y}\mathbf{i} + \ln \sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$
 C : triángulo con vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ y $(0, 0, 2)$
- $F(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$
 $S: z = 1 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$
- $F(x, y, z) = 4xz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 4xy\mathbf{k}$
 $S: z = 9 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$
- $F(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 $S: z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
- $F(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} - xyz\mathbf{k}$
 $S: z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
- $F(x, y, z) = -\ln \sqrt{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \arctan \frac{x}{y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$
 $S: z = 9 - 2x - 3y$ sobre $r = 2 \sin 2\theta$ en el primer octante
- $F(x, y, z) = yz\mathbf{i} + (2 - 3y)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}, \quad x^2 + y^2 \leq 16$
 S : la porción del primer octante de $x^2 + z^2 = 16$ sobre $x^2 + y^2 = 16$
- $F(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
 $S: z = x^2, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq a$
 \mathbf{N} es el vector unitario normal a la superficie, dirigido hacia abajo.
- $F(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad x^2 + y^2 \leq a^2$
 S : la porción del primer octante de $z^2 = x^2$ sobre $x^2 + y^2 = a^2$

Movimiento de un líquido En los ejercicios 19 y 20, el movimiento de un líquido en un recipiente cilíndrico de radio 1 se describe mediante el campo de velocidad $F(x, y, z)$. Encuentre $\int_S (\text{rot } F) \cdot \mathbf{N} \, dS$, donde S es la superficie superior del recipiente cilíndrico.

19. $F(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ 20. $F(x, y, z) = -z\mathbf{i} + y\mathbf{k}$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

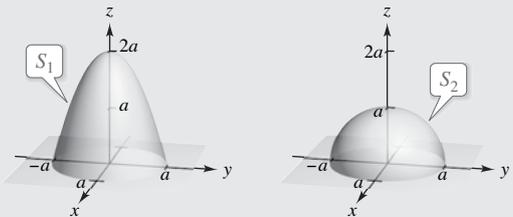
- Teorema de Stokes** Enuncie el teorema de Stokes.
- Rotacional** Dé una interpretación física del rotacional.

23. Demostración Sea C un vector constante. Sea S una superficie orientada con vector unitario normal \mathbf{N} , acotada por una curva suave C . Demuestre que

$$\iint_S \mathbf{C} \cdot \mathbf{N} \, dS = \frac{1}{2} \int_C (\mathbf{C} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$



24. ¿CÓMO LO VE? Sea S_1 la porción del paraboloide que se encuentra arriba del plano xy , y sea S_2 el hemisferio, como se muestra en las figuras. Ambas superficies están orientadas hacia arriba.



Para un campo vectorial $F(x, y, z)$ con derivadas parciales continuas, ¿se cumple que

$$\iint_{S_1} (\text{rot } F) \cdot \mathbf{N} \, dS_1 = \iint_{S_2} (\text{rot } F) \cdot \mathbf{N} \, dS_2?$$

Explique su razonamiento.

DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM

25. Sea $G(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + 4y^2}, \frac{x}{x^2 + 4y^2}, 0 \right)$.

Demuestre o refute que hay una función vectorial $F(x, y, z) = (M(x, y, z), N(x, y, z), P(x, y, z))$, con las propiedades siguientes.

- M, N, P tienen derivadas parciales continuas en todo $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$;
- $\text{rot } F = \mathbf{0}$ para todo $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$;
- $F(x, y, 0) = G(x, y)$

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition.
 © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

Ejercicios de repaso

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Dibujar un campo vectorial En los ejercicios 1 y 2, calcule $\|\mathbf{F}\|$ y dibuje varios vectores representativos en el campo vectorial. Utilice un sistema algebraico por computadora para comprobar los resultados.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ 2. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$

Determinar un campo vectorial conservativo En los ejercicios 3 y 4, encuentre el campo vectorial conservativo de la función escalar calculando su gradiente.

3. $f(x, y, z) = 2x^2 + xy + z^2$ 4. $f(x, y, z) = x^2e^{yz}$

Determinar una función potencial En los ejercicios 5 a 12, determine si el campo vectorial es conservativo. Si es conservativo, encuentre una función potencial para el campo vectorial.

5. $\mathbf{F}(x, y) = -\frac{y}{x^2}\mathbf{i} + \frac{1}{x}\mathbf{j}$ 6. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{y}\mathbf{i} - \frac{y}{x^2}\mathbf{j}$

7. $\mathbf{F}(x, y) = (xy^2 - x^2)\mathbf{i} + (x^2y + y^2)\mathbf{j}$

8. $\mathbf{F}(x, y) = (-2y^3 \sin 2x)\mathbf{i} + 3y^2(1 + \cos 2x)\mathbf{j}$

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4xy^2\mathbf{i} + 2x^2\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = (4xy + z^2)\mathbf{i} + (2x^2 + 6yz)\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$

11. $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{yz\mathbf{i} - xz\mathbf{j} - xy\mathbf{k}}{y^2z^2}$

12. $\mathbf{F}(x, y, z) = \sin z(y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k})$

Divergencia y rotacional En los ejercicios 13 a 20, encuentre (a) la divergencia del campo vectorial \mathbf{F} y (b) el rotacional del campo vectorial \mathbf{F} .

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = (\cos y + y \cos x)\mathbf{i} + (\sin x - x \sin y)\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x - y)\mathbf{i} + (y - 2z)\mathbf{j} + (z - 3x)\mathbf{k}$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = \arcsen x\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - y)\mathbf{i} - (x + \sin^2 y)\mathbf{j}$

19. $\mathbf{F}(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2)\mathbf{i} + \ln(x^2 + y^2)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{z}{x}\mathbf{i} + \frac{z}{y}\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

Evaluar una integral de línea En los ejercicios 21 a 26, calcule la integral de línea a lo largo de la(s) trayectoria(s) dada(s).

21. $\int_C (x^2 + y^2) ds$

(a) C : segmento de recta desde $(0, 0)$, hasta $(3, 4)$

(b) C : $x^2 + y^2 = 1$, una revolución en sentido contrario a las manecillas del reloj, empezando en $(1, 0)$.

22. $\int_C xy ds$

(a) C : segmento de recta desde $(0, 0)$ hasta $(5, 4)$

(b) C : en sentido contrario a las manecillas del reloj, a lo largo del triángulo de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$ y $(0, 2)$

23. $\int_C (x^2 + y^2) ds$

C : $\mathbf{r}(t) = (1 - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

24. $\int_C (x^2 + y^2) ds$

C : $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

25. $\int_C (2x - y) dx + (x + 2y) dy$

(a) C : segmento de recta desde $(0, 0)$ hasta $(3, -3)$

(b) C : una revolución en sentido contrario a las manecillas del reloj, alrededor del círculo $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$

26. $\int_C (2x - y) dx + (x + 3y) dy$

C : $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq \pi/2$

 **Evaluar una integral de línea** En los ejercicios 27 y 28, utilice un sistema algebraico por computadora para calcular la integral de línea sobre la trayectoria dada.

27. $\int_C (2x + y) ds$

$\mathbf{r}(t) = a \cos^3 t \mathbf{i} + a \sin^3 t \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq \pi/2$

28. $\int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds$

$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^{3/2}\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 4$

Área de una superficie lateral En los ejercicios 29 y 30, encuentre el área de la superficie lateral sobre la curva C en el plano xy y bajo la superficie $z = f(x, y)$.

29. $f(x, y) = 3 + \sin(x + y)$; C : $y = 2x$ desde $(0, 0)$ hasta $(2, 4)$

30. $f(x, y) = 12 - x - y$; C : $y = x^2$ desde $(0, 0)$ hasta $(2, 4)$

Evaluar una integral de línea para un campo vectorial En los ejercicios 31 a 36, evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

31. $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$

C : $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$

32. $\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$

C : $\mathbf{r}(t) = 4 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

33. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

C : $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

34. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$

C : curva de intersección de $x^2 + z^2 = 4$ y $y^2 + z^2 = 4$ desde $(2, 2, 0)$ hasta $(0, 0, 2)$

35. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$

C : curva de intersección de $z = x^2 + y^2$ y $y = x$ desde $(0, 0, 0)$ hasta $(2, 2, 8)$

36. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 - z)\mathbf{i} + (y^2 + z)\mathbf{j} + x\mathbf{k}$

C : curva de intersección de $z = x^2$ y $x^2 + y^2 = 4$ desde $(0, -2, 0)$ hasta $(0, 2, 0)$

A **Evaluar una integral de línea** En los ejercicios 37 y 38, utilice un sistema algebraico por computadora y evalúe la integral de línea.

$$37. \int_C xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy$$

C: $y = x^2$ desde $(0, 0)$ hasta $(2, 4)$ y $y = 2x$ desde $(2, 4)$ hasta $(0, 0)$

$$38. \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\mathbf{F}(x, y) = (2x - y)\mathbf{i} + (2y - x)\mathbf{j}$$

C: $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t + 2t \sin t)\mathbf{i} + (2 \sin t - 2t \cos t)\mathbf{j}$,
 $0 \leq t \leq \pi$

39. **Trabajo** Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - \sqrt{y}\mathbf{j}$ a lo largo de la trayectoria $y = x^{3/2}$ desde $(0, 0)$ hasta $(4, 8)$.

40. **Trabajo** Un avión de 20 toneladas sube 2000 pies haciendo un giro de 90° en un arco circular de 10 millas de radio. Encuentre el trabajo realizado por los motores.

Usar el teorema fundamental de las integrales de línea En los ejercicios 41 y 42, use el teorema fundamental de las integrales de línea para evaluar la integral.

$$41. \int_C 2xyz \, dx + x^2z \, dy + x^2y \, dz$$

C: curva suave desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 3, 2)$

$$42. \int_C y \, dx + x \, dy + \frac{1}{z} \, dz$$

C: curva suave desde $(0, 0, 1)$ hasta $(4, 4, 4)$

43. **Evaluar una integral de línea** Evalúe la integral de línea

$$\int_C y^2 \, dx + 2xy \, dy.$$

(a) C: $\mathbf{r}(t) = (1 + 3t)\mathbf{i} + (1 + t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$

(b) C: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j}$, $1 \leq t \leq 4$

(c) Use el teorema fundamental de las integrales de línea, donde C es una curva suave desde $(1, 1)$ hasta $(4, 2)$.

44. **Área y centroide** Considere la región acotada por el eje x y un arco de la cicloide con ecuaciones paramétricas $x = a(\theta - \sin \theta)$ y $y = a(1 - \cos \theta)$. Use las integrales de línea para encontrar (a) el área de la región y (b) el centroide de la región.

Evaluar una integral de línea En los ejercicios 45 a 50, utilice el teorema de Green para evaluar la integral de línea

$$45. \int_C y \, dx + 2x \, dy$$

C: frontera del cuadrado con vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, y $(1, 1)$

$$46. \int_C xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy$$

C: frontera del cuadrado con vértices $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$, y $(2, 2)$

$$47. \int_C xy^2 \, dx + x^2y \, dy$$

C: $x = 4 \cos t$, $y = 4 \sin t$

$$48. \int_C (x^2 - y^2) \, dx + 2xy \, dy$$

C: $x^2 + y^2 = a^2$

$$49. \int_C xy \, dx + x^2 \, dy$$

C: frontera de la región entre las gráficas $y = x^2$ y $y = 1$

$$50. \int_C y^2 \, dx + x^{4/3} \, dy$$

C: $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

A **Trazar la gráfica de una superficie paramétrica** En los ejercicios 51 y 52, utilice un sistema algebraico por computadora y represente gráficamente la superficie dada por la función vectorial

$$51. \mathbf{r}(u, v) = \sec u \cos v \mathbf{i} + (1 + 2 \tan u) \sin v \mathbf{j} + 2u \mathbf{k}$$

$$0 \leq u \leq \frac{\pi}{3}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

$$52. \mathbf{r}(u, v) = e^{-u/4} \cos v \mathbf{i} + e^{-u/4} \sin v \mathbf{j} + \frac{u}{6} \mathbf{k}$$

$$0 \leq u \leq 4, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

A **53. Investigación** Considere la superficie representada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = 3 \cos v \cos u \mathbf{i} + 3 \cos v \sin u \mathbf{j} + \sin v \mathbf{k}.$$

Utilice un sistema algebraico por computadora para efectuar lo siguiente.

(a) Trace la gráfica de la superficie para $0 \leq u \leq 2\pi$ y $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

(b) Trace la gráfica de la superficie para $0 \leq u \leq 2\pi$ y $\frac{\pi}{4} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

(c) Trace la gráfica de la superficie para $0 \leq u \leq \frac{\pi}{4}$ y $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$.

(d) Trace la gráfica e identifique la curva espacial para $0 \leq u \leq 2\pi$ y $v = \frac{\pi}{4}$.

(e) Aproxime el área de la superficie graficada en el inciso (b).

(f) Aproxime el área de la superficie graficada en el inciso (c).

54. **Evaluar la integral de superficie** Evalúe la integral de superficie $\int_S \int z \, dS$ sobre la superficie S :

$$\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + \sin v \mathbf{k}$$

donde $0 \leq u \leq 2$ y $0 \leq v \leq \pi$.

A **55. Aproximar una integral de superficie** Utilice un sistema algebraico por computadora para trazar la gráfica de la superficie S y aproximar la integral de superficie

$$\iint_S (x + y) \, dS$$

donde S es la superficie.

S : $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + (u - 1)(2 - u)\mathbf{k}$
sobre $0 \leq u \leq 2$ y $0 \leq v \leq 2\pi$.

56. **Masa** Una lámina S con superficie en forma de cono está dada por

$$z = a(a - \sqrt{x^2 + y^2}), \quad 0 \leq z \leq a^2.$$

En cada punto de S , la densidad es proporcional a la distancia entre el punto y el eje z .

- (a) Dibuje la superficie en forma de cono.
- (b) Determine la masa de la lámina.

Comprobar el teorema de la divergencia En los ejercicios 57 y 58, compruebe el teorema de la divergencia mediante la evaluación

$$\iiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

como una integral de superficie y como una triple integral.

57. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

Q : región sólida acotada por los planos coordenados y el plano $2x + 3y + 4z = 12$

58. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

Q : región sólida acotada por los planos coordenados y el plano $2x + 3y + 4z = 12$

Comprobar el teorema de Stokes En los ejercicios 59 y 60, compruebe el teorema de Stokes mediante la evaluación

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

como una integral de línea y como una integral doble.

59. $\mathbf{F}(x, y, z) = (\cos y + y \cos x)\mathbf{i} + (\sin x - x \sin y)\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$

S : porción de $z = y^2$ sobre el cuadrado en el plano con vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, a) y $(0, a)$

\mathbf{N} es el vector normal unitario hacia arriba a la superficie.

60. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - z)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$

S : porción del primer cuadrante del plano $3x + y + 2z = 12$

61. **Demostración** Demuestre que no es posible que un campo vectorial con componentes dos veces derivables tenga un rotacional de $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

PROYECTO DE TRABAJO

El planímetro

Ha aprendido muchas técnicas de cálculo para encontrar el área de una región plana. Los ingenieros usan un dispositivo mecánico llamado *planímetro* para medir áreas planas, que se basa en la fórmula del área dada en el teorema 6.9. Como puede ver en la figura, el planímetro está fijo en el punto O (pero libre para pivotear) y tiene una bisagra en A . El extremo del brazo trazador AB se mueve en sentido antihorario alrededor de la región R . Una pequeña rueda es perpendicular a \overline{AB} y está marcada con una escala para medir cuánto rueda conforme B traza la frontera de la región R . En este proyecto, demostrará que el área de R está dada por la longitud L del brazo trazador \overline{AB} multiplicada por la distancia D que rueda la rueda.

Suponga que el punto B traza la frontera de R para $a \leq t \leq b$. El punto A se moverá hacia adelante y hacia atrás a lo largo de un arco circular alrededor del origen O . Sea $\theta(t)$ el ángulo en la figura y sean $(x(t), y(t))$ las coordenadas de A .

(a) Demuestre que el vector \overrightarrow{OB} está dado por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = [x(t) + L \cos \theta(t)]\mathbf{i} + [y(t) + L \sin \theta(t)]\mathbf{j}.$$

(b) Demuestre que las siguientes dos integrales son iguales a cero.

$$I_1 = \int_a^b \frac{1}{2} L^2 \frac{d\theta}{dt} dt \quad I_2 = \int_a^b \frac{1}{2} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt$$

(c) Utilice la integral $\int_a^b [x(t) \sin \theta(t) - y(t) \cos \theta(t)]' dt$ para demostrar que las dos integrales siguientes son iguales.

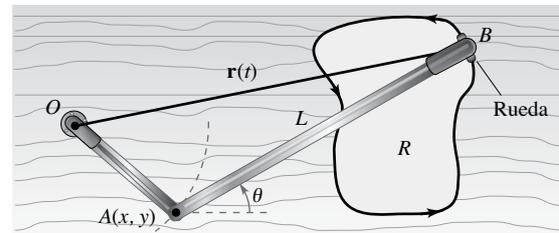
$$I_3 = \int_a^b \frac{1}{2} L \left(y \sin \theta \frac{d\theta}{dt} + x \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right) dt$$

$$I_4 = \int_a^b \frac{1}{2} L \left(-\sin \theta \frac{dx}{dt} + \cos \theta \frac{dy}{dt} \right) dt$$

(d) Sea $\mathbf{N} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$. Explique por qué la distancia D que gira la rueda está dada por

$$D = \int_C \mathbf{N} \cdot \mathbf{T} \, ds.$$

(e) Demuestre que el área de la región R está dada por $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = DL$.



■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para mayor información acerca del teorema de Green y planímetros, consulte el artículo "As the Planimeter's Wheel Turns: Planimeter Proofs for Calculus Class", de Tanya Leise, en *The College Mathematics Journal*. Para ver este artículo, visite MathArticles.com.

Solución de problemas

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

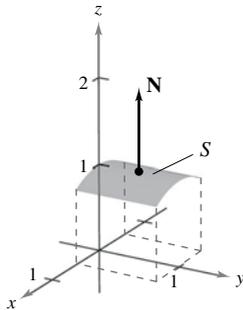
1. **Flujo de calor** Considere una sola fuente de calor localizada en el origen con temperatura

$$T(x, y, z) = \frac{25}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

- (a) Calcule el flujo de calor a través de la superficie

$$S = \left\{ (x, y, z): z = \sqrt{1 - x^2}, -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 1 \right\}$$

como se muestra en la figura.



- (b) Repita el cálculo del inciso (a) usando la parametrización

$$x = \cos u, \quad y = v, \quad z = \sin u$$

donde

$$\frac{\pi}{3} \leq u \leq \frac{2\pi}{3} \quad \text{y} \quad 0 \leq v \leq 1.$$

2. **Flujo de calor** Considere una sola fuente de calor localizada en el origen con temperatura

$$T(x, y, z) = \frac{25}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

- (a) Calcule el flujo de calor a través de la superficie

$$S = \left\{ (x, y, z): z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

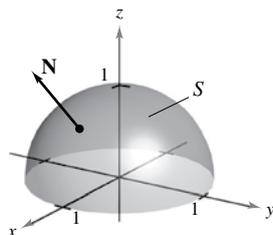
como se muestra en la figura.

- (b) Repita el cálculo del inciso (a) usando la parametrización

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \cos u \sin v, \quad z = \sin u$$

donde

$$0 \leq u \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$



3. **Momentos de inercia** Considere un alambre de densidad $\rho(x, y, z)$ dado por la curva espacial

$$C: \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b.$$

Los **momentos de inercia** respecto a los ejes x , y y z están dados por

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2)\rho(x, y, z) \, ds$$

$$I_y = \int_C (x^2 + z^2)\rho(x, y, z) \, ds$$

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)\rho(x, y, z) \, ds.$$

Encuentre los momentos de inercia para un alambre de densidad uniforme $\rho = 1$ en la forma de la hélice

$$\mathbf{r}(t) = 3 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (\text{ver figura}).$$

$$\mathbf{r}(t) = 3 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}$$

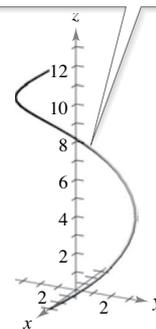


Figura para 3

$$\mathbf{r}(t) = \frac{t^2}{2} \mathbf{i} + t \mathbf{j} + \frac{2\sqrt{2}t^{3/2}}{3} \mathbf{k}$$

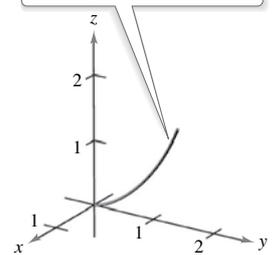


Figura para 4

4. **Momentos de inercia** Encuentre los momentos de inercia del cable de densidad $\rho = \frac{1}{1+t}$ dado por la curva

$$C: \mathbf{r}(t) = \frac{t^2}{2} \mathbf{i} + t \mathbf{j} + \frac{2\sqrt{2}t^{3/2}}{3} \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (\text{ver figura}).$$

5. **Ecuación de Laplace** Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, y sea $f(x, y, z) = \|\mathbf{F}(x, y, z)\|$.

(a) Demuestre que $\nabla(\ln f) = \frac{\mathbf{F}}{f^2}$.

(b) Demuestre que $\nabla\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{\mathbf{F}}{f^3}$.

(c) Demuestre que $\nabla f^n = n f^{n-2} \mathbf{F}$.

- (d) El **laplaciano** es el operador diferencial

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

y la ecuación de Laplace es

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0.$$

Cualquier función que satisface esta ecuación se llama **armónica**. Demuestre que la función $w = 1/f$ es armónica.

6. Teorema de Green Considere la integral de línea

$$\int_C y^n dx + x^n dy$$

donde C es la frontera de la región que yace entre las gráficas de $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ ($a > 0$) y $y = 0$.

- (a) Use un sistema algebraico por computadora para comprobar el teorema de Green para n , un entero impar de 1 a 7.
- (b) Use un sistema algebraico por computadora para comprobar el teorema de Green para n , un entero par de 2 a 8.
- (c) Para un entero impar n , haga una conjetura acerca del valor de la integral.

7. Área Utilice una integral de línea para calcular el área acotada por un arco de la cicloide $x(\theta) = a(\theta - \text{sen } \theta)$, $y(\theta) = a(1 - \text{cos } \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, como se muestra en la figura.

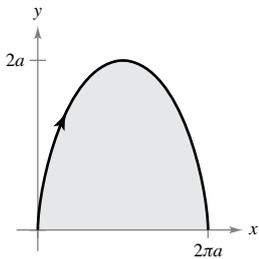


Figura para 7

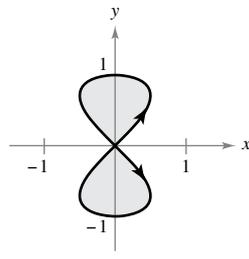


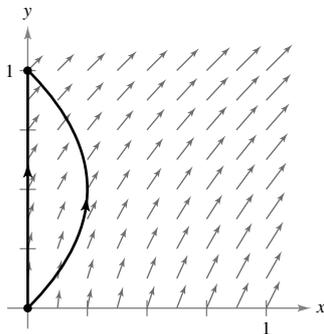
Figura para 8

8. Área Utilice una integral de línea para hallar el área acotada por los dos lazos de la curva en forma de ocho

$$x(t) = \frac{1}{2} \text{sen } 2t, \quad y(t) = \text{sen } t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

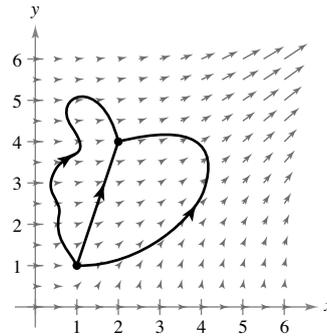
como se muestra en la figura.

9. Trabajo El campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (x^2 + 1)\mathbf{j}$ actúa sobre un objeto que se mueve del punto $(0, 0)$ al punto $(0, 1)$, como se muestra en la figura.



- (a) Encuentre el trabajo realizado si el objeto sigue la trayectoria $x = 0$, $0 \leq y \leq 1$.
- (b) Encuentre el trabajo realizado si el objeto sigue la trayectoria $x = y - y^2$, $0 \leq y \leq 1$.
- (c) Suponga que el objeto sigue la trayectoria $x = c(y - y^2)$, $0 \leq y \leq 1$, $c > 0$. Encuentre el valor de la constante c que minimiza el trabajo.

10. Trabajo El campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2y^2)\mathbf{i} + (2x^3y)\mathbf{j}$ se muestra en la siguiente figura. Tres partículas se mueven del punto $(1, 1)$ al punto $(2, 4)$ a lo largo de trayectorias diferentes. Explique por qué el trabajo realizado es el mismo con las tres partículas y encuentre el valor del trabajo.



11. Demostración Sea S una superficie suave orientada, con vector normal \mathbf{N} , acotada por una curva suave simple cerrada C . Sea \mathbf{v} un vector constante. Demuestre que

$$\iint_S (2\mathbf{v} \cdot \mathbf{N}) dS = \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

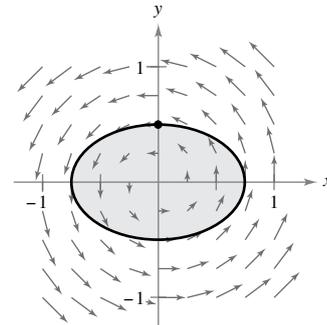
12. Área y trabajo ¿Cómo se compara el área de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con la magnitud del trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y) = -\frac{1}{2}y\mathbf{i} + \frac{1}{2}x\mathbf{j}$$

sobre una partícula que da una vuelta alrededor de la elipse (vea la figura)?



13. Comprobar identidades

- (a) Sean f y g funciones escalares con derivadas parciales continuas, si se satisfacen las condiciones C y S del teorema de Stokes, compruebe cada una de las identidades siguientes.

$$(i) \int_C (f \nabla g) \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{N} dS$$

$$(ii) \int_C (f \nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (iii) \int_C (f \nabla g + g \nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

- (b) Demuestre los resultados del inciso (a) para las funciones $f(x, y, z) = xyz$, y sea $g(x, y, z) = z$. Sea S el hemisferio $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.