E Números complejos

- **Utilizar la unidad imaginaria *i* para escribir números complejos y sumar, restar, multiplicar y dividir números complejos.**
- **Encontrar las soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas.**
- **Escribir la forma trigonométrica de un número complejo.**
- **Encontrar potencias y raíces *n*-ésimas de números complejos.**

Operaciones con números complejos

Algunas ecuaciones no tienen soluciones reales. Por ejemplo, la ecuación cuadrática

$$x^2 + 1 = 0 \qquad \text{Ecuación sin soluciones reales}$$

No tiene soluciones reales porque no existe un número real x que elevado al cuadrado de -1. Para contrarrestar esta deficiencia, los matemáticos crearon un sistema expandido de números utilizando la ***unidad imaginaria i***, definida como

$$i = \sqrt{-1} \qquad \text{Unidad imaginaria}$$

Donde $i^2 = -1$. Al sumar números reales a múltiplos reales de la unidad imaginaria, se obtiene el conjunto de los **números complejos**. Cada número complejo puede ser escrito en su **forma estándar** (o **forma binomial**) $a + bi$. El número real a se conoce como la **parte real** del número complejo $a + bi$, y el número bi (donde b es un número real) se conoce como la **parte imaginaria** del número complejo.

Definición de un número complejo

Dados a y b números reales, el número

$$a + bi$$

Es un **número complejo**. Si $b \neq 0$, entonces $a + bi$ también se llama un **número imaginario**.
Un número de la forma bi, con $b \neq 0$, se llama un **número imaginario puro**.

Para sumar (o restar) dos números complejos, se suman (o se restan) las partes reales e imaginarias de los números respectivamente por separado.

Adición y sustracción de números complejos

Si $a + bi$ y $c + di$ son dos números complejos escritos en forma estándar, entonces su suma y su diferencia se definen de la siguiente manera.

Suma: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Diferencia: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

La **identidad aditiva** en el sistema de los números complejos es el cero (el mismo que en el sistema de los números reales). Además el inverso aditivo del número complejo $a + bi$ es.

$$-(a + bi) = -a - bi. \qquad \text{Inverso aditivo.}$$

De esta manera, se tiene

$$(a + bi) + (-a - bi) = 0 + 0i = 0.$$

EJEMPLO 1 **Adición y sustracción de números complejos**

a. $(3 - i) + (2 + 3i) = 3 - i + 2 + 3i$ — Remover paréntesis.

$= 3 + 2 - i + 3i$ — Agrupar términos semejantes.

$= (3 + 2) + (-1 + 3)i$

$= 5 + 2i$ — Escribir en forma estándar.

b. $2i + (-4 - 2i) = 2i - 4 - 2i$ — Remover paréntesis.

$= -4 + 2i - 2i$ — Agrupar términos semejantes.

$= -4$ — Escribir en forma estándar.

c. $3- (-2 + 3i) + (-5 + i) = 3 + 2 - 3i - 5 + i$

$= 3 + 2 - 5 - 3i + i$

$= 0 - 2i$

$= -2i$ ■

En el ejemplo 1(b), se observa que la suma de dos números complejos puede dar por resultado un número real.

Muchas de las propiedades de los números reales son válidas para los números complejos por igual. He aquí algunos ejemplos.

Propiedades asociativas de la suma y la multiplicación
Propiedades conmutativas de la suma y la multiplicación
Propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma

Obsérvese a continuación cómo se usan estas propiedades cuando se multiplican dos números complejos.

$(a + bi)(c + di) = a(c + di) + bi(c + di)$ — Propiedad distributiva.

$= ac + (ad)i + (bc)i + (bd)i^2$ — Propiedad distributiva.

$= ac + (ad)i + (bc)i + (bd)(-1)$ — $i^2 = -1$

$= ac - bd + (ad)i + (bc)i$ — Propiedad conmutativa.

$= (ac - bd) + (ad + bc)i$ — Propiedad asociativa.

COMENTARIO En lugar de intentar memorizar la regla de la multiplicación de la derecha, simplemente se puede recordar cómo se usa la propiedad distributiva para multiplicar dos números complejos. El procedimiento es similar a multiplicar dos polinomios y agrupando términos semejantes.

El procedimiento anterior es similar a multiplicar dos polinomios, como en el llamado método FOIL (por sus siglas en inglés, “First Outer Inner Last” que consiste básicamente en multiplicar primero los términos externos y al último los términos internos).

EJEMPLO 2 **Multiplicación de números complejos**

a.
$$\begin{aligned}(3+2i)(3-2i) &= 3(3-2i)+2i(3-2i) && \text{Propiedad distributiva.}\\ &= 9-6i+6i-4i^2 && \text{Propiedad distributiva.}\\ &= 9-6i+6i-4(-1) && i^2=-1\\ &= 9+4 && \text{Simplificar.}\\ &= 13 && \text{Escribir en forma estándar.}\end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned}(3+2i)^2 &= (3+2i)(3+2i) && \text{Binomio al cuadrado.}\\ &= 3(3+2i)+2i(3+2i) && \text{Propiedad distributiva.}\\ &= 9+6i+6i+4i^2 && \text{Propiedad distributiva.}\\ &= 9+6i+6i+4(-1) && i^2=-1\\ &= 9+12i-4 && \text{Simplificar.}\\ &= 5+12i && \text{Escribir en forma estándar.}\end{aligned}$$

En el ejemplo 2 (a), se observa que el producto de dos números complejos puede ser un número real. Esto ocurre con pares de números complejos de la forma $a + bi$ y $a - bi$ llamados **complejos conjugados**.

$$\begin{aligned}(a+bi)(a-bi) &= a^2-abi+abi-b^2i^2\\ &= a^2-b^2(-1)\\ &= a^2+b^2\end{aligned}$$

Para escribir el cociente de $a + bi$ y $c + bi$ en forma estándar, donde c y d no son simultáneamente cero, se multiplica tanto el numerador como el denominador por el complejo conjugado del denominador para obtener

$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di} &= \frac{a+bi}{c+di}\left(\frac{c-di}{c-di}\right) && \text{Multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador}\\ &= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}. && \text{Escribir en forma estándar.}\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 **Expresar un número complejo en forma estándar**

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{4-2i} &= \frac{2+3i}{4-2i}\left(\frac{4+2i}{4+2i}\right) && \text{Multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador}\\ &= \frac{8+4i+12i+6i^2}{16-4i^2} && \text{Expandir.}\\ &= \frac{8-6+16i}{16+4} && i^2=-1\\ &= \frac{2+16i}{20} && \text{Simplificar.}\\ &= \frac{1}{10}+\frac{4}{5}i && \text{escribir en forma estándar.}\end{aligned}$$

Soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas

Cuando se usa la fórmula general para resolver una ecuación cuadrática, a menudo se obtienen soluciones como $\sqrt{-3}$, la cual se sabe, no es un número real. Al factorizar $\sqrt{-1}$, se puede escribir este número en forma estándar.

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3(-1)} = \sqrt{3}\sqrt{-1} = \sqrt{3}i$$

El número $\sqrt{3}i$ es conocido como la raíz cuadrada principal de -3.

COMENTARIO La definición de la raíz cuadrada principal utiliza la regla

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

para $a > 0$ y $b < 0$. Esta regla no es válida cuando *ambos* a y b son negativos. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\sqrt{-5}\sqrt{-5} &= \sqrt{5(-1)}\sqrt{5(-1)}\\ &= \sqrt{5}i\sqrt{5}i\\ &= \sqrt{25}i^2\\ &= 5i^2\\ &= -5\end{aligned}$$

donde

$$\sqrt{(-5)(-5)} = \sqrt{25} = 5.$$

Para evitar algunos problemas con la multiplicación de raíces cuadradas de números negativos, se debe estar seguro de convertirlos a su forma estándar *antes* de multiplicarlos.

Raíz cuadrada principal de un número negativo

Sea a es un número positivo, entonces la **raíz cuadrada principal** del número negativo $-a$ se define como

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}i.$$

EJEMPLO 4 Expresar números complejos en forma polar

a. $$\begin{aligned}\sqrt{-3}\sqrt{-12} &= \sqrt{3}i\sqrt{12}i\\ &= \sqrt{36}i^2\\ &= 6(-1)\\ &= -6\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned}\sqrt{-48} - \sqrt{-27} &= \sqrt{48}i - \sqrt{27}i\\ &= 4\sqrt{3}i - 3\sqrt{3}i\\ &= \sqrt{3}i\end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned}\left(-1 + \sqrt{-3}\right)^2 &= \left(-1 + \sqrt{3}i\right)^2\\ &= (-1)^2 - 2\sqrt{3}i + \left(\sqrt{3}\right)^2(i^2)\\ &= 1 - 2\sqrt{3}i + 3(-1)\\ &= -2 - 2\sqrt{3}i\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Soluciones complejas de una ecuación cuadrática

Resolver $3x^2 - 2x + 5 = 0$.

Solución

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(5)}}{2(3)}$$ Fórmula general.

$$= \frac{2 \pm \sqrt{-56}}{6}$$ Simplificar.

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{14}i}{6}$$ Escribir $\sqrt{-56}$ en forma estándar.

$$= \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{14}}{3}i$$ Escribir en forma estándar.

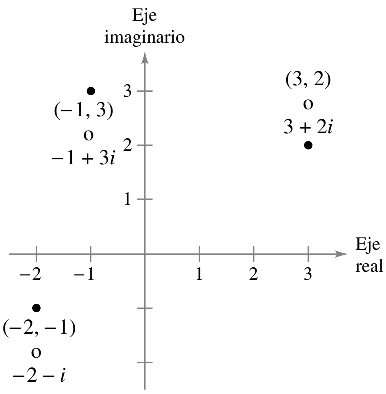

Figura E.1

Forma trigonométrica de un número complejo

Así como los números reales se pueden representar mediante puntos en la recta numérica real, un número complejo de la forma

$$z = a + bi$$

se puede representar como el punto (a, b) en un plano de coordenadas (el **plano complejo**). El eje horizontal es llamado **eje real** y el eje vertical se llama **eje imaginario**, como se muestra en la figura E.1.

El **valor absoluto** (o módulo) de un número complejo $a + bi$ se define como la distancia entre el origen (0, 0) y el punto (a, b).

> **El valor absoluto de un número complejo**
>
> El valor absoluto del número complejo $a + bi$ está dado por
>
> $$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Cuando el número complejo $a + bi$ es un número real (es decir si $b = 0$) la definición anterior concuerda con el valor absoluto de un número real.

$$|a + 0i| = \sqrt{a^2 + 0^2} = |a|$$

Para trabajar de manera eficiente con *potencias* y *raíces* de números complejos, es útil escribir a los números complejos en **forma trigonométrica**. En la figura E.2, se considera un número complejo no cero $a + bi$. Si θ es el ángulo medido desde el eje real positivo hasta el segmento de línea que conecta el origen y el punto (a, b) (medido en sentido antihorario) se puede escribir

$$a = r\cos\theta \quad \text{y} \quad b = r \operatorname{sen}\theta$$

donde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. En consecuencia, se tiene

$$a + bi = (r\cos\theta) + (r\operatorname{sen}\theta)i$$

de donde se puede obtener la **forma trigonométrica de un número complejo**.

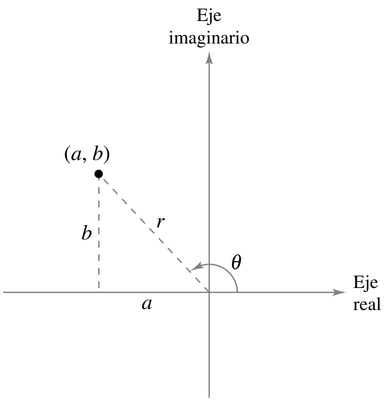

Figura E.2

> **Forma trigonométrica de un número complejo**
>
> La **forma trigonométrica** del número complejo $z = a + bi$ está dada por
>
> $$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$
>
> donde $a = r\cos\theta$, $b = r\operatorname{sen}\theta$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, y $\tan\theta = b/a$. El número r se conoce como el **módulo** de z y θ es llamado el **argumento** de z.

La forma trigonométrica de un número complejo también se llama **forma polar**. Dado que existen infinitas maneras de escoger θ, la forma trigonométrica de un número complejo no es única. Normalmente, θ está restringido al intervalo $0 \le \theta < 2\pi$, sin embargo, en ocasiones es conveniente utilizar $\theta < 0$.

EJEMPLO 6 **Forma trigonométrica de un complejo**

Escribir el número complejo $z = -2 - 2\sqrt{3}i$ en forma trigonométrica.

Solución El valor absoluto de z es

$$r = |-2 - 2\sqrt{3}i| = \sqrt{(-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$$

y el ángulo θ esta dado por

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{b}{a}\\ &= \frac{-2\sqrt{3}}{-2}\\ &= \sqrt{3}.\end{aligned}$$

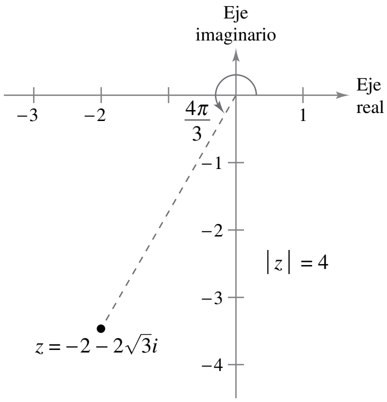

Figura E.3

Debido a que $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$ y a que $z = -2 - 2\sqrt{3}i$ está en el cuadrante III, se escoge que $\theta = \pi + \pi/3 = 4\pi/3$. De manera que la forma trigonométrica es

$$\begin{aligned}z &= r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\\ &= 4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

Ver figura E.3.

La forma trigonométrica se adapta de una manera muy conveniente a la multiplicación y división de complejos. Consideremos los dos números complejos

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) \quad \text{y} \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2).$$

El producto de z_1 y z_2 es

$$\begin{aligned}z_1z_2 &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)\\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)].\end{aligned}$$

Usando las fórmulas del seno y coseno para la suma y diferencia de dos ángulos, la ecuación anterior se puede reescribir como

$$\operatorname{sen}\ z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

Esta expresión se muestra en la primera parte de la regla mostrada a continuación. La verificación de la segunda parte se asigna como ejercicio al lector (ver ejercicio 109).

Producto y cociente de dos números complejos

Sean $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$ dos números complejos. Entonces

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \qquad \text{Producto.}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)], \quad z_2 \neq 0 \qquad \text{Cociente.}$$

Nótese que esta regla no dice que para multiplicar dos números complejos se multiplican los módulos y se suman los argumentos, mientras que, para dividir dos números complejos se dividen los módulos y se restan los argumentos.

EJEMPLO 7 Multiplicación de números complejos

Encontrar el producto $z_1 z_2$ de los números complejos.

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right), \quad z_2 = 8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}\right)$$

Solución

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right) \cdot 8\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}\right) \\ &= 16\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{11\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{11\pi}{6}\right)\right] && \text{multiplicar módulos y sumar argumentos.} \\ &= 16\left[\cos\frac{5\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}\right] \\ &= 16\left[\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right] && \frac{5\pi}{2} \text{ y } \frac{\pi}{2} \text{ son coterminales.} \\ &= 16[0 + i(1)] \\ &= 16i \end{aligned}$$

Se puede verificar este resultado convirtiendo a su forma estándar los números $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$ y $z_2 = 4\sqrt{3} - 4i$ y posteriormente multiplicarlos algebraicamente.

EJEMPLO 8 División de números complejos

Encontrar el cociente z_1/z_2 de los números complejos

$$z_1 = 24\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right) \text{ y } z_2 = 8\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}\right)$$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{24\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right)}{8\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}\right)} && \text{Dividir módulos y restar argumentos} \\ &= \frac{24}{8}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{5\pi}{12}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{5\pi}{12}\right)\right) \\ &= 3\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) \\ &= 3\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] \\ &= -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i \end{aligned}$$

Potencias y raíces de números complejos

Para elevar un número complejo a una potencia, se hace uso repetido de la regla de la multiplicación.

$$\begin{aligned} z &= r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \\ z^2 &= r^2(\cos 2\theta + i\operatorname{sen} 2\theta) \\ z^3 &= r^3(\cos 3\theta + i\operatorname{sen} 3\theta) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Este patrón da origen al siguiente teorema, que lleva el nombre del matemático francés Abraham DeMoivre (1667-1754).

TEOREMA E.1 Teorema de DeMoivre

Si $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ es un número complejo y n un entero positivo, entonces

$$z^n = [r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta).$$

EJEMPLO 9 Encontrar potencias de un número complejo

Utilizar el Teorema de DeMoivre para encontrar $(-1 + \sqrt{3}i)^{12}$.

Solución Primero se convierte el número complejo a su forma trigonométrica.

$$-1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$$

Entonces por el Teorema de DeMoivre, se tiene

$$\begin{aligned} (-1 + \sqrt{3}i)^{12} &= \left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{12} \\ &= 2^{12}\left[\cos\left(12\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(12\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ &= 4096(\cos 8\pi + i\operatorname{sen} 8\pi) \\ &= 4096. \end{aligned}$$

Se recuerda que una consecuencia del teorema fundamental del álgebra es que toda ecuación polinomial de grado n tiene n soluciones en el sistema de números complejos. Cada solución es una raíz n-ésima de la ecuación. La *n-ésima raíz* de un número complejo se define a continuación.

Definición de la raíz *n*-ésima de un número complejo

El número complejo $u = a + bi$ es una **raíz *n*-ésima** de z cuando

$$z = u^n = (a + bi)^n.$$

Para obtener una fórmula que permita calcular las raíces n-ésimas de un número complejo, suponga que u una raíz n-ésima de z, donde

$$u = s(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta) \quad \text{y} \quad z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

Por el Teorema de DeMoivre y dado que $u^n = z$, se tiene

$$s^n(\cos n\beta + i \operatorname{sen} n\beta) = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

Tomando el valor absoluto de cada lado de esta ecuación, se sigue que $s^n = r$. Sustituyendo r por s^n en la ecuación anterior y dividiendo por r, tenemos

$$\cos n\beta + i \operatorname{sen} n\beta = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta.$$

De manera que

$$\cos n\beta = \cos \theta \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} n\beta = \operatorname{sen} \theta.$$

Debido a que ambas funciones seno y coseno tienen un período de 2π, estas dos últimas ecuaciones tienen soluciones si y solo si los ángulos difieren en un múltiplo de 2π. En consecuencia, debe existir un número entero k tal que

$$n\beta = \theta + 2\pi k$$
$$\beta = \frac{\theta + 2\pi k}{n}.$$

Al sustituir este valor β en la expresión que define a u, se obtiene el resultado establecido en el siguiente teorema.

TEOREMA E.2 Raíces *n*-ésimas de un número complejo

Si n es un entero positivo, el número complejo $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ tiene exactamente n raíces diferentes dadas por

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos \frac{\theta + 2\pi k}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Para $k > n - 1$, las raíces empiezan a repetirse. Por ejemplo, cuando $k = n$, el ángulo

$$\frac{\theta + 2\pi n}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$$

es coterminal con θ/n, el cual también se obtiene cuando $k = 0$.

La fórmula para las raíces n-ésimas de un número complejo z tiene una interesante interpretación geométrica, como se muestra en la Figura E.4. Se observa que como todas las raíces tienen la misma magnitud $\sqrt[n]{r}$, entonces todas se encuentran sobre una circunferencia de radio $\sqrt[n]{r}$ y con centro en el origen. Más aún, debido a que dos n-ésimas consecutivas tienen argumentos que difieren por un valor de $2\pi/n$, entonces las raíces están igualmente espaciadas a lo largo de la circunferencia.

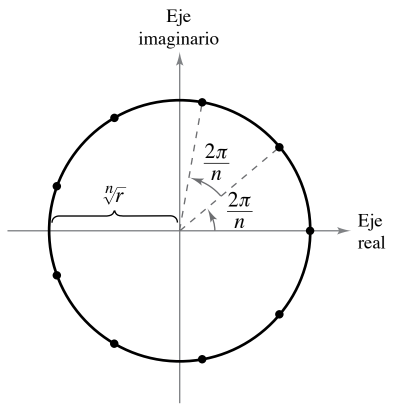

Figura E.4

EJEMPLO 10 **Calculo de las raíces *n*-ésimas de un número complejo**

Hallar las tres raíces cúbicas de $z = -2 + 2i$.

Solución Dado que z está en el cuadrante II, su forma trigonométrica es

$$z = -2 + 2i = \sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right).$$

Al aplicar la fórmula para las raíces n-ésimas, las raíces cúbicas tienen la forma.

$$\sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right).$$

Finalmente, al considerar los valores $k = 1, 2, 3$, se tienen las raíces

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i$$

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{12}\right) \approx -1.3660 + 0.3660i$$

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{19\pi}{12}\right) \approx 0.3660 - 1.3660i.$$

E Ejercicios

Realizar operaciones **En los ejercicios 1-24, realizar la operación indicada y escribir el resultado en forma estándar.**

1. $(5 + i) + (6 - 2i)$
2. $(13 - 2i) + (-5 + 6i)$
3. $(8 - i) - (4 - i)$
4. $(3 + 2i) - (6 + 13i)$
5. $\left(-2 + \sqrt{-8}\right) + \left(5 - \sqrt{-50}\right)$
6. $\left(8 + \sqrt{-18}\right) - \left(4 + 3\sqrt{2}i\right)$
7. $13i - (14 - 7i)$
8. $22 + (-5 + 8i) + 10i$
9. $-\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i\right) + \left(\frac{5}{3} + \frac{11}{3}i\right)$
10. $(1.6 + 3.2i) + (-5.8 + 4.3i)$
11. $\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-2}$
12. $\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-10}$
13. $\left(\sqrt{-10}\right)^2$
14. $\left(\sqrt{-75}\right)^2$
15. $(1 + i)(3 - 2i)$
16. $(6 - 2i)(2 - 3i)$
17. $6i(5 - 2i)$
18. $-8i(9 + 4i)$
19. $\left(\sqrt{14} + \sqrt{10}i\right)\left(\sqrt{14} - \sqrt{10}i\right)$
20. $\left(3 + \sqrt{-5}\right)\left(7 - \sqrt{-10}\right)$
21. $(4 + 5i)^2$
22. $(2 - 3i)^2$
23. $(2 + 3i)^2 + (2 - 3i)^2$
24. $(1 - 2i)^2 - (1 + 2i)^2$

Escribir un complejo conjugado **En los ejercicios 25-32, escribir el complejo conjugado del número dado. Posteriormente, multiplicar el número por su complejo conjugado.**

25. $5 + 3i$
26. $9 - 12i$
27. $-2 - \sqrt{5}i$
28. $-4 + \sqrt{2}i$
29. $20i$
30. $\sqrt{-15}$
31. $\sqrt{8}$
32. $1 + \sqrt{8}$

Escribir en forma estándar **En los ejercicios 33-42, escribir el cociente en forma estándar.**

33. $\dfrac{6}{i}$
34. $-\dfrac{10}{2i}$
35. $\dfrac{4}{4 - 5i}$
36. $\dfrac{3}{1 - i}$
37. $\dfrac{2 + i}{2 - i}$
38. $\dfrac{8 - 7i}{1 - 2i}$
39. $\dfrac{6 - 7i}{i}$
40. $\dfrac{8 + 20i}{2i}$
41. $\dfrac{1}{(4 - 5i)^2}$
42. $\dfrac{(2 - 3i)(5i)}{2 + 3i}$

Realizar operaciones **En los ejercicios 43-46, realizar la operación indicada y escribir el resultado en forma estándar.**

43. $\dfrac{2}{1 + i} - \dfrac{3}{1 - i}$
44. $\dfrac{2i}{2 + i} + \dfrac{5}{2 - i}$
45. $\dfrac{i}{3 - 2i} + \dfrac{2i}{3 + 8i}$
46. $\dfrac{1 + i}{i} - \dfrac{3}{4 - i}$

Usar la fórmula general cuadrática **En los ejercicios 47-54, utilizar la fórmula general cuadrática para resolver la ecuación dada.**

47. $x^2 - 2x + 2 = 0$

48. $x^2 + 6x + 10 = 0$

49. $4x^2 + 16x + 17 = 0$

50. $9x^2 - 6x + 37 = 0$

51. $4x^2 + 16x + 15 = 0$

52. $9x^2 - 6x - 35 = 0$

53. $16t^2 - 4t + 3 = 0$

54. $5s^2 + 6s + 3 = 0$

Escribir en forma estándar **En los ejercicios 55-62, simplificar el número complejo y escribirlo en forma estándar.**

55. $-6i^3 + i^2$

56. $4i^2 - 2i^3$

57. $-5i^5$

58. $(-i)^3$

59. $(\sqrt{-75})^3$

60. $(\sqrt{-2})^6$

61. $\dfrac{1}{i^3}$

62. $\dfrac{1}{(2i)^3}$

Valor absoluto de un complejo **En los ejercicios 63-68, graficar el número complejo y hallar su valor absoluto.**

63. $-5i$

64. -5

65. $-4 + 4i$

66. $5 - 12i$

67. $6 - 7i$

68. $-8 + 3i$

Escribir en forma trigonométrica **En los ejercicios 69-76, representar el número complejo gráficamente y encontrar su forma trigonométrica.**

69. $3 - 3i$

70. $2 + 2i$

71. $\sqrt{3} + i$

72. $-1 + \sqrt{3}i$

73. $-2(1 + \sqrt{3}i)$

74. $\frac{5}{2}(\sqrt{3} - i)$

75. $6i$

76. 4

Escribir en forma estándar **En los ejercicios 77-82, representar gráficamente el número complejo y encontrar su forma estándar.**

77. $2\left(\cos \dfrac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{6}\right)$

78. $5\left(\cos \dfrac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{4}\right)$

79. $\dfrac{3}{2}\left(\cos \dfrac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{3}\right)$

80. $\dfrac{3}{4}\left(\cos \dfrac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \dfrac{7\pi}{4}\right)$

81. $3.75\left(\cos \dfrac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{4}\right)$

82. $8\left(\cos \dfrac{\pi}{12} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{12}\right)$

Realizar operaciones **En los ejercicios 83-86, realizar la operación y expreasr el resultado en forma trigonométrica.**

83. $\left[3\left(\cos \dfrac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{3}\right)\right]\left[4\left(\cos \dfrac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

84. $\left[\dfrac{3}{2}\left(\cos \dfrac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2}\right)\right]\left[6\left(\cos \dfrac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

85. $\left[\dfrac{5}{3}\left(\cos \dfrac{7\pi}{9} + i \operatorname{sen} \dfrac{7\pi}{9}\right)\right]\left[\dfrac{2}{3}\left(\cos \dfrac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{3}\right)\right]$

86. $\dfrac{\cos(5\pi/3) + i \operatorname{sen}(5\pi/3)}{\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi}$

Usar el teorema de DeMoivre **En los ejercicios 87-94, utilizar el teorema de DeMoivre para encontrar la potencia indicada del número complejo dado. Escribir el resultado en forma estándar.**

87. $(1 + i)^5$

88. $(2 + 2i)^6$

89. $(-1 + i)^{10}$

90. $(1 - i)^{12}$

91. $2(\sqrt{3} + i)^7$

92. $4(1 - \sqrt{3}i)^3$

93. $\left(\cos \dfrac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{4}\right)^{10}$

94. $\left[2\left(\cos \dfrac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2}\right)\right]^8$

Encontrar raíces *n*-ésimas **En los ejercicios 95-100. *a*) utilizar el Teorema E.2 para encontrar las raíces indicadas del número complejo, *b*) representar gráficamente cada raíz y *c*) escribir cada una de las raíces en forma estándar.**

95. Raíces cuadradas de $5\left(\cos \dfrac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{3}\right)$

96. Raíces cuadradas de $16\left(\cos \dfrac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{3}\right)$

97. Raíces cuartas de $16\left(\cos \dfrac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \dfrac{4\pi}{3}\right)$

98. Raíces cuartas de $32\left(\cos \dfrac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{6}\right)$

99. Raíces cúbicas de $-\dfrac{125}{2}(1 + \sqrt{3}i)$

100. Raíces cúbicas de $-4\sqrt{2}(1 - i)$

Resolver una ecuación **En los ejercicios 101-108, usar el Teorema E.2 para encontrar todas las soluciones de la ecuación y representar las solucione gráficamente.**

101. $x^4 - i = 0$

102. $x^3 + 1 = 0$

103. $x^5 + 243 = 0$

104. $x^4 - 81 = 0$

105. $x^3 + 64i = 0$

106. $x^6 - 64i = 0$

107. $x^3 - (1 - i) = 0$

108. $x^4 + (1 + i) = 0$

Demostrar Dados dos números complejos.

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \quad \text{y} \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$$

mostrar que

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)], \quad z_2 \neq 0.$$