

Respuestas a ejercicios seleccionados

Conjunto de ejercicios 1.1

- Para cada parte, $f \in C[a, b]$ en el intervalo determinado. Puesto que $f(a)$ y $f(b)$ son de signo opuesto, por el teorema de valor intermedio implica que existe un número c con $f(c) = 0$.
- $[0, 1]$ contiene una solución de $x - 2^{-x} = 0$
 - $[-1, 0]$ contiene una solución de $2x \cos(2x) - (x + 1)^2 = 0$
 - $[0, 1]$ contiene una solución de $3x - e^x = 0$
 - $[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]$ contiene una solución de $x + 1 - 2 \sin(\pi x) = 0$
- El valor máximo para $|f(x)|$ es:
 - 0.4620981
 - 0.8
 - 5.164000
 - 1.582572
- Para cada parte, $f \in C[a, b]$, f' existe en (a, b) y $f(a) = f(b) = 0$. El teorema de Rolle implica que existe un número c en (a, b) con $f'(c) = 0$. Para la parte (d), podemos utilizar $[a, b] = [-1, 0]$ o $[a, b] = [0, 2]$.
- $P_2(x) = 0$
 - $R_2(0.5) = 0.125$; error real = 0.125
 - $P_2(x) = 1 + 3(x - 1) + 3(x - 1)^2$
 - $R_2(0.5) = -0.125$; error real = -0.125
- Puesto que

$$P_2(x) = 1 + x \quad y \quad R_2(x) = \frac{-2e^{\xi}(\sin \xi + \cos \xi)}{6} x^3$$

para algunas ξ entre x y 0, tenemos lo siguiente

- $P_2(0.5) = 1.5$ y $|f(0.5) - P_2(0.5)| \leq 0.0932$;
 - $|f(x) - P_2(x)| \leq 1.252$;
 - $\int_0^1 f(x) dx \approx 1.5$;
 - $|\int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 P_2(x) dx| \leq \int_0^1 |R_2(x)| dx \leq 0.313$, y el error real es 0.122.
- $P_3(x) = (x - 1)^2 - \frac{1}{2}(x - 1)^3$
 - $P_3(0.5) = 0.312500$, $f(0.5) = 0.346574$. Una cota del error es $0.291\overline{6}$, y el error real es 0.034074.
 - $|f(x) - P_3(x)| \leq 0.291\overline{6}$ en $[0.5, 1.5]$
 - $\int_{0.5}^{1.5} P_3(x) dx = 0.08\overline{3}$, $\int_{0.5}^{1.5} (x - 1) \ln x dx = 0.088020$
 - Una cota del error es $0.058\overline{3}$, y el error real es 4.687×10^{-3} .
 - $P_4(x) = x + x^3$
 - $|f(x) - P_4(x)| \leq 0.012405$
 - $\int_0^{0.4} P_4(x) dx = 0.0864$, $\int_0^{0.4} x e^{x^2} dx = 0.086755$
 - 8.27×10^{-4}
 - $P_4'(0.2) = 1.12$, $f'(0.2) = 1.124076$. El error real es 4.076×10^{-3} .
 - Puesto que $42^\circ = 7\pi/30$ radianes, use $x_0 = \pi/4$. Entonces

$$\left| R_n \left(\frac{7\pi}{30} \right) \right| \leq \frac{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{30} \right)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{(0.053)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Para $|R_n(\frac{7\pi}{30})| < 10^{-6}$, es suficiente tomar $n = 3$. Para 7 dígitos, $\cos 42^\circ = 0.7431448$ y $P_3(42^\circ) = P_3(\frac{7\pi}{30}) = 0.7431446$, por lo que el error real es 2×10^{-7} .

$$19. P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k, \quad n \geq 7$$

21. Una cota para el error máximo es 0.0026.

23. Puesto que $R_2(1) = \frac{1}{6}e^\xi$, para algunas ξ en $(0, 1)$, tenemos $|E - R_2(1)| = \frac{1}{6}|1 - e^\xi| \leq \frac{1}{6}(e - 1)$.

R2 Respuestas a ejercicios seleccionados

25. a. $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ para $k = 0, 1, \dots, n$. Las formas de P_n y f son iguales en x_0 .
b. $P_2(x) = 3 + 4(x - 1) + 3(x - 1)^2$.
27. Primero, observe que para $f(x) = x - \sin x$, tenemos $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ porque $-1 \leq \cos x \leq 1$ para todos los valores de x .
a. La observación implica que $f(x)$ no disminuye para todos los valores de x , y en especial que $f(x) > f(0) = 0$ cuando $x > 0$. Por tanto, para $x \geq 0$, tenemos $x \geq \sin x$, y $|\sin x| = \sin x \leq x = |x|$.
b. Cuando $x < 0$, tenemos $-x > 0$. Puesto que $\sin x$ es una función impar, el hecho de que (por la parte a)) $\sin(-x) \leq (-x)$ implica que $|\sin x| = -\sin x \leq -x = |x|$.
- Como consecuencia, para todos los números reales x , tenemos $|\sin x| \leq |x|$.
29. a. El número $\frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))$ es el promedio de $f(x_1)$ y $f(x_2)$, por lo que se encuentra entre estos dos valores de f . Mediante el teorema de valor intermedio 1.11, existe un número ξ entre x_1 y x_2 con

$$f(\xi) = \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2)) = \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2).$$

- b. Si $m = \min\{f(x_1), f(x_2)\}$ y $M = \max\{f(x_1), f(x_2)\}$. Entonces $m \leq f(x_1) \leq M$ y $m \leq f(x_2) \leq M$, por lo que

$$c_1 m \leq c_1 f(x_1) \leq c_1 M \quad \text{y} \quad c_2 m \leq c_2 f(x_2) \leq c_2 M.$$

Por lo tanto,

$$(c_1 + c_2)m \leq c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) \leq (c_1 + c_2)M$$

y

$$m \leq \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)}{c_1 + c_2} \leq M.$$

Por el teorema de valor intermedio 1.11 aplicado al intervalo con extremos x_1 y x_2 , existe un número ξ entre x_1 y x_2 para el que

$$f(\xi) = \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)}{c_1 + c_2}.$$

- c. Si $f(x) = x^2 + 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $c_1 = 2$, y $c_2 = -1$. Entonces para todos los valores de x ,

$$f(x) > 0 \quad \text{pero} \quad \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)}{c_1 + c_2} = \frac{2(1) - 1(2)}{2 - 1} = 0.$$

Conjunto de ejercicios 1.2

1.	Error absoluto	Error relativo
a.	0.001264	4.025×10^{-4}
b.	7.346×10^{-6}	2.338×10^{-6}
c.	2.818×10^{-4}	1.037×10^{-4}
d.	2.136×10^{-4}	1.510×10^{-4}

3. Los intervalos más grandes son

a. (149.85, 150.15)

b. (899.1, 900.9)

c. (1498.5, 1501.5)

d. (89.91, 90.09)

5. Los cálculos y sus errores son:

a. i) 17/15	ii) 1.13	iii) 1.13	iv) ambos 3×10^{-3}
b. i) 4/15	ii) 0.266	iii) 0.266	iv) ambos 2.5×10^{-3}
c. i) 139/660	ii) 0.211	iii) 0.210	iv) 2×10^{-3} , 3×10^{-3}
d. i) 301/660	ii) 0.455	iii) 0.456	iv) 2×10^{-3} , 1×10^{-4}

d. 2 597 000; error real 1960; error relativo 7.541×10^{-4} .

R 4 Respuestas a ejercicios seleccionados

29. a. El error real es $|f'(\xi)\epsilon|$, y el error relativo es $|f'(\xi)\epsilon| \cdot |f(x_0)|^{-1}$, donde el número ξ está entre x_0 y $x_0 + \epsilon$.
b. i) 1.4×10^{-5} ; 5.1×10^{-6} ii) 2.7×10^{-6} ; 3.2×10^{-6} c. i) 1.2; 5.1×10^{-5} ii) 4.2×10^{-5} ; 7.8×10^{-5}

Conjunto de ejercicios 1.3

1. a. Las sumas aproximadas son 1.53 y 1.54, respectivamente. El valor real es 1.549. El error de redondeo significativo se presenta antes con el primer método.
2. b. Las sumas aproximadas son 1.16 y 1.19, respectivamente. El valor real es 1.197. El error de redondeo significativo se presenta antes con el primer método.
3. a. 2000 términos b. 20 000 000 000 términos
5. 3 términos
7. Las velocidades de convergencia son:
a. $O(h^2)$ b. $O(h)$ c. $O(h^2)$ d. $O(h)$
9. a. Si $F(h) = L + O(h^p)$, existe una constante $k > 0$ tal que

$$|F(h) - L| \leq kh^p,$$

Para h suficientemente pequeña $h > 0$. Si $0 < q < p$ y $0 < h < 1$, entonces $h^q > h^p$. Por lo tanto, $kh^p < kh^q$, por lo que

$$|F(h) - L| \leq kh^q \quad \text{y} \quad F(h) = L + O(h^q).$$

- b. Para varias potencias de h , tenemos las entradas en la siguiente tabla

h	h^2	h^3	h^4
0.5	0.25	0.125	0.0625
0.1	0.01	0.001	0.0001
0.01	0.0001	0.00001	10^{-8}
0.001	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}

La velocidad de convergencia más rápida es $O(h^4)$.

11. Puesto que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x \quad \text{y} \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n},$$

tenemos

$$x = 1 + \frac{1}{x}, \quad \text{por lo que} \quad x^2 - x - 1 = 0.$$

La fórmula cuadrática implica que

$$x = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}).$$

Este número recibe el nombre de *número áureo*. Con frecuencia aparece en matemáticas y ciencias.

13. $SUM = \sum_{i=1}^N x_i$. Esto guarda un paso ya que la inicialización es $SUM = x_1$ en lugar de $SUM = 0$. Se pueden presentar problemas si $N = 0$.
15. a) $n(n+1)/2$ multiplicaciones; $(n+2)(n-1)/2$ sumas.
b) $\sum_{i=1}^n a_i \left(\sum_{j=1}^i b_j \right)$ requiere n multiplicaciones; $(n+2)(n-1)/2$ sumas.

Conjunto de ejercicios 2.1

1. $p_3 = 0.625$
3. El método de bisección da:
a. $p_7 = 0.5859$ b. $p_8 = 3.002$ c. $p_7 = 3.419$

5. El método de bisección da:

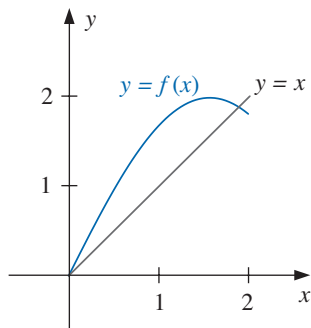
a. $p_{17} = 0.641182$

b. $p_{17} = 0.257530$

c. Para el intervalo $[-3, -2]$, tenemos $p_{17} = -2.191307$, y para el intervalo $[-1, 0]$, tenemos $p_{17} = -0.798164$.

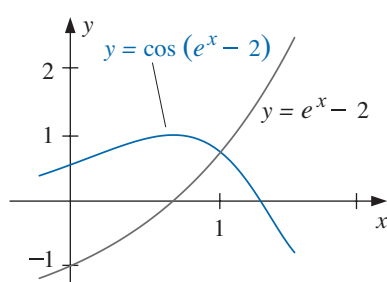
d. Para el intervalo $[0.2, 0.3]$, tenemos $p_{14} = 0.297528$, y para el intervalo $[1.2, 1.3]$, tenemos $p_{14} = 1.256622$.

7. a.



b. Al utilizar $[15, 2]$ en la parte a) se obtiene $p_{16} = 1.89550018$.

9. a.



b. $p_{17} = 1.00762177$

11. a. 2

b. -2

c. -1

d. 1

13. La raíz cúbica de 25 es aproximadamente $p_{14} = 2.92401$, usando $[2, 3]$.

15. La profundidad del agua es 0.838 pies.

17. Una cota es $n \geq 14$, y $p_{14} = 1.32477$.

19. Puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n - p_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$, la diferencia en los términos se acerca a cero. Sin embargo, p_n es el enésimo término de la serie armónica divergente, por lo que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty$.

21. Puesto que $-1 < a < 0$ y $2 < b < 3$, tenemos $1 < a + b < 3$ o $1/2 < 1/2(a + b) < 3/2$ en todos los casos. Además,

$$f(x) < 0, \quad \text{para } -1 < x < 0 \quad \text{y} \quad 1 < x < 2;$$

$$f(x) > 0, \quad \text{para } 0 < x < 1 \quad \text{y} \quad 2 < x < 3.$$

Por lo tanto, $a_1 = a$, $f(a_1) < 0$, $b_1 = b$, y $f(b_1) > 0$.

a. Puesto que $a + b < 2$, tenemos $p_1 = \frac{a+b}{2}$ y $1/2 < p_1 < 1$. Por lo tanto, $f(p_1) > 0$. Por lo tanto, $a_2 = a_1 = a$ y $b_2 = p_1$. El único cero de f en $[a_2, b_2]$ es $p = 0$, por lo que la convergencia sería en 0.

b. Puesto que $a + b > 2$, tenemos $p_1 = \frac{a+b}{2}$ y $1 < p_1 < 3/2$. Por lo tanto, $f(p_1) < 0$. Por lo tanto, $a_2 = p_1$ y $b_2 = b_1 = b$. El único cero de f en $[a_2, b_2]$ es $p = 2$, por lo que la convergencia sería en 2.

c. Puesto que $a + b = 2$, tenemos $p_1 = \frac{a+b}{2} = 1$ y $f(p_1) = 0$. Por lo tanto, un cero de f se ha encontrado en la primera iteración. La convergencia sería en $p = 1$.

Conjunto de ejercicios 2.2

1. Para el valor de x bajo consideración, tenemos

a. $x = (3 + x - 2x^2)^{1/4} \Leftrightarrow x^4 = 3 + x - 2x^2 \Leftrightarrow f(x) = 0$

b. $x = \left(\frac{x + 3 - x^4}{2} \right)^{1/2} \Leftrightarrow 2x^2 = x + 3 - x^4 \Leftrightarrow f(x) = 0$

c. $x = \left(\frac{x+3}{x^2+2} \right)^{1/2} \Leftrightarrow x^2(x^2+2) = x+3 \Leftrightarrow f(x) = 0$

d. $x = \frac{3x^4+2x^2+3}{4x^3+4x-1} \Leftrightarrow 4x^4+4x^2-x = 3x^4+2x^2+3 \Leftrightarrow f(x) = 0$

3. a. Resuelva para $2x$, a continuación divida entre 2. $p_1 = 0.5625, p_2 = 0.58898926, p_3 = 0.60216264, p_4 = 0.60917204$
 b. Resuelva para x^3 , divida entre x^2 . $p_1 = 0, p_2$ indefinida.
 c. Resuelva para x^3 , divida entre x , a continuación tome la raíz cuadrada positiva. $p_1 = 0, p_2$ indefinida.
 d. Resuelva para x^3 , a continuación tome la raíz cuadrada negativa. $p_1 = 0, p_2 = -1, p_3 = -1.4422496, p_4 = -1.57197274$. Las partes a) y b) parecen prometedoras.
 5. El orden en la velocidad descendente de convergencia es b), d), a). La sucesión en c) no converge.
 7. Con $g(x) = (3x^2+3)^{1/4}$ y $p_0 = 1, p_6 = 1.94332$ es exacta dentro de 0.01.
 9. Puesto que $g'(x) = \frac{1}{4} \cos \frac{x}{2}$, g es continua y g' existe en $[0, 2\pi]$. Además, $g(x) = 0$ solamente cuando $x = \pi$, de tal forma que $g(0) = g(2\pi) = \pi \leq g(x) \leq g(\pi) = \pi + \frac{1}{2}$ y $|g'(x)| \leq \frac{1}{4}$, para $0 \leq x \leq 2\pi$. El teorema 2.3 implica que existe un solo punto p fijo en $[0, 2\pi]$. Con $k = \frac{1}{4}$ y $p_0 = \pi$, tenemos $p_1 = \pi + \frac{1}{2}$. El corolario 2.5 implica que

$$|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1-k} |p_1 - p_0| = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n.$$

Para que la cota sea menor a 0.1, necesitamos $n \geq 4$. Sin embargo, $p_3 = 3.626996$ es exacta dentro de 0.01.

11. Para $p_0 = 1.0$ y $g(x) = 0.5(x + \frac{3}{x})$, tenemos $\sqrt{3} \approx p_4 = 1.73205$.
 13. a. Con $[0, 1]$ y $p_0 = 0$, tenemos $p_9 = 0.257531$. b. Con $[2.5, 3.0]$ y $p_0 = 2.5$, tenemos $p_{17} = 2.690650$.
 c. Con $[0.25, 1]$ y $p_0 = 0.25$, tenemos $p_{14} = 0.909999$. d. Con $[0.3, 0.7]$ y $p_0 = 0.3$, tenemos $p_{39} = 0.469625$.
 e. Con $[0.3, 0.6]$ y $p_0 = 0.3$, tenemos $p_{48} = 0.448059$. f. Con $[0, 1]$ y $p_0 = 0$, tenemos $p_6 = 0.704812$.
 15. Para $g(x) = (2x^2 - 10 \cos x)/(3x)$, tenemos lo siguiente:

$$p_0 = 3 \Rightarrow p_8 = 3.16193; \quad p_0 = -3 \Rightarrow p_8 = -3.16193.$$

Para $g(x) = \arccos(-0.1x^2)$, tenemos lo siguiente:

$$p_0 = 1 \Rightarrow p_{11} = 1.96882; \quad p_0 = -1 \Rightarrow p_{11} = -1.96882.$$

17. Con $g(x) = \frac{1}{\pi} \arcsin(-\frac{x}{2}) + 2$, tenemos $p_5 = 1.683855$.
 19. Puesto que g' es continua en p y $|g'(p)| > 1$, al permitir que $\epsilon = |g'(p)| - 1$ existe un número $\delta > 0$ tal que $|g'(x) - g'(p)| < |g'(p)| - 1$ siempre que $0 < |x - p| < \delta$. Por lo tanto, para cualquier x que satisfaga $0 < |x - p| < \delta$, tenemos

$$|g'(x)| \geq |g'(p)| - |g'(x) - g'(p)| > |g'(p)| - (|g'(p)| - 1) = 1.$$

Si p_0 se selecciona de tal forma que $0 < |p - p_0| < \delta$, por el teorema de valor medio tenemos que

$$|p_1 - p| = |g(p_0) - g(p)| = |g'(\xi)| |p_0 - p|,$$

para algunos ξ entre p_0 y p . Por lo tanto, $0 < |p - \xi| < \delta$ so $|p_1 - p| = |g'(\xi)| |p_0 - p| > |p_0 - p|$.

21. Uno de muchos ejemplos es $g(x) = \sqrt{2x-1}$ en $[\frac{1}{2}, 1]$.

23. a. Suponga que $x_0 > \sqrt{2}$. Entonces,

$$x_1 - \sqrt{2} = g(x_0) - g(\sqrt{2}) = g'(\xi) (x_0 - \sqrt{2}),$$

donde $\sqrt{2} < \xi < x$. Por lo tanto, $x_1 - \sqrt{2} > 0$ y $x_1 > \sqrt{2}$. Además,

$$x_1 = \frac{x_0}{2} + \frac{1}{x_0} < \frac{x_0}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x_0 + \sqrt{2}}{2}$$

y $\sqrt{2} < x_1 < x_0$. Mediante un argumento inductivo,

$$\sqrt{2} < x_{m+1} < x_m < \dots < x_0.$$

Por lo tanto, $\{x_m\}$ es una sucesión decreciente, acotada inferiormente y debe converger.

Suponga que $p = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m$. Entonces

$$p = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{m-1}}{2} + \frac{1}{x_{m-1}} \right) = \frac{p}{2} + \frac{1}{p}. \quad \text{Por lo tanto, } p = \frac{p}{2} + \frac{1}{p},$$

lo cual implica que $p = \pm\sqrt{2}$. Ya que $x_m > \sqrt{2}$ para todas las m , tenemos $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \sqrt{2}$.

b. Tenemos

$$0 < (x_0 - \sqrt{2})^2 = x_0^2 - 2x_0\sqrt{2} + 2,$$

de tal forma que $2x_0\sqrt{2} < x_0^2 + 2$ y $\sqrt{2} < \frac{x_0}{2} + \frac{1}{x_0} = x_1$.

c. Caso 1: $0 < x_0 < \sqrt{2}$, lo cual implica que $\sqrt{2} < x_1$ mediante la parte b). Por lo tanto,

$$0 < x_0 < \sqrt{2} < x_{m+1} < x_m < \dots < x_1 \quad \text{y} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \sqrt{2}.$$

Caso 2: $x_0 = \sqrt{2}$, lo cual implica que $x_m = \sqrt{2}$ para todas las m y $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \sqrt{2}$.

Caso 3: $x_0 > \sqrt{2}$, lo cual, mediante la parte a), implica que $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \sqrt{2}$.

25. Reemplace la segunda oración en la demostración con “Puesto que g satisface una condición de Lipschitz en $[a, b]$ con una constante de Lipschitz $L < 1$, tenemos, para cada n ,

$$|p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)| \leq L|p_{n-1} - p|."$$

El resto de la prueba es igual, con k reemplazada por L .

Conjunto de ejercicios 2.3

- 1.** $p_2 = 2.60714$
- 3. a.** 2.45454 **b.** 2.44444
- 5. a.** Para $p_0 = 2$, tenemos $p_5 = 2.69065$. **b.** Para $p_0 = -3$, tenemos $p_3 = -2.87939$.
c. Para $p_0 = 0$, tenemos $p_4 = 0.73909$. **d.** Para $p_0 = 0$, tenemos $p_3 = 0.96434$.
- 7.** Usando los extremos de los intervalos como p_0 y p_1 , tenemos:
a. $p_{11} = 2.69065$ **b.** $p_7 = -2.87939$ **c.** $p_6 = 0.73909$ **d.** $p_5 = 0.96433$
- 9.** Usando los extremos de los intervalos como p_0 y p_1 , tenemos:
a. $p_{16} = 2.69060$ **b.** $p_6 = -2.87938$ **c.** $p_7 = 0.73908$ **d.** $p_6 = 0.96433$
- 11. a.** El método de Newton con $p_0 = 1.5$ da $p_3 = 1.51213455$.
El método de la secante con $p_0 = 1$ y $p_1 = 2$ da $p_{10} = 1.51213455$.
El método de posición falsa con $p_0 = 1$ y $p_1 = 2$ da $p_{17} = 1.51212954$.
b. El método de Newton con $p_0 = 0.5$ da $p_5 = 0.976773017$.
El método de la secante con $p_0 = 0$ y $p_1 = 1$ da $p_5 = 10.976773017$.
El método de posición falsa con $p_0 = 0$ y $p_1 = 1$ da $p_5 = 0.976772976$.
- 13. a.** Para $p_0 = -1$ y $p_1 = 0$, tenemos $p_{17} = -0.04065850$, y para $p_0 = 0$ y $p_1 = 1$, tenemos $p_9 = 0.9623984$.
b. Para $p_0 = -1$ y $p_1 = 0$, tenemos $p_5 = -0.04065929$, y para $p_0 = 0$ y $p_1 = 1$, tenemos $p_{12} = -0.04065929$.
c. Para $p_0 = -0.5$, tenemos $p_5 = -0.04065929$, y para $p_0 = 0.5$, tenemos $p_{21} = 0.9623989$.
- 15. a.** $p_0 = -10$, $p_{11} = -4.30624527$ **b.** $p_0 = -5$, $p_5 = -4.30624527$
c. $p_0 = -3$, $p_5 = 0.824498585$ **d.** $p_0 = -1$, $p_4 = -0.824498585$
e. $p_0 = 0$, p_1 no se puede calcular, ya que $f'(0) = 0$ **f.** $p_0 = 1$, $p_4 = 0.824498585$
g. $p_0 = 3$, $p_5 = -0.824498585$ **h.** $p_0 = 5$, $p_5 = 4.30624527$
i. $p_0 = 10$, $p_{11} = 4.30624527$
- 17.** Para $f(x) = \ln(x^2 + 1) - e^{0.4x} \cos \pi x$, tenemos las siguientes raíces.
a. Para $p_0 = -0.5$, $p_3 = -0.4341431$.
b. Para $p_0 = 0.5$, $p_3 = 0.4506567$.
Para $p_0 = 1.5$, $p_3 = 1.7447381$.
Para $p_0 = 2.5$, $p_5 = 2.2383198$.
Para $p_0 = 3.5$, $p_4 = 3.7090412$.
c. La aproximación inicial $n - 0.5$ es bastante razonable.
d. Para $p_0 = 24.5$, $p_2 = 24.4998870$.

19. Para $p_0 = 1$, $p_5 = 0.589755$. El punto tiene las coordenadas $(0.589755, 0.347811)$.
21. Los dos números son aproximadamente 6.512849 y 13.487151.
23. El deudor puede pagar máximo 8.10 %.
25. Tenemos $P_L = 265816$, $c = -0.75658125$, y $k = 0.045017502$. La población de 1980 es $P(30) = 222\,248\,320$ y la población de 2010 es $P(60) = 252\,967\,030$.
27. Por medio de $p_0 = 0.5$ y $p_1 = 0.9$, el método de la secante da $p_5 = 0.842$.
29. a. Tenemos, aproximadamente,

$$A = 17.74, \quad B = 87.21, \quad C = 9.66, \quad \text{y} \quad E = 47.47$$

Con estos valores, tenemos

$$A \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + B \operatorname{sen}^2 \alpha - C \cos \alpha - E \operatorname{sen} \alpha = 0.02.$$

- b.** El método de Newton da $\alpha \approx 33.2^\circ$.
- 31.** La ecuación de la recta tangente es

$$y - f(p_{n-1}) = f'(p_{n-1})(x - p_{n-1}).$$

Para completar este problema, establezca $y = 0$ y resuelva para $x = p_n$.

Conjunto de ejercicios 2.4

1. a. Para $p_0 = 0.5$, tenemos $p_{13} = 0.567135$.
c. Para $p_0 = 0.5$, tenemos $p_{22} = 0.641166$.
2. a. Para $p_0 = -1.5$, tenemos $p_{23} = -1.414325$.
d. Para $p_0 = -0.5$, tenemos $p_{23} = -0.183274$.
3. El método modificado de Newton en la ecuación (2.11) provee lo siguiente:
a. Para $p_0 = 0.5$, tenemos $p_3 = 0.567143$.
b. Para $p_0 = -1.5$, tenemos $p_2 = -1.414158$.
c. Para $p_0 = 0.5$, tenemos $p_3 = 0.641274$.
d. Para $p_0 = -0.5$, tenemos $p_5 = -0.183319$.
5. El método de Newton con $p_0 = -0.5$ da $p_{13} = -0.169607$. El método de Newton modificado en la ecuación (2.11) con $p_0 = -0.5$ da $p_{11} = -0.169607$.
7. a. Para $k > 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1} - 0|}{|p_n - 0|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^k}}{\frac{1}{n^k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^k = 1,$$

por lo que la convergencia es lineal.

- b. Necesitamos tener $N > 10^{m/k}$.
9. Los ejemplos comunes son
- a. $p_n = 10^{-3^n}$
- b. $p_n = 10^{-\alpha^n}$

11. Esto sigue al hecho de que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{b-a}{2^{n+1}} \right|}{\left| \frac{b-a}{2^n} \right|} = \frac{1}{2}$.

13. Si $\frac{|p_{n+1}-p|}{|p_n-p|^3} = 0.75$ y $|p_0 - p| = 0.5$, entonces $|p_n - p| = (0.75)^{(3^n-1)/2} |p_0 - p|^{3^n}$.
Para tener $|p_n - p| \leq 10^{-8}$ se requiere que $n \geq 3$.

Conjunto de ejercicios 2.5

1. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

	a	b	c	d
\hat{p}_0	0.258684	0.907859	0.548101	0.731385
\hat{p}_1	0.257613	0.909568	0.547915	0.736087
\hat{p}_2	0.257536	0.909917	0.547847	0.737653
\hat{p}_3	0.257531	0.909989	0.547823	0.738469
\hat{p}_4	0.257530	0.910004	0.547814	0.738798
\hat{p}_5	0.257530	0.910007	0.547810	0.738958

3. $p_0^{(1)} = 0.826427$

5. $p_1^{(0)} = 1.5$

7. Para $g(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ y $p_0^{(0)} = 1$, tenemos $p_0^{(3)} = 1.32472$.

9. Para $g(x) = 0.5(x + \frac{2}{x})$ y $p_0^{(0)} = 0.5$, tenemos $p_0^{(4)} = 1.73205$.

11. a. Para $g(x) = (2 - e^x + x^2)/3$ y $p_0^{(0)} = 0$, tenemos $p_0^{(3)} = 0.257530$.

b. Para $g(x) = 0.5(\sin x + \cos x)$ y $p_0^{(0)} = 0$, tenemos $p_0^{(4)} = 0.704812$.

c. Con $p_0^{(0)} = 0.25$, $p_0^{(4)} = 0.910007572$.

d. Con $p_0^{(0)} = 0.3$, $p_0^{(4)} = 0.469621923$.

13. El método Δ^2 de Aitkens da:

a. $\hat{p}_{10} = 0.045$

b. $\hat{p}_2 = 0.0363$

15. Tenemos

$$\frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_n - p|} = \frac{|p_{n+1} - p + p - p_n|}{|p_n - p|} = \left| \frac{p_{n+1} - p}{p_n - p} - 1 \right|,$$

por lo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_n - p|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{p_{n+1} - p}{p_n - p} - 1 \right| = 1.$$

17. a. *Sugerencia:* Primero mostramos que $p_n - p = -\frac{1}{(n+1)!}e^\xi x^{n+1}$, donde ξ está entre 0 y 1.

b.

n	p_n	\hat{p}_n
0	1	3
1	2	2.75
2	2.5	2.72
3	2.6	2.71875
4	2.7083	2.7183
5	2.716	2.7182870
6	2.71805	2.7182823
7	2.7182539	2.7182818
8	2.7182787	2.7182818
9	2.7182815	
10	2.7182818	

Conjunto de ejercicios 2.6

1. a. Para $p_0 = 1$, tenemos $p_{22} = 2.69065$.

b. Para $p_0 = 1$, tenemos $p_5 = 0.53209$; para $p_0 = -1$, tenemos $p_3 = -0.65270$; y para $p_0 = -3$, tenemos $p_3 = -2.87939$.

c. Para $p_0 = 1$, tenemos $p_5 = 1.32472$.

d. Para $p_0 = 1$, tenemos $p_4 = 1.12412$; y para $p_0 = 0$, tenemos $p_8 = -0.87605$.

e. Para $p_0 = 0$, tenemos $p_6 = -0.47006$; para $p_0 = -1$, tenemos $p_4 = -0.88533$; y para $p_0 = -3$, tenemos $p_4 = -2.64561$.

f. Para $p_0 = 0$, tenemos $p_{10} = 1.49819$.

3. La siguiente tabla lista la aproximación inicial y las raíces.

	p_0	p_1	p_2	Raíces aproximadas	Raíces conjugadas complejas
a	-1 0	0 1	1 2	$p_7 = -0.34532 - 1.31873i$ $p_6 = 2.69065$	$-0.34532 + 1.31873i$
b	0 1 -2	1 2 -3	2 3 -2.5	$p_6 = 0.53209$ $p_9 = -0.65270$ $p_4 = -2.87939$	
c	0 -2	1 -1	2 0	$p_5 = 1.32472$ $p_7 = -0.66236 - 0.56228i$	$-0.66236 + 0.56228i$
d	0 2 -2	1 3 0	2 4 -1	$p_5 = 1.12412$ $p_{12} = -0.12403 + 1.74096i$ $p_5 = -0.87605$	$-0.12403 - 1.74096i$
e	0 1 -1	1 0 -2	2 -0.5 -3	$p_{10} = -0.88533$ $p_5 = -0.47006$ $p_5 = -2.64561$	
f	0 -1 1	1 -2 0	2 -3 -1	$p_6 = 1.49819$ $p_{10} = -0.51363 - 1.09156i$ $p_8 = 0.26454 - 1.32837i$	$-0.51363 + 1.09156i$ $0.26454 + 1.32837i$

5. a. Las raíces son 1.244, 8.847 y -1.091 , y los puntos críticos son 0 y 6.

b. Las raíces son 0.5798, 1.521, 2.332, y -2.432 y los puntos críticos son 1, 2.001 y -1.5 .

7. Todos los métodos encuentran la solución 0.23235.

9. El material mínimo es aproximadamente 573.64895 cm^2 .

Conjunto de ejercicios 3.1

1. a. $P_1(x) = -0.148878x + 1$; $P_2(x) = -0.452592x^2 - 0.0131009x + 1$; $P_1(0.45) = 0.933005$;
 $|f(0.45) - P_1(0.45)| = 0.032558$; $P_2(0.45) = 0.902455$; $|f(0.45) - P_2(0.45)| = 0.002008$
- b. $P_1(x) = 0.467251x + 1$; $P_2(x) = -0.0780026x^2 + 0.490652x + 1$; $P_1(0.45) = 1.210263$;
 $|f(0.45) - P_1(0.45)| = 0.006104$; $P_2(0.45) = 1.204998$; $|f(0.45) - P_2(0.45)| = 0.000839$
- c. $P_1(x) = 0.874548x$; $P_2(x) = -0.268961x^2 + 0.955236x$; $P_1(0.45) = 0.393546$; $|f(0.45) - P_1(0.45)| = 0.0212983$;
 $P_2(0.45) = 0.375392$; $|f(0.45) - P_2(0.45)| = 0.003828$
- d. $P_1(x) = 1.031121x$; $P_2(x) = 0.615092x^2 + 0.846593x$; $P_1(0.45) = 0.464004$; $|f(0.45) - P_1(0.45)| = 0.019051$;
 $P_2(0.45) = 0.505523$; $|f(0.45) - P_2(0.45)| = 0.022468$

3. a. $\left| \frac{f''(\xi)}{2}(0.45 - 0)(0.45 - 0.6) \right| \leq 0.135$; $\left| \frac{f'''(\xi)}{6}(0.45 - 0)(0.45 - 0.6)(0.45 - 0.9) \right| \leq 0.00397$
- b. $\left| \frac{f''(\xi)}{2}(0.45 - 0)(0.45 - 0.6) \right| \leq 0.03375$; $\left| \frac{f'''(\xi)}{6}(0.45 - 0)(0.45 - 0.6)(0.45 - 0.9) \right| \leq 0.001898$
- c. $\left| \frac{f''(\xi)}{2}(0.45 - 0)(0.45 - 0.6) \right| \leq 0.135$; $\left| \frac{f'''(\xi)}{6}(0.45 - 0)(0.45 - 0.6)(0.45 - 0.9) \right| \leq 0.010125$
- d. $\left| \frac{f''(\xi)}{2}(0.45 - 0)(0.45 - 0.6) \right| \leq 0.06779$; $\left| \frac{f'''(\xi)}{6}(0.45 - 0)(0.45 - 0.6)(0.45 - 0.9) \right| \leq 0.151$

5. a.

n	x_0, x_1, \dots, x_n	$P_n(8.4)$
1	8.3, 8.6	17.87833
2	8.3, 8.6, 8.7	17.87716
3	8.3, 8.6, 8.7, 8.1	17.87714

c.

n	x_0, x_1, \dots, x_n	$P_n(0.25)$
1	0.2, 0.3	-0.13869287
2	0.2, 0.3, 0.4	-0.13259734
3	0.2, 0.3, 0.4, 0.1	-0.13277477

b.

n	x_0, x_1, \dots, x_n	$P_n(-1/3)$
1	-0.5, -0.25	0.21504167
2	-0.5, -0.25, 0.0	0.16988889
3	-0.5, -0.25, 0.0, -0.75	0.17451852

d.

n	x_0, x_1, \dots, x_n	$P_n(0.9)$
1	0.8, 1.0	0.44086280
2	0.8, 1.0, 0.7	0.43841352
3	0.8, 1.0, 0.7, 0.6	0.44198500

7. a.

n	Error real	Cota de error
1	1.180×10^{-3}	1.200×10^{-3}
2	1.367×10^{-5}	1.452×10^{-5}

c.

n	Error real	Cota de error
1	5.921×10^{-3}	6.097×10^{-3}
2	1.746×10^{-4}	1.813×10^{-4}

b.

n	Error real	Cota de error
1	4.052×10^{-2}	4.515×10^{-2}
2	4.630×10^{-3}	4.630×10^{-3}

d.

n	Error real	Cota de error
1	2.730×10^{-3}	1.408×10^{-2}
2	5.179×10^{-3}	9.222×10^{-3}

9. $y = 4.25$

11. Tenemos $f(1.09) \approx 0.2826$. El error real es 4.3×10^{-5} , y una cota de error es 7.4×10^{-6} . La discrepancia se debe al hecho de que los datos están determinados solamente para cuatro lugares decimales y sólo se utiliza aritmética de cuatro dígitos.

13. a. $P_2(x) = -11.22388889x^2 + 3.810500000x + 1$, y una cota de error es 0.11371294.

b. $P_2(x) = -0.1306344167x^2 + 0.8969979335x - 0.63249693$, y una cota de error es 9.45762×10^{-4} .

c. $P_3(x) = 0.1970056667x^3 - 1.06259055x^2 + 2.532453189x - 1.666868305$, y una cota de error es 10^{-4} .

d. $P_3(x) = -0.07932x^3 - 0.545506x^2 + 1.0065992x + 1$, y una cota de error es 1.591376×10^{-3} .

15. a. 1.32436

b. 2.18350

c. 1.15277, 2.01191

d. Las partes a) y b) son mejores debido al espaciamiento de los nodos.

17. La longitud de paso más grande posible es 0.004291932, por lo que 0.004 sería una selección razonable.

19. a. El polinomio de interpolación es $P_5(x) = -0.00252225x^5 + 0.286629x^4 - 10.7938x^3 + 157.312x^2 + 1642.75x + 179323$. El año 1960 corresponde a $x = 0$, por lo que los resultados son:

AÑO	1950	1975	2014	2020
x	-10	15	54	60
$P_5(x)$	192 539	215 526	306 211	266 161
Censo de Estados Unidos	150 697	215 973 (EST.)	317 298 (EST.)	341 000 (EST.)

b. Con base en el valor de 1950, no pondremos mucha confianza en los valores para 1975, 2014 y 2020. Sin embargo, el valor de 1975 es cercano a la población calculada, pero el valor de 2014 no es muy bueno. El valor 2020 es poco realista.

21. Puesto que $g'((j + \frac{1}{2})h) = 0$,

$$\max |g(x)| = \max \left\{ |g(jh)|, \left| g\left(\left(j + \frac{1}{2}\right)h\right) \right|, |g((j+1)h)| \right\} = \max \left(0, \frac{h^2}{4} \right),$$

luego $|g(x)| \leq h^2/4$.

23. a. (i) $B_3(x) = x$ (ii) $B_3(x) = 1$

d. $n \geq 250\,000$

Conjunto de ejercicios 3.2

1. Las aproximaciones son iguales a las del ejercicio 5 en la sección 3.1.

3. a. Tenemos $\sqrt{3} \approx P_4(1/2) = 1.708\bar{3}$.

b. Tenemos $\sqrt{3} \approx P_4(3) = 1.690607$.

c. El error absoluto en la parte a) es aproximadamente 0.0237 y el error absoluto en la parte b) es 0.0414, por lo que la parte a) es más exacta.

5. $P_2 = f(0.5) = 4$

7. $P_{0,1,2,3}(2.5) = 2.875$

9. La aproximación incorrecta es $-f(2)/6 + 2f(1)/3 + 2/3 + 2f(-1)/3 - f(-2)/6$ y la aproximación correcta es $-f(2)/6 + 2f(1)/3 + 2f(-1)/3 - f(-2)/6$, por lo que la aproximación incorrecta es $2/3$ más grande.

11. Los primeros 10 términos de la sucesión son 0.038462, 0.333671, 0.116605, -0.371760, -0.0548919, 0.605935, 0.190249, -0.513353, -0.0668173, y 0.448335.

Puesto que $f(1 + \sqrt{10}) = 0.0545716$, la sucesión no parece converger.

13. Modifique el algoritmo 3.1 de acuerdo con lo siguiente:

ENTRADA números y_0, y_1, \dots, y_n ; valores x_0, x_1, \dots, x_n como la primera columna $Q_{0,0}, Q_{1,0}, \dots, Q_{n,0}$ de Q .

SALIDA la tabla Q con $Q_{n,n}$ que se aproxima a $f^{-1}(0)$.

PASO 1 Para $i = 1, 2, \dots, n$
 para $j = 1, 2, \dots, i$
 determine

$$Q_{i,j} = \frac{y_i Q_{i-1,j-1} - y_{i-j} Q_{i,j-1}}{y_i - y_{i-j}}.$$

Conjunto de ejercicios 3.3

1. a. $P_1(x) = 16.9441 + 3.1041(x - 8.1)$; $P_1(8.4) = 17.87533$; $P_2(x) = P_1(x) + 0.06(x - 8.1)(x - 8.3)$; $P_2(8.4) = 17.87713$;
 $P_3(x) = P_2(x) - 0.00208333(x - 8.1)(x - 8.3)(x - 8.6)$; $P_3(8.4) = 17.87714$

b. $P_1(x) = -0.1769446 + 1.9069687(x - 0.6)$; $P_1(0.9) = 0.395146$;
 $P_2(x) = P_1(x) + 0.959224(x - 0.6)(x - 0.7)$; $P_2(0.9) = 0.4526995$;
 $P_3(x) = P_2(x) - 1.785741(x - 0.6)(x - 0.7)(x - 0.8)$; $P_3(0.9) = 0.4419850$

3. En las siguientes ecuaciones, tenemos $s = \frac{1}{h}(x - x_0)$.

a. $P_1(s) = -0.718125 - 0.0470625s$; $P_1(-\frac{1}{3}) = -0.006625$
 $P_2(s) = P_1(s) + 0.312625s(s - 1)/2$; $P_2(-\frac{1}{3}) = 0.1803056$
 $P_3(s) = P_2(s) + 0.09375s(s - 1)(s - 2)/6$; $P_3(-\frac{1}{3}) = 0.1745185$

b. $P_1(s) = -0.62049958 + 0.3365129s$; $P_1(0.25) = -0.1157302$
 $P_2(s) = P_1(s) - 0.04592527s(s - 1)/2$; $P_2(0.25) = -0.1329522$
 $P_3(s) = P_2(s) - 0.00283891s(s - 1)(s - 2)/6$; $P_3(0.25) = -0.1327748$

5. En las siguientes ecuaciones, tenemos $s = \frac{1}{h}(x - x_n)$.

a. $P_1(s) = 1.101 + 0.7660625s$; $f(-\frac{1}{3}) \approx P_1(-\frac{4}{3}) = 0.07958333$;
 $P_2(s) = P_1(s) + 0.406375s(s + 1)/2$; $f(-\frac{1}{3}) \approx P_2(-\frac{4}{3}) = 0.1698889$;
 $P_3(s) = P_2(s) + 0.09375s(s + 1)(s + 2)/6$; $f(-\frac{1}{3}) \approx P_3(-\frac{4}{3}) = 0.1745185$

b. $P_1(s) = 0.2484244 + 0.2418235s$; $f(0.25) \approx P_1(-1.5) = -0.1143108$
 $P_2(s) = P_1(s) - 0.04876419s(s + 1)/2$; $f(0.25) \approx P_2(-1.5) = -0.1325973$
 $P_3(s) = P_2(s) - 0.00283891s(s + 1)(s + 2)/6$; $f(0.25) \approx P_3(-1.5) = -0.1327748$

7. a. $P_3(x) = 5.3 - 33(x + 0.1) + 129.8\bar{3}(x + 0.1)x - 556.\bar{6}(x + 0.1)x(x - 0.2)$

b. $P_4(x) = P_3(x) + 2730.243387(x + 0.1)x(x - 0.2)(x - 0.3)$

9. a. $f(0.05) \approx 1.05126$

b. $f(0.65) \approx 1.91555$

c. $f(0.43) \approx 1.53725$

11. El coeficiente de x^2 es 3.5.

13. La aproximación para $f(0.3)$ debería incrementarse por 5.9375.

15. $\Delta^2 P(10) = 1140$

17. a. El polinomio de interpolación es $P_5(x) = 179323 + 2397.4x - 3.695x(x - 10) + 0.098\bar{3}x(x - 10)(x - 20) + 0.0344042x(x - 10)(x - 20)(x - 30) - 0.00252225x(x - 10)(x - 20)(x - 30)(x - 40)$, donde $x = 0$ corresponde a 1960.

$P_5(-10) = 192\,539$ aproxima la población en 1950.

$P_5(15) = 215\,526$ aproxima la población en 1975.

$P_5(54) = 306\,215$ aproxima la población en 2014.

$P_5(60) = 266\,165$ aproxima la población en 2020.

b. Con base en el valor de 1950, no daríamos mucho crédito a las aproximaciones de 1975, 2014 y 2020. A pesar de que 1975 y 2014 no son malos, 2020 parece poco realista.

19. $\Delta^3 f(x_0) = -6$, $\Delta^4 f(x_0) = \Delta^5 f(x_0) = 0$, por lo que el polinomio interpolante tiene grado 3.

21. Puesto que $f[x_2] = f[x_0] + f[x_0, x_1](x_1 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$,

$$a_2 = \frac{f[x_2] - f[x_0]}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{f[x_0, x_1]}{(x_2 - x_1)}.$$

Esto se simplifica en $f[x_0, x_1, x_2]$.

23. Sea $\tilde{P}(x) = f[x_{i_0}] + \sum_{k=1}^n f[x_{i_0}, \dots, x_{i_k}](x - x_{i_0}) \cdots (x - x_{i_{k-1}})$ y $\hat{P}(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n f[x_0, \dots, x_k](x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})$. El polinomio $\tilde{P}(x)$ interpola $f(x)$ en los nodos x_{i_0}, \dots, x_{i_n} , y los polinomios $\hat{P}(x)$ interpola $f(x)$ en los nodos x_0, \dots, x_n . Puesto que ambos conjuntos de nodos son iguales y el polinomio de interpolación es único, tenemos $\tilde{P}(x) = \hat{P}(x)$. El coeficiente de x^n en $\tilde{P}(x)$ es $f[x_{i_0}, \dots, x_{i_n}]$, y el coeficiente de x^n en $\hat{P}(x)$ es $f[x_0, \dots, x_n]$. Por lo tanto, $f[x_{i_0}, \dots, x_{i_n}] = f[x_0, \dots, x_n]$.

Conjunto de ejercicios 3.4

1. Los coeficientes de los polinomios en forma de diferencia dividida están dados en las siguientes tablas. Por ejemplo, el polinomio en la parte a) es

$$H_3(x) = 17.56492 + 3.116256(x - 8.3) + 0.05948(x - 8.3)^2 - 0.00202222(x - 8.3)^2(x - 8.6).$$

a	b	c	d
17.56492	0.22363362	-0.02475	-0.62049958
3.116256	2.1691753	0.751	3.5850208
0.05948	0.01558225	2.751	-2.1989182
-0.00202222	-3.2177925	1	-0.490447
		0	0.037205
		0	0.040475
			-0.0025277777
			0.0029629628

3. La siguiente tabla muestra las aproximaciones.

		Aproximación	Real	
	x	para $f(x)$	$f(x)$	Error
a	8.4	17.877144	17.877146	2.33×10^{-6}
b	0.9	0.44392477	0.44359244	3.3323×10^{-4}
c	$-\frac{1}{3}$	0.1745185	0.17451852	1.85×10^{-8}
d	0.25	-0.1327719	-0.13277189	5.42×10^{-9}

5. a. Tenemos $\text{sen } 0.34 \approx H_5(0.34) = 0.33349$.
 b. La fórmula proporciona una cota de error de 3.05×10^{-14} , pero el error real es 2.91×10^{-6} . La discrepancia se debe al hecho de que los datos sólo están provistos por cinco lugares decimales.
 c. Tenemos $\text{sen } 0.34 \approx H_7(0.34) = 0.33350$. A pesar de que la cota de error ahora es 5.4×10^{-20} , la inexactitud de los datos provistos domina los cálculos. Este resultado es realmente menos exacto que la aproximación en la parte b), puesto que $\text{sen } 0.34 = 0.333487$.
7. $H_3(1.25) = 1.169080403$ con una cota de error de 4.81×10^{-5} , y $H_5(1.25) = 1.169016064$ con una cota de error de 4.43×10^{-4} .
9. $H_3(1.25) = 1.169080403$ con una cota de error de 4.81×10^{-5} , y $H_5(1.25) = 1.169016064$ con una cota de error de 4.43×10^{-4} .
11. a. Suponga que $P(x)$ es otro polinomio con $P(x_k) = f(x_k)$ y $P'(x_k) = f'(x_k)$, para $k = 0, \dots, n$, y que el grado de $P(x)$ es máximo $2n + 1$. Haga

$$D(x) = H_{2n+1}(x) - P(x).$$

Entonces $D(x)$ es un polinomio de grado máximo $2n + 1$ con $D(x_k) = 0$, y $D'(x_k) = 0$, para cada $k = 0, 1, \dots, n$. Por lo tanto, D tiene ceros de multiplicidad 2 en cada x_k y

$$D(x) = (x - x_0)^2 \cdots (x - x_n)^2 Q(x).$$

Por lo tanto, $D(x)$ debe ser de grado $2n$ o más, lo cual sería una contradicción, o $Q(x) \equiv 0$ implica que $D(x) \equiv 0$. Por lo tanto, $P(x) \equiv H_{2n+1}(x)$.

- b. Primero observe que la fórmula de error se mantiene si $x = x_k$ para cualquier selección de ξ . Sea $x \neq x_k$, para $k = 0, \dots, n$, y defina

$$g(t) = f(t) - H_{2n+1}(t) - \frac{(t-x_0)^2 \dots (t-x_n)^2}{(x-x_0)^2 \dots (x-x_n)^2} [f(x) - H_{2n+1}(x)].$$

Observe que $g(x_k) = 0$, para $k = 0, \dots, n$, y $g(x) = 0$. Por lo tanto, g tiene $n+2$ ceros distintos en $[a, b]$. Por el teorema de Rolle, g' tiene $n+1$ ceros distintos ξ_0, \dots, ξ_n , los cuales se encuentran entre los números x_0, \dots, x_n, x . Además, $g'(x_k) = 0$, para $k = 0, \dots, n$, por lo que g' tiene $2n+2$ ceros distintos $\xi_0, \dots, \xi_n, x_0, \dots, x_n$. Puesto que g' es $2n+1$ veces diferenciable, el teorema de Rolle generalizado implica que existe un número ξ en $[a, b]$ con $g^{(2n+2)}(\xi) = 0$. Pero,

$$g^{(2n+2)}(t) = f^{(2n+2)}(t) - \frac{d^{2n+2}}{dt^{2n+2}} H_{2n+1}(t) - \frac{[f(x) - H_{2n+1}(x)] \cdot (2n+2)!}{(x-x_0)^2 \dots (x-x_n)^2}$$

y

$$0 = g^{(2n+2)}(\xi) = f^{(2n+2)}(\xi) - \frac{(2n+2)! [f(x) - H_{2n+1}(x)]}{(x-x_0)^2 \dots (x-x_n)^2}.$$

La fórmula de error se sigue.

Conjunto de ejercicios 3.5

- $S(x) = x$ en $[0, 2]$.
- Las ecuaciones de los splines cúbicos respectivos son

$$S(x) = S_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3,$$

para x en $[x_i, x_{i+1}]$, donde los coeficientes están determinados en las siguientes tablas.

a.

i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	17.564920	3.13410000	0.00000000	0.00000000

c.

i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	-0.02475000	1.03237500	0.00000000	6.50200000
1	0.33493750	2.25150000	4.87650000	-6.50200000

b.

i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	0.22363362	2.17229175	0.00000000	0.00000000

d.

i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	-0.62049958	3.45508693	0.00000000	-8.9957933
1	-0.28398668	3.18521313	-2.69873800	-0.94630333
2	0.00660095	2.61707643	-2.98262900	9.9420966

- Las siguientes tablas muestran las aproximaciones.

		Aproximación	Real	
	x	para $f(x)$	$f(x)$	Error
a	8.4	17.87833	17.877146	1.1840×10^{-3}
b	0.9	0.4408628	0.44359244	2.7296×10^{-3}
c	$-\frac{1}{3}$	0.1774144	0.17451852	2.8959×10^{-3}
d	0.25	-0.1315912	-0.13277189	1.1807×10^{-3}

		Aproximación	Real	
	x	para $f'(x)$	$f'(x)$	Error
a	8.4	3.134100	3.128232	5.86829×10^{-3}
b	0.9	2.172292	2.204367	0.0320747
c	$-\frac{1}{3}$	1.574208	1.668000	0.093792
d	0.25	2.908242	2.907061	1.18057×10^{-3}

- Las ecuaciones de los splines cúbicos condicionados respectivos son

$$s(x) = s_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3,$$

para x en $[x_i, x_{i+1}]$, donde los coeficientes están determinados en las siguientes tablas.

a.

i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	17.564920	3.116256	0.0608667	-0.00202222

c.

i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	-0.02475000	0.75100000	2.5010000	1.0000000
1	0.33493750	2.18900000	3.2510000	1.0000000

b.

i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	0.22363362	2.1691753	0.65914075	-3.2177925

d.

i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	-0.62049958	3.5850208	-2.1498407	-0.49077413
1	-0.28398668	3.1403294	-2.2970730	-0.47458360
2	0.006600950	2.6666773	-2.4394481	-0.44980146

9.

		Aproximación	Real	
	x	para $f(x)$	$f(x)$	Error
a	8.4	17.877152	17.877146	5.910×10^{-6}
b	0.9	0.4439248	0.44359244	3.323×10^{-4}
c	$-\frac{1}{3}$	0.17451852	0.17451852	0
d	0.25	-0.13277221	-0.13277189	3.19×10^{-7}

		Aproximación	Real	
	x	para $f'(x)$	$f'(x)$	Error
a	8.4	3.128369	3.128232	1.373×10^{-4}
b	0.9	2.204470	2.204367	1.0296×10^{-4}
c	$-\frac{1}{3}$	1.668000	1.668000	0
d	0.25	2.908242	2.907061	1.18057×10^{-3}

11. $b = -1, c = -3, d = 1$

13. $a = 4, b = 4, c = -1, d = \frac{1}{3}$

15. La aproximación lineal por tramos para f está determinada por

$$F(x) = \begin{cases} 20(e^{0.1} - 1)x + 1, & \text{para } x \text{ en } [0, 0.05] \\ 20(e^{0.2} - e^{0.1})x + 2e^{0.1} - e^{0.2}, & \text{para } x \text{ en } (0.05, 1]. \end{cases}$$

Tenemos

$$\int_0^{0.1} F(x) dx = 0.1107936 \quad \text{y} \quad \int_0^{0.1} f(x) dx = 0.1107014.$$

17. La ecuación del spline es

$$S(x) = S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3,$$

para x en $[x_i, x_{i+1}]$, donde los coeficientes están determinados en la siguiente tabla.

x_i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	1.0	-0.7573593	0.0	-6.627417
0.25	0.7071068	-2.0	-4.970563	6.627417
0.5	0.0	-3.242641	0.0	6.627417
0.75	-0.7071068	-2.0	4.970563	-6.627417

$$\int_0^1 S(x) dx = 0.000000, \quad S'(0.5) = -3.24264, \quad \text{y} \quad S''(0.5) = 0.0$$

19. La ecuación del spline es

$$s(x) = s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3,$$

para x en $[x_i, x_{i+1}]$, donde los coeficientes están determinados en la siguiente tabla.

x_i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	1.0	0.0	-5.193321	2.028118
0.25	0.7071068	-2.216388	-3.672233	4.896310
0.5	0.0	-3.134447	0.0	4.896310
0.75	-0.7071068	-2.216388	3.672233	2.028118

$$\int_0^1 s(x) dx = 0.000000, \quad s'(0.5) = -3.13445, \quad y \quad s''(0.5) = 0.0$$

- 21. a.** En $[0, 0.05]$, tenemos $s(x) = 1.000000 + 1.999999x + 1.998302x^2 + 1.401310x^3$, y en $(0.05, 0.1]$, tenemos $s(x) = 1.105170 + 2.210340(x - 0.05) + 2.208498(x - 0.05)^2 + 1.548758(x - 0.05)^3$.
- b.** $\int_0^{0.1} s(x) dx = 0.110701$
- c.** 1.6×10^{-7}
- d.** En $[0, 0.05]$, tenemos $S(x) = 1 + 2.04811x + 22.12184x^3$, y en $(0.05, 0.1]$, tenemos $S(x) = 1.105171 + 2.214028(x - 0.05) + 3.318277(x - 0.05)^2 - 22.12184(x - 0.05)^3$. $S(0.02) = 1.041139$ y $S(0.02) = 1.040811$.
- 23.** El spline tiene la ecuación

$$s(x) = s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3,$$

para x en $[x_i, x_{i+1}]$, donde los coeficientes están dados en la siguiente tabla.

x_i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	0	75	-0.659292	0.219764
3	225	76.9779	1.31858	-0.153761
5	383	80.4071	0.396018	-0.177237
8	623	77.9978	-1.19912	0.0799115

El spline predice una posición de $s(10) = 774.84$ pies y una velocidad de $s'(10) = 74.16$ pies/seg. Para maximizar la velocidad, encontramos el único punto crítico de $s'(x)$, y comparamos los valores de $s(x)$ en este punto y en los extremos. Encontramos que $\max s'(x) = s'(5.7448) = 80.7$ pies/seg $= 55.02$ mi/h. La velocidad 55 mi/h se excedió primero en aproximadamente 5.5 s.

- 25.** La ecuación del spline es

$$S(x) = S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3,$$

para x en $[x_i, x_{i+1}]$, donde los coeficientes están determinados en la siguiente tabla.

Muestra 1					Muestra 2			
x_i	a_i	b_i	c_i	d_i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	6.67	-0.44687	0	0.06176	6.67	1.6629	0	-0.00249
6	17.33	6.2237	1.1118	-0.27099	16.11	1.3943	-0.04477	-0.03251
10	42.67	2.1104	-2.1401	0.28109	18.89	-0.52442	-0.43490	0.05916
13	37.33	-3.1406	0.38974	-0.01411	15.00	-1.5365	0.09756	0.00226
17	30.10	-0.70021	0.22036	-0.02491	10.56	-0.64732	0.12473	-0.01113
20	29.31	-0.05069	-0.00386	0.00016	9.44	-0.19955	0.02453	-0.00102

- 27.** Los tres splines condicionados tienen ecuaciones de la forma

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3,$$

para x en $[x_i, x_{i+1}]$, donde los valores de los coeficientes están determinados en las siguientes tablas.

Spline 1							Spline 2						
i	x_i	$a_i = f(x_i)$	b_i	c_i	d_i	$f'(x_i)$	i	x_i	$a_i = f(x_i)$	b_i	c_i	d_i	$f'(x_i)$
0	1	3.0	1.0	-0.347	-0.049	1.0	0	17	4.5	3.0	-1.101	-0.126	3.0
1	2	3.7	0.447	-0.206	0.027		1	20	7.0	-0.198	0.035	-0.023	
2	5	3.9	-0.074	0.033	0.342		2	23	6.1	-0.609	-0.172	0.280	
3	6	4.2	1.016	1.058	-0.575		3	24	5.6	-0.111	0.669	-0.357	
4	7	5.7	1.409	-0.665	0.156		4	25	5.8	0.154	-0.403	0.088	
5	8	6.6	0.547	-0.196	0.024		5	27	5.2	-0.401	0.126	-2.568	
6	10	7.1	0.048	-0.053	-0.003		6	27.7	4.1				-4.0
7	13	6.7	-0.339	-0.076	0.006								
8	17	4.5				-0.67							

Spline 3						
i	x_i	$a_i = f(x_i)$	b_i	c_i	d_i	$f'(x_i)$
0	27.7	4.1	0.330	2.262	-3.800	0.33
1	28	4.3	0.661	-1.157	0.296	
2	29	4.1	-0.765	-0.269	-0.065	
3	30	3.0				-1.5

29. Sea $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. Claramente, f satisface las propiedades a), c), d) y e) de la definición 3.10 y f se interpola a sí misma para cualquier selección de x_0, \dots, x_n . Ya que ii) de la propiedad f) en la definición 3.10 se mantiene, f debe ser su propio spline cúbico condicionado. Sin embargo, $f''(x) = 2c + 6dx$ puede ser cero sólo en $x = -c/3d$. Por lo tanto, la parte i) de la propiedad f) en la definición 3.10 no se puede mantener en dos valores x_0 y x_n . Por lo que f no puede ser un spline cúbico natural.

31. Inserte lo siguiente antes del paso 7 en el algoritmo 3.4 y el paso 8 en el algoritmo 3.5:

Para $j = 0, 1, \dots, n-1$ determine

$$l_1 = b_j; \text{ (Observe que } l_1 = s'(x_j) \text{.)}$$

$$l_2 = 2c_j; \text{ (Observe que } l_2 = s''(x_j) \text{.)}$$

SALIDA (l_1, l_2)

Determine

$$l_1 = b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}^2; \text{ (Observe que } l_1 = s'(x_n) \text{.)}$$

$$l_2 = 2c_{n-1} + 6d_{n-1}h_{n-1}; \text{ (Note that } l_2 = s''(x_n) \text{.)}$$

SALIDA (l_1, l_2) .

33. Tenemos

$$|f(x) - F(x)| \leq \frac{M}{8} \max_{0 \leq j \leq n-1} |x_{j+1} - x_j|^2,$$

donde $M = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$.

Las cotas de error para el ejercicio 15 están en $[0, 0.1]$, $|f(x) - F(x)| \leq 1.53 \times 10^{-3}$, y

$$\left| \int_0^{0.1} F(x) dx - \int_0^{0.1} e^{2x} dx \right| \leq 1.53 \times 10^{-4}.$$

$$35. S(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + (x-1)^2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Conjunto de ejercicios 3.6

1. a. $x(t) = -10t^3 + 14t^2 + t$, $y(t) = -2t^3 + 3t^2 + t$
- b. $x(t) = -10t^3 + 14.5t^2 + 0.5t$, $y(t) = -3t^3 + 4.5t^2 + 0.5t$
- c. $x(t) = -10t^3 + 14t^2 + t$, $y(t) = -4t^3 + 5t^2 + t$
- d. $x(t) = -10t^3 + 13t^2 + 2t$, $y(t) = 2t$

R 18 Respuestas a ejercicios seleccionados

3. a. $x(t) = -11.5t^3 + 15t^2 + 1.5t + 1$, $y(t) = -4.25t^3 + 4.5t^2 + 0.75t + 1$
 b. $x(t) = -6.25t^3 + 10.5t^2 + 0.75t + 1$, $y(t) = -3.5t^3 + 3t^2 + 1.5t + 1$
 c. Para t entre $(0, 0)$ y $(4, 6)$, tenemos

$$x(t) = -5t^3 + 7.5t^2 + 1.5t, \quad y(t) = -13.5t^3 + 18t^2 + 1.5t,$$

y para t entre $(4, 6)$ y $(6, 1)$, tenemos

$$x(t) = -5.5t^3 + 6t^2 + 1.5t + 4, \quad y(t) = 4t^3 - 6t^2 - 3t + 6.$$

- d. Para t entre $(0, 0)$ y $(2, 1)$, tenemos

$$x(t) = -5.5t^3 + 6t^2 + 1.5t, \quad y(t) = -0.5t^3 + 1.5t,$$

y para t entre $(2, 1)$ y $(4, 0)$, tenemos

$$x(t) = -4t^3 + 3t^2 + 3t + 2, \quad y(t) = -t^3 + 1,$$

y para t entre $(4, 0)$ y $(6, -1)$, tenemos

$$x(t) = -8.5t^3 + 13.5t^2 - 3t + 4, \quad y(t) = -3.25t^3 + 5.25t^2 - 3t.$$

5. a. Al utilizar diferencias divididas hacia adelante obtenemos la siguiente tabla.

0	u_0			
0	u_0	$3(u_1 - u_0)$		
1	u_3	$u_3 - u_0$	$u_3 - 3u_1 + 2u_0$	
1	u_3	$3(u_3 - u_2)$	$2u_3 - 3u_2 + u_0$	$u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 + 3(u_1 - u_0)t + (u_3 - 3u_1 + 2u_0)t^2 + (u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0)t^2(t - 1) \\ &= u_0 + 3(u_1 - u_0)t + (-6u_1 + 3u_0 + 3u_2)t^2 + (u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0)t^3. \end{aligned}$$

De igual forma, $v(t) = v_0 + 3(v_1 - v_0)t + (3v_2 - 6v_1 + 3v_0)t^2 + (v_3 - 3v_2 + 3v_1 - v_0)t^3$.

- b. Al utilizar la fórmula para polinomios de Bernstein obtenemos

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0(1 - t)^3 + 3u_1t(1 - t)^2 + 3u_2t^2(1 - t) + u_3t^3 \\ &= u_0 + 3(u_1 - u_0)t + (3u_2 - 6u_1 + 3u_0)t^2 + (u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0)t^3. \end{aligned}$$

De igual forma,

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0(1 - t)^3 + 3v_1t(1 - t)^2 + 3v_2t^2(1 - t) + v_3t^3 \\ &= v_0 + 3(v_1 - v_0)t + (3v_2 - 6v_1 + 3v_0)t^2 + (v_3 - 3v_2 + 3v_1 - v_0)t^3. \end{aligned}$$

Conjunto de ejercicios 4.1

1. A partir de la fórmula de diferencias hacia adelante-hacia atrás (4.1), tenemos las siguientes aproximaciones:

- a. $f'(0.5) \approx 0.8520$, $f'(0.6) \approx 0.8520$, $f'(0.7) \approx 0.7960$
 b. $f'(0.0) \approx 3.7070$, $f'(0.2) \approx 3.1520$, $f'(0.4) \approx 3.1520$

3. a.

x	Error real	Cota de error
0.5	0.0255	0.0282
0.6	0.0267	0.0282
0.7	0.0312	0.0322

- b.

x	Error real	Cota de error
0.0	0.2930	0.3000
0.2	0.2694	0.2779
0.4	0.2602	0.2779

5. Para los puntos extremos de las tablas, utilizamos la fórmula (4.4). Las otras aproximaciones provienen de la fórmula (4.5).

- a. $f'(1.1) \approx 17.769705$, $f'(1.2) \approx 22.193635$, $f'(1.3) \approx 27.107350$, $f'(1.4) \approx 32.150850$
 b. $f'(8.1) \approx 3.092050$, $f'(8.3) \approx 3.116150$, $f'(8.5) \approx 3.139975$, $f'(8.7) \approx 3.163525$
 c. $f'(2.9) \approx 5.101375$, $f'(3.0) \approx 6.654785$, $f'(3.1) \approx 8.216330$, $f'(3.2) \approx 9.786010$
 d. $f'(2.0) \approx 0.13533150$, $f'(2.1) \approx -0.09989550$, $f'(2.2) \approx -0.3298960$, $f'(2.3) \approx -0.5546700$

7. a.

x	Error real	Cota de error
1.1	0.280322	0.359033
1.2	0.147282	0.179517
1.3	0.179874	0.219262
1.4	0.378444	0.438524

c.

x	Error real	Cota de error
2.9	0.011956	0.0180988
3.0	0.0049251	0.00904938
3.1	0.0004765	0.00493920
3.2	0.0013745	0.00987840

b.

x	Error real	Cota de error
8.1	0.00018594	0.000020322
8.3	0.00010551	0.000010161
8.5	9.116×10^{-5}	0.000009677
8.7	0.00020197	0.000019355

d.

x	Error real	Cota de error
2.0	0.00252235	0.00410304
2.1	0.00142882	0.00205152
2.2	0.00204851	0.00260034
2.3	0.00437954	0.00520068

9. Las aproximaciones y las fórmulas utilizadas son:

- a. $f'(2.1) \approx 3.899344$ a partir de (4.7), $f'(2.2) \approx 2.876876$ a partir de (4.7), $f'(2.3) \approx 2.249704$ a partir de (4.6), $f'(2.4) \approx 1.837756$ a partir de (4.6), $f'(2.5) \approx 1.544210$ a partir de (4.7), $f'(2.6) \approx 1.355496$ a partir de (4.7)
 b. $f'(-3.0) \approx -5.877358$ a partir de (4.7), $f'(-2.8) \approx -5.468933$ a partir de (4.7), $f'(-2.6) \approx -5.059884$ a partir de (4.6), $f'(-2.4) \approx -4.650223$ a partir de (4.6), $f'(-2.2) \approx -4.239911$ a partir de (4.7), $f'(-2.0) \approx -3.828853$ a partir de (4.7)

11. a.

x	Error real	Cota de error
2.1	0.0242312	0.109271
2.2	0.0105138	0.0386885
2.3	0.0029352	0.0182120
2.4	0.0013262	0.00644808
2.5	0.0138323	0.109271
2.6	0.0064225	0.0386885

b.

x	Error real	Cota de error
-3.0	1.55×10^{-5}	6.33×10^{-7}
-2.8	1.32×10^{-5}	6.76×10^{-7}
-2.6	7.95×10^{-7}	1.05×10^{-7}
-2.4	6.79×10^{-7}	1.13×10^{-7}
-2.2	1.28×10^{-5}	6.76×10^{-7}
-2.0	7.96×10^{-6}	6.76×10^{-7}

13. $f'(3) \approx \frac{1}{12}[f(1) - 8f(2) + 8f(4) - f(5)] = 0.21062$, con una cota de error dada por

$$\max_{1 \leq x \leq 5} \frac{|f^{(5)}(x)|h^4}{30} \leq \frac{23}{30} = 0.7\bar{6}.$$

15. A partir de la fórmula de diferencias hacia adelante–hacia atrás (4.1), tenemos las siguientes aproximaciones:

- a. $f'(0.5) \approx 0.852$, $f'(0.6) \approx 0.852$, $f'(0.7) \approx 0.7960$
 b. $f'(0.0) \approx 3.707$, $f'(0.2) \approx 3.153$, $f'(0.4) \approx 3.153$

17. Para los extremos de las tablas, usamos la fórmula (4.7). Las otras aproximaciones provienen de la fórmula (4.6).

- a. $f'(2.1) \approx 3.884$, $f'(2.2) \approx 2.896$, $f'(2.3) \approx 2.249$, $f'(2.4) \approx 1.836$, $f'(2.5) \approx 1.550$, $f'(2.6) \approx 1.348$
 b. $f'(-3.0) \approx -5.883$, $f'(-2.8) \approx -5.467$, $f'(-2.6) \approx -5.059$, $f'(-2.4) \approx -4.650$, $f'(-2.2) \approx -4.208$, $f'(-2.0) \approx -3.875$

19. La aproximación es -4.8×10^{-9} . $f''(0.5) = 0$. La cota de error es 0.35874. El método es muy exacto ya que la función es simétrica alrededor de $x = 0.5$.

21. a. $f'(0.2) \approx -0.1951027$

b. $f'(1.0) \approx -1.541415$

c. $f'(0.6) \approx -0.6824175$

23. Las fórmulas de tres puntos da los resultados en la siguiente tabla.

Tiempo	0	3	5	8	10	13
Velocidad	79	82.4	74.2	76.8	69.4	71.2

25. $f'(0.4) \approx -0.4249840$ y $f'(0.8) \approx -1.032772$.

27. Al final, las aproximaciones se convierten en cero porque el numerador se convierte en cero.

29. Puesto que $e'(h) = -\varepsilon/h^2 + hM/3$, tenemos $e'(h) = 0$ si y sólo si $h = \sqrt[3]{3\varepsilon/M}$. Además, $e'(h) < 0$ si $h < \sqrt[3]{3\varepsilon/M}$ y $e'(h) > 0$ si $h > \sqrt[3]{3\varepsilon/M}$, por lo que el mínimo absoluto para $e(h)$ se presenta en $h = \sqrt[3]{3\varepsilon/M}$.

Conjunto de ejercicios 4.2

1. a. $f'(1) \approx 1.0000109$ **b.** $f'(0) \approx 2.0000000$ **c.** $f'(1.05) \approx 2.2751459$ **d.** $f'(2.3) \approx -19.646799$

3. a. $f'(1) \approx 1.001$ **b.** $f'(0) \approx 1.999$ **c.** $f'(1.05) \approx 2.283$ **d.** $f'(2.3) \approx -19.61$

5. $\int_0^\pi \sin x \, dx \approx 1.999999$

7. Con $h = 0.1$, la fórmula (4.6) se convierte en

$$f'(2) \approx \frac{1}{1.2} [1.8e^{1.8} - 8(1.9e^{1.9}) + 8(2.1)e^{2.1} - 2.2e^{2.2}] = 22.166995.$$

Con $h = 0.05$, la fórmula (4.6) se convierte en

$$f'(2) \approx \frac{1}{0.6} [1.9e^{1.9} - 8(1.95e^{1.95}) + 8(2.05)e^{2.05} - 2.1e^{2.1}] = 22.167157.$$

9. Sea $N_2(h) = N\left(\frac{h}{3}\right) + \left(\frac{N\left(\frac{h}{3}\right) - N(h)}{2}\right)$ y $N_3(h) = N_2\left(\frac{h}{3}\right) + \left(\frac{N_2\left(\frac{h}{3}\right) - N_2(h)}{8}\right)$. Entonces $N_3(h)$ es una $O(h^3)$ aproximación a M .

11. Sea $N(h) = (1+h)^{1/h}$, $N_2(h) = 2N\left(\frac{h}{2}\right) - N(h)$, $N_3(h) = N_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{3}(N_2\left(\frac{h}{2}\right) - N_2(h))$.

a. $N(0.04) = 2.665836331$, $N(0.02) = 2.691588029$, $N(0.01) = 2.704813829$

b. $N_2(0.04) = 2.717339727$, $N_2(0.02) = 2.718039629$. The $O(h^3)$ la aproximación es $N_3(0.04) = 2.718272931$.

c. Sí, puesto que los errores parecen proporcionales para h para $N(h)$, a h^2 para $N_2(h)$, y a h^3 para $N_3(h)$.

13. a. Tenemos

$$P_{0,1}(x) = \frac{(x - h^2) N_1\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h^2}{4} - h^2} + \frac{\left(x - \frac{h^2}{4}\right) N_1(h)}{h^2 - \frac{h^2}{4}}, \quad \text{por lo que} \quad P_{0,1}(0) = \frac{4N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)}{3}.$$

De igual forma,

$$P_{1,2}(0) = \frac{4N_1\left(\frac{h}{4}\right) - N_1\left(\frac{h}{2}\right)}{3}.$$

b. Tenemos

$$P_{0,2}(x) = \frac{(x - h^4) N_2\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h^4}{16} - h^4} + \frac{\left(x - \frac{h^4}{16}\right) N_2(h)}{h^4 - \frac{h^4}{16}}, \quad \text{por lo que} \quad P_{0,2}(0) = \frac{16N_2\left(\frac{h}{2}\right) - N_2(h)}{15}.$$

15. c.

k	4	8	16	32	64	128	256	512
p_k	$2\sqrt{2}$	3.0614675	3.1214452	3.1365485	3.1403312	3.1412723	3.1415138	3.1415729
P_k	4	3.3137085	3.1825979	3.1517249	3.144184	3.1422236	3.1417504	3.1416321

- d. Los valores de p_k y P_k provistos en las siguientes tablas, junto con los resultados de extrapolación:

Para p_k , tenemos:

2.8284271				
3.0614675	3.1391476			
3.1214452	3.1414377	3.1415904		
3.1365485	3.1415829	3.1415926	3.1415927	
3.1403312	3.1415921	3.1415927	3.1415927	3.1415927

Para P_k , tenemos:

4				
3.3137085	3.0849447			
3.1825979	3.1388943	3.1424910		
3.1517249	3.1414339	3.1416032	3.1415891	
3.1441184	3.1415829	3.1415928	3.1415926	3.1415927

Conjunto de ejercicios 4.3

1. La regla trapezoidal da las siguientes aproximaciones.

a. 0.265625	b. -0.2678571	c. 0.228074	d. 0.1839397
e. -0.8666667	f. -0.1777643	g. 0.2180895	h. 4.1432597

3. Los errores se muestran en las tablas.

	Error real	Cota de error
a	0.071875	0.125
b	7.943×10^{-4}	9.718×10^{-4}
c	0.0358147	0.0396972
d	0.0233369	0.1666667
e	0.1326975	0.5617284
f	9.443×10^{-4}	1.0707×10^{-3}
g	0.0663431	0.0807455
h	1.554631	2.298827

5. La regla de Simpson da las siguientes aproximaciones.

a. 0.1940104	b. -0.2670635	c. 0.1922453	d. 0.16240168
e. -0.7391053	f. -0.1768216	g. 0.1513826	h. 2.5836964

7. Los errores se muestran en las tablas.

	Error real	Cota de error
a	2.604×10^{-4}	2.6042×10^{-4}
b	7.14×10^{-7}	9.92×10^{-7}
c	1.406×10^{-5}	2.170×10^{-5}
d	1.7989×10^{-3}	4.1667×10^{-4}
e	5.1361×10^{-3}	0.063280
f	1.549×10^{-6}	2.095×10^{-6}
g	3.6381×10^{-4}	4.1507×10^{-4}
h	4.9322×10^{-3}	0.1302826

9. La regla de punto medio da las siguientes aproximaciones.

a. 0.1582031	b. -0.2666667	c. 0.1743309	d. 0.1516327
e. -0.6753247	f. -0.1768200	g. 0.1180292	h. 1.8039148

11. Los errores se muestran en las tablas.

	Error real	Cota de error
a	0.0355469	0.0625
b	3.961×10^{-4}	4.859×10^{-4}
c	0.0179285	0.0198486
d	8.9701×10^{-3}	0.0833333
e	0.0564448	0.2808642
f	4.698×10^{-4}	5.353×10^{-4}
g	0.0337172	0.0403728
h	0.7847138	1.1494136

13. $f(1) = \frac{1}{2}$

15. Las siguientes aproximaciones se obtienen a partir de las fórmulas (4.23) hasta la fórmula (4.30), respectivamente.

- a.** 0.1024404, 0.1024598, 0.1024598, 0.1024598, 0.1024695, 0.1024663, 0.1024598, y 0.1024598
b. 0.7853982, 0.7853982, 0.7853982, 0.7853982, 0.7853982, 0.7853982, 0.7853982, y 0.7853982
c. 1.497171, 1.477536, 1.477529, 1.477523, 1.467719, 1.470981, 1.477512, y 1.477515
d. 4.950000, 2.740909, 2.563393, 2.385700, 1.636364, 1.767857, 2.074893, y 2.116379

17.

i	t_i	w_i	$y(t_i)$	
(4.23)	(4.24)	(4.26)	(4.27)	(4.29)
5.43476	5.03420	5.03292	4.83393	5.03180

19. El grado de precisión es tres.

21. $c_0 = \frac{1}{3}$, $c_1 = \frac{4}{3}$, $c_2 = \frac{1}{3}$

23. $c_0 = \frac{1}{4}$, $c_1 = \frac{3}{4}$, $x_1 = \frac{2}{3}$ da grado de precisión 2.

25. Si $E(x^k) = 0$, para todas las $k = 0, 1, \dots, n$ y $E(x^{n+1}) \neq 0$, entonces con $p_{n+1}(x) = x^{n+1}$, tenemos un polinomio de grado $n + 1$ para el cual $E(p_{n+1}(x)) \neq 0$. Sea $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ cualquier polinomio de grado menor a o igual a n . Entonces, $E(p(x)) = a_n E(x^n) + \dots + a_1 E(x) + a_0 E(1) = 0$. En cambio, si $E(p(x)) = 0$ para todos los polinomios de grado menor a o igual a n , sigue que $E(x^k) = 0$, para todas $k = 0, 1, \dots, n$. Sea $p_{n+1}(x) = a_{n+1} x^{n+1} + \dots + a_0$ un polinomio de grado $n + 1$ para el cual $E(p_{n+1}(x)) \neq 0$. Puesto que $a_{n+1} \neq 0$, tenemos

$$x^{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} p_{n+1}(x) - \frac{a_n}{a_{n+1}} x^n - \dots - \frac{a_0}{a_{n+1}}.$$

Entonces

$$E(x^{n+1}) = \frac{1}{a_{n+1}} E(p_{n+1}(x)) - \frac{a_n}{a_{n+1}} E(x^n) - \dots - \frac{a_0}{a_{n+1}} E(1) = \frac{1}{a_{n+1}} E(p_{n+1}(x)) \neq 0.$$

Por lo tanto, la fórmula de cuadratura tiene el grado de precisión n .

27. Con $x_{-1} = a$, $x_2 = b$, y $h = \frac{b-a}{3}$ la fórmula para n par en el teorema 4.3 da

$$\int_{x_{-1}}^{x_2} f(x) dx = \sum_{i=0}^1 a_i f(x_i) + \frac{h^3 f''(\xi)}{2!} \int_{-1}^2 t(t-1) dt.$$

Por lo que,

$$a_0 = \int_{x_{-1}}^{x_2} L_0(x) dx = \int_{x_{-1}}^{x_2} \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} dx = \frac{(x - x_1)^2}{2(x_0 - x_1)} \Big|_{x_{-1}}^{x_2} = \frac{3}{2}h,$$

$$a_1 = \int_{x_{-1}}^{x_2} L_1(x) dx = \int_{x_{-1}}^{x_2} \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} dx = \frac{(x - x_0)^2}{2(x_1 - x_0)} \Big|_{x_{-1}}^{x_2} = \frac{3}{2}h,$$

y

$$\frac{h^3 f''(\xi)}{2} \int_{-1}^2 (t^2 - t) dt = \frac{h^3 f''(\xi)}{2} \left[\frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 \right]_{-1}^2 = \frac{3h^3}{4} f''(\xi).$$

La fórmula se convierte en

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{3h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] + \frac{3h^3}{4} f''(\xi).$$

Conjunto de ejercicios 4.4

1. Las aproximaciones de la regla trapezoidal compuesta son:
a. 0.639900 b. 31.3653 c. 0.784241 d. -6.42872
e. -13.5760 f. 0.476977 g. 0.605498 h. 0.970926
3. Las aproximaciones de la regla trapezoidal compuesta son:
a. 0.6363098 b. 22.477713 c. 0.7853980 d. -6.274868
e. -14.18334 f. 0.4777547 g. 0.6043941 h. 0.9610554
5. Las aproximaciones de la regla de punto medio compuesta son:
a. 0.633096 b. 11.1568 c. 0.786700 d. -6.11274
e. -14.9985 f. 0.478751 g. 0.602961 h. 0.947868
7. a. 3.15947567 b. 3.10933713 c. 3.00906003
9. $\alpha = 1.5$
11. a. La regla trapezoidal compuesta requiere $h < 0.000922295$ y $n \geq 2168$.
b. La regla de Simpson compuesta requiere $h < 0.037658$ y $n \geq 54$.
c. La regla de punto medio compuesta requiere $h < 0.00065216$ y $n \geq 3066$.
13. a. La regla trapezoidal compuesta requiere $h < 0.04382$ y $n \geq 46$. La aproximación es 0.405471.
b. La regla de Simpson compuesta requiere $h < 0.44267$ y $n \geq 6$. La aproximación es 0.405466.
c. La regla de punto medio compuesta requiere $h < 0.03098$ y $n \geq 64$. La aproximación es 0.405460.
15. a. Puesto que los límites derecho e izquierdo en 0.1 y 0.2 para f , f' y f'' son iguales, las funciones son continuas en $[0, 0.3]$. Sin embargo,

$$f'''(x) = \begin{cases} 6, & 0 \leq x \leq 0.1 \\ 12, & 0.1 < x \leq 0.2 \\ 12, & 0.2 < x < 0.3 \end{cases}$$

es discontinua en $x = 0,1$.

- b. Tenemos 0.302506 con una cota de error de 1.9×10^{-4} .
 - c. Tenemos 0.302425, y el valor real de la integral es la misma.
17. La longitud es aproximadamente 15.8655.
19. La regla de Simpson compuesta con $h = 0.25$ da 2.61972 s.
21. La longitud es aproximadamente 58.47082, usando $n = 100$ en la regla de Simpson compuesta.
23. Para mostrar que la suma

$$\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j)2h$$

es una suma de Reimann, sea $y_i = x_{2i}$, para $i = 0, 1, \dots, \frac{n}{2}$. Entonces $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = 2h$ y $y_{i-1} \leq \xi_i \leq y_i$. Por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j) \Delta y_j = \sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j) 2h$$

es una suma de Reimann para $\int_a^b f^{(4)}(x)dx$. Por lo tanto,

$$E(f) = -\frac{h^5}{90} \sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j) = -\frac{h^4}{180} \left[\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j) 2h \right] \approx -\frac{h^4}{180} \int_a^b f^{(4)}(x) dx = -\frac{h^4}{180} [f'''(b) - f'''(a)].$$

25. a. La regla trapezoidal compuesta: Con $h = 0.0069669$, el error estimado es 2.541×10^{-5} .
 b. La regla de Simpson compuesta: Con $h = 0.132749$, el error estimado es 3.252×10^{-5} .
 c. La regla de punto medio compuesta: Con $h = 0.0049263$, el error estimado es 2.541×10^{-5} .

Conjunto de ejercicios 4.5

1. La integración de Romberg da $R_{3,3}$ de acuerdo con lo siguiente:
- | | | | |
|--------------|---------------|---------------|---------------|
| a. 0.1922593 | b. 0.1606105 | c. -0.1768200 | d. 0.08875677 |
| e. 2.5879685 | f. -0.7341567 | g. 0.6362135 | h. 0.6426970 |
3. La integración de Romberg da $R_{4,4}$ de acuerdo con lo siguiente:
- | | | | |
|--------------|---------------|---------------|---------------|
| a. 0.1922594 | b. 0.1606028 | c. -0.1768200 | d. 0.08875528 |
| e. 2.5886272 | f. -0.7339728 | g. 0.6362134 | h. 0.6426991 |
5. La integración de Romberg da:
- | | | | |
|---------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| a. 0.19225936 con $n = 4$ | b. 0.16060279 con $n = 5$ | c. -0.17682002 con $n = 4$ | d. 0.088755284 con $n = 5$ |
| e. 2.5886286 con $n = 6$ | f. -0.73396918 con $n = 6$ | g. 0.63621335 con $n = 4$ | h. 0.64269908 con $n = 5$ |
7. $R_{33} = 11.5246$
 9. $f(2.5) \approx 0.43459$
 11. $R_{31} = 5$
 13. La integración de Romberg da:
- | |
|---|
| a. 62.4373714, 57.2885616, 56.4437507, 56.2630547, y 56.2187727 produce una predicción de 56.2. |
| b. 55.5722917, 56.2014707, 56.2055989, y 56.2040624 produce una predicción de 56.20. |
| c. 58.3626837, 59.0773207, 59.2688746, 59.3175220, 59.3297316, y 59.3327870 produce una predicción de 59.330. |
| d. 58.4220930, 58.4707174, 58.4704791 y 58.4704691 produce una predicción de 58.47047. |
| e. Considere la gráfica de la función. |
15. $R_{10,10} = 58.47046901$
 17. Tenemos

$$\begin{aligned} R_{k,2} &= \frac{4R_{k,1} - R_{k-1,1}}{3} \\ &= \frac{1}{3} \left[R_{k-1,1} + 2h_{k-1} \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a + (i - 1/2)h_{k-1}) \right], \quad \text{a partir de (4.35),} \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{h_{k-1}}{2} (f(a) + f(b)) + h_{k-1} \sum_{i=1}^{2^{k-2}-1} f(a + ih_{k-1}) \right. \\ &\quad \left. + 2h_{k-1} \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a + (i - 1/2)h_{k-1}) \right], \quad \text{a partir de (4.34) con } k-1 \text{ en lugar de } k, \\ &= \frac{1}{3} \left[h_k (f(a) + f(b)) + 2h_k \sum_{i=1}^{2^{k-2}-1} f(a + 2ih_k) + 4h_k \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a + (2i - 1)h) \right] \\ &= \frac{h}{3} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{M-1} f(a + 2ih) + 4 \sum_{i=1}^M f(a + (2i - 1)h) \right], \end{aligned}$$

donde $h = h_k$ y $M = 2^{k-2}$.

19. De la ecuación (4.35) se sigue

$$\begin{aligned}
 R_{k,1} &= \frac{h_k}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f(a + i h_k) \right] \\
 &= \frac{h_k}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f(a + \frac{i}{2} h_{k-1}) \right] \\
 &= \frac{h_k}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f(a + i h_{k-1}) + 2 \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a + (i - 1/2) h_{k-1}) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{h_{k-1}}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{2^{k-2}-1} f(a + i h_{k-1}) \right] + h_{k-1} \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a + (i - 1/2) h_{k-1}) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left[R_{k-1,1} + h_{k-1} \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a + (i - 1/2) h_{k-1}) \right].
 \end{aligned}$$

Conjunto de ejercicios 4.6

1. La regla de Simpson da:

- a. $S(1, 1.5) = 0.19224530$, $S(1, 1.25) = 0.039372434$, $S(1.25, 1.5) = 0.15288602$, y el valor real es 0.19225935.
 b. $S(0, 1) = 0.16240168$, $S(0, 0.5) = 0.028861071$, $S(0.5, 1) = 0.13186140$, y el valor real es 0.16060279.
 c. $S(0, 0.35) = -0.17682156$, $S(0, 0.175) = -0.087724382$, $S(0.175, 0.35) = -0.089095736$, y el valor real es -0.17682002 .
 d. $S(0, \frac{\pi}{4}) = 0.087995669$, $S(0, \frac{\pi}{8}) = 0.0058315797$, $S(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}) = 0.082877624$, y el valor real es 0.088755285.

3. La cuadratura adaptable da:

- a. 0.19226 b. 0.16072 c. -0.17682 d. 0.088709

5. La cuadratura adaptable da:

- a. 108.555281 b. -1724.966983 c. -15.306308 d. -18.945949

7.

	Regla de Simpson	Evaluación del número	Error	Regla de Simpson	Evaluación del número	Error
a	-0.21515695	57	6.3×10^{-6}	-0.21515062	229	1.0×10^{-8}
b	0.95135226	83	9.6×10^{-6}	0.95134257	217	1.1×10^{-7}

9. La cuadratura adaptable da

$$\int_{0.1}^2 \sin \frac{1}{x} dx \approx 1.1454 \quad \text{y} \quad \int_{0.1}^2 \cos \frac{1}{x} dx \approx 0.67378.$$

11. $\int_0^{2\pi} u(t) dt \approx 0.00001$

13. Tenemos, para $h = b - a$,

$$\left| T(a, b) - T\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - T\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right| \approx \frac{h^3}{16} |f''(\mu)|$$

y

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - T\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right| \approx \frac{h^3}{48} |f''(\mu)|.$$

Por lo tanto,

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - T\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right| \approx \frac{1}{3} \left| T(a, b) - T\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - T\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right|.$$

Conjunto de ejercicios 4.7

1. La cuadratura gaussiana da:

a. 0.1922687	b. 0.1594104	c. -0.1768190	d. 0.08926302
--------------	--------------	---------------	---------------
3. La cuadratura gaussiana con $n = 3$ de:

a. 0.1922594	b. 0.1605954	c. -0.1768200	d. 0.08875385
--------------	--------------	---------------	---------------
5. La cuadratura gaussiana da:

a. 0.1922594	b. 0.1606028	c. -0.1768200	d. 0.08875529
--------------	--------------	---------------	---------------
7. La cuadratura gaussiana con $n = 5$ da:

a. 0.1922594	b. 0.1606028	c. -0.1768200	d. 0.08875528
--------------	--------------	---------------	---------------
9. La aproximación es 3.743713701 con error absoluto 0.2226462.
11. $a = 1, b = 1, c = \frac{1}{3}, d = -\frac{1}{3}$
13. Los polinomios de Legendre $P_2(x)$ y $P_3(x)$ están determinados por

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad \text{y} \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

por lo que sus raíces se verifican fácilmente.

Para $n = 2$,

$$c_1 = \int_{-1}^1 \frac{x + 0.5773502692}{1.1547005} dx = 1$$

y

$$c_2 = \int_{-1}^1 \frac{x - 0.5773502692}{-1.1547005} dx = 1.$$

Para $n = 3$,

$$c_1 = \int_{-1}^1 \frac{x(x + 0.7745966692)}{1.2} dx = \frac{5}{9},$$

$$c_2 = \int_{-1}^1 \frac{(x + 0.7745966692)(x - 0.7745966692)}{-0.6} dx = \frac{8}{9},$$

y

$$c_3 = \int_{-1}^1 \frac{x(x - 0.7745966692)}{1.2} dx = \frac{5}{9}.$$

Conjunto de ejercicios 4.8

1. El algoritmo 4.4. con $n = m = 4$ da:

a. 0.3115733	b. 0.2552526	c. 16.50864	d. 1.476684
--------------	--------------	-------------	-------------
3. El algoritmo 4.5 con $n = m = 2$ da:

a. 0.3115733	b. 0.2552446	c. 16.50863	d. 1.488875
--------------	--------------	-------------	-------------
5. El algoritmo 4.4 con $n = 4$ y $m = 8$, $n = 8$ y $m = 4$ y $n = m = 6$ da:

a. 0.5119875, 0.5118533, 0.5118722	b. 1.718857, 1.718220, 1.718385
c. 1.001953, 1.000122, 1.000386	d. 0.7838542, 0.7833659, 0.7834362
e. -1.985611, -1.999182, -1.997353	f. 2.004596, 2.000879, 2.000980
g. 0.3084277, 0.3084562, 0.3084323	h. -22.61612, -19.85408, -20.14117

7. El algoritmo 4.5 con $n = m = 3$, $n = 3$ y $m = 4$, $n = 4$ y $m = 3$ y $n = m = 4$ da:
- 0.5118655, 0.5118445, 0.5118655, 0.5118445, 2.1×10^{-5} , 1.3×10^{-7} , 2.1×10^{-5} , 1.3×10^{-7}
 - 1.718163, 1.718302, 1.718139, 1.718277, 1.2×10^{-4} , 2.0×10^{-5} , 1.4×10^{-4} , 4.8×10^{-6}
 - 1.000000, 1.000000, 1.000000, 1.000000, 0, 0, 0, 0
 - 0.7833333, 0.7833333, 0.7833333, 0.7833333, 0, 0, 0, 0
 - 1.991878, -2.000124, -1.991878, -2.000124, 8.1×10^{-3} , 1.2×10^{-4} , 8.1×10^{-3} , 1.2×10^{-4}
 - 2.001494, 2.000080, 2.001388, 1.999984, 1.5×10^{-3} , 8×10^{-5} , 1.4×10^{-3} , 1.6×10^{-5}
 - 0.3084151, 0.3084145, 0.3084246, 0.3084245, 10^{-5} , 5.5×10^{-7} , 1.1×10^{-5} , 6.4×10^{-7}
 - 12.74790, -21.21539, -11.83624, -20.30373, 7.0, 1.5, 7.9, 0.564
9. El algoritmo 4.4 con $n = m = 14$ da 0.1479103 y el algoritmo 4.5 con $n = m = 4$ da 0.1506823.
11. El algoritmo 4.6 con $n = m = p = 2$ da el primer valor listado.
- 5.204036, $e(e^{0.5} - 1)(e - 1)^2$
 - 0.08429784, $\frac{1}{12}$
 - 0.08641975, $\frac{1}{14}$
 - 0.09722222, $\frac{1}{12}$
 - 7.103932, $2 + \frac{1}{2}\pi^2$
 - 1.428074, $\frac{1}{2}(e^2 + 1) - e$
13. El algoritmo 4.6 con $n = m = p = 4$ da el primer valor listado. El segundo proviene del algoritmo 4.6 con $n = m = p = 5$.
- 5.206447
 - 0.08333333
 - 0.07142857
15. La aproximación 20.41887 requiere 125 evaluaciones funcionales.
17. La aproximación para el centro de masa es (\bar{x}, \bar{y}) , donde $\bar{x} = 0.3806333$ y $\bar{y} = 0.3822558$.
19. El área es aproximadamente 1.0402528.

Conjunto de ejercicios 4.9

- La regla de Simpson compuesta da:
 - 0.5284163
 - 4.266654
 - 0.4329748
 - 0.8802210
- La regla de Simpson compuesta da:
 - 0.4112649
 - 0.2440679
 - 0.05501681
 - 0.2903746
- La velocidad de escape es aproximadamente 6.9450 mi/s.
- $\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx \approx 0.8535534 f(0.5857864) + 0.1464466 f(3.4142136)$
 - $\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx \approx 0.7110930 f(0.4157746) + 0.2785177 f(2.2942804) + 0.0103893 f(6.2899451)$
- $n = 2$: 2.9865139
 $n = 3$: 2.9958198

Conjunto de ejercicios 5.1

1. a. Puesto que $f(t, y) = y \cos t$, tenemos $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = \cos t$, y f satisface una condición de Lipschitz en y con $L = 1$ en

$$D = \{(t, y) | 0 \leq t \leq 1, -\infty < y < \infty\}.$$

Además, f es continua en D , por lo que existe una única solución, que es $y(t) = e^{\sin t}$.

- b. Puesto que $f(t, y) = \frac{2}{t}y + t^2e^t$, tenemos $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{t}$, y f satisface una condición de Lipschitz en y con $L = 2$ en

$$D = \{(t, y) | 1 \leq t \leq 2, -\infty < y < \infty\}.$$

Además, f es continua en D , por lo que existe una única solución, que es $y(t) = t^2(e^t - e)$.

- c. Puesto que $f(t, y) = -\frac{2}{t}y + t^2e^t$, tenemos $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2}{t}$, y f satisface una condición de Lipschitz en y con $L = 2$ en

$$D = \{(t, y) | 1 \leq t \leq 2, -\infty < y < \infty\}.$$

Además, f es continua en D , por lo que existe una solución única, que es

$$y(t) = (t^4e^t - 4t^3e^t + 12t^2e^t - 24te^t + 24e^t + (\sqrt{2} - 9)e)/t^2.$$

d. Puesto que $f(t, y) = \frac{4t^3y}{1+t^4}$, tenemos $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4t^3}{1+t^4}$, y f satisface una condición de Lipschitz en y con $L = 2$ en

$$D = \{(t, y) | 0 \leq t \leq 1, -\infty < y < \infty\}.$$

Además, f es continua en D , por lo que existe una solución única, que es $y(t) = 1 + t^4$.

3. a. La constante de Lipschitz $L = 1$; es un problema bien planteado.
 b. La constante de Lipschitz $L = 1$; es un problema bien planteado.
 c. La constante de Lipschitz $L = 1$; es un problema bien planteado.
 d. La función f no satisface una condición de Lipschitz, por lo que el teorema 5.6 no se puede utilizar.
5. a. Al derivar $y^3t + yt = 2$ obtenemos $3y^2y't + y^3 + y't + y = 0$. Al resolver para y' obtenemos la ecuación diferencial original y al hacer $t = 1$ y $y = 1$ verificamos la condición inicial. Para aproximar $y(2)$, use el método de Newton para resolver la ecuación $y^3 + y - 1 = 0$. Esto proporciona $y(2) \approx 0.6823278$.
 b. Al derivar $y \sin t + t^2e^y + 2y - 1 = 0$ obtenemos $y' \sin t + y \cos t + 2te^y + t^2e^yy' + 2y' = 0$. Al resolver para y' obtenemos la ecuación diferencial original y haciendo $t = 1$ y $y = 0$ verificamos la condición inicial. Para aproximar $y(2)$, use el método de Newton para resolver la ecuación $(2 + \sin 2)y + 4e^y - 1 = 0$. Esto proporciona $y(2) \approx -0.4946599$.
7. Permita que el punto (t, y) esté en la recta. Entonces $\frac{(y-y_1)}{(t-t_1)} = \frac{(y_2-y_1)}{(t_2-t_1)}$ por lo que $\frac{(y-y_1)}{(y_2-y_1)} = \frac{(t-t_1)}{(t_2-t_1)}$. Si $\lambda = \frac{(t-t_1)}{(t_2-t_1)}$, entonces $t = (1-\lambda)t_1 + \lambda t_2$. De igual forma, $\lambda = \frac{(y-y_1)}{(y_2-y_1)}$, entonces $y = (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2$. Por lo que la selección $\lambda = \frac{(t-t_1)}{(t_2-t_1)} = \frac{(y-y_1)}{(y_2-y_1)}$ es el valor de λ necesario para colocar $(t, y) = ((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2)$ en la recta.
9. Si (t_1, y_1) y (t_2, y_2) está en D , con $a \leq t_1 \leq b$, $a \leq t_2 \leq b$, $-\infty < y_1 < \infty$, y $-\infty < y_2 < \infty$. Para $0 \leq \lambda \leq 1$, tenemos $(1-\lambda)a \leq (1-\lambda)t_1 \leq (1-\lambda)b$ y $\lambda a \leq \lambda t_2 \leq \lambda b$. Por lo tanto, $a = (1-\lambda)a + \lambda a \leq (1-\lambda)t_1 + \lambda t_2 \leq (1-\lambda)b + \lambda b = b$. Además $-\infty < (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 < \infty$, por lo que D es convexa.

Conjunto de ejercicios 5.2

1. El método de Euler proporciona las aproximaciones en la siguientes tablas.

a.

i	t_i	w_i	$y(t_i)$
1	0.500	0.0000000	0.2836165
2	1.000	1.1204223	3.2190993

c.

i	t_i	w_i	$y(t_i)$
1	1.250	2.7500000	2.7789294
2	1.500	3.5500000	3.6081977
3	1.750	4.3916667	4.4793276
4	2.000	5.2690476	5.3862944

3. a.

t	Error real	Cota del error
0.5	0.2836165	11.3938
1.0	2.0986771	42.3654

c.

t	Error real	Cota del error
1.25	0.0289294	0.0355032
1.50	0.0581977	0.0810902
1.75	0.0876610	0.139625
2.00	0.117247	0.214785

b.

i	t_i	w_i	$y(t_i)$
1	2.500	2.0000000	1.8333333
2	3.000	2.6250000	2.5000000

d.

i	t_i	w_i	$y(t_i)$
1	0.250	1.2500000	1.3291498
2	0.500	1.6398053	1.7304898
3	0.750	2.0242547	2.0414720
4	1.000	2.2364573	2.1179795

b.

t	Error real	Cota del error
2.5	0.166667	0.429570
3.0	0.125000	1.59726

d.

t	Error real
0.25	0.0791498
0.50	0.0906844
0.75	0.0172174
1.00	0.118478

Para la parte d), la fórmula de la cota de error (5.10) no se puede aplicar ya que $L = 0$.

5. El método de Euler proporciona las aproximaciones en las siguientes tablas.

a.

i	t_i	w_i	$y(t_i)$
2	1.200	1.0082645	1.0149523
4	1.400	1.0385147	1.0475339
6	1.600	1.0784611	1.0884327
8	1.800	1.1232621	1.1336536
10	2.000	1.1706516	1.1812322

b.

i	t_i	w_i	$y(t_i)$
2	1.400	0.4388889	0.4896817
4	1.800	1.0520380	1.1994386
6	2.200	1.8842608	2.2135018
8	2.600	3.0028372	3.6784753
10	3.000	4.5142774	5.8741000

c.

i	t_i	w_i	$y(t_i)$
2	0.400	-1.6080000	-1.6200510
4	0.800	-1.3017370	-1.3359632
6	1.200	-1.1274909	-1.1663454
8	1.600	-1.0491191	-1.0783314
10	2.000	-1.0181518	-1.0359724

d.

i	t_i	w_i	$y(t_i)$
2	0.2	0.1083333	0.1626265
4	0.4	0.1620833	0.2051118
6	0.6	0.3455208	0.3765957
8	0.8	0.6213802	0.6461052
10	1.0	0.9803451	1.0022460

7. Los errores reales para las aproximaciones en el ejercicio 3 están en las siguientes tablas.

a.

t	Error real
1.2	0.0066879
1.5	0.0095942
1.7	0.0102229
2.0	0.0105806

b.

t	Error real
1.4	0.0507928
2.0	0.2240306
2.4	0.4742818
3.0	1.3598226

c.

t	Error real
0.4	0.0120510
1.0	0.0391546
1.4	0.0349030
2.0	0.0178206

d.

t	Error real
0.2	0.0542931
0.5	0.0363200
0.7	0.0273054
1.0	0.0219009

9. El método de Euler proporciona las aproximaciones en la siguiente tabla.

a.

i	t_i	w_i	$y(t_i)$
1	1.1	0.271828	0.345920
5	1.5	3.18744	3.96767
6	1.6	4.62080	5.70296
9	1.9	11.7480	14.3231
10	2.0	15.3982	18.6831

b. La interpolación lineal da las aproximaciones en la siguiente tabla.

t	Aproximación	$y(t)$	Error
1.04	0.108731	0.119986	0.01126
1.55	3.90412	4.78864	0.8845
1.97	14.3031	17.2793	2.976

c. $h < 0.00064$

11. a. El método de Euler produce la siguiente aproximación para $y(5) = 5.00674$.

	$h = 0.2$	$h = 0.1$	$h = 0.05$
w_N	5.00377	5.00515	5.00592

b. $h = \sqrt{2 \times 10^{-6}} \approx 0.0014142$.

13. a. $1.021957 = y(1.25) \approx 1.014978$, $1.164390 = y(1.93) \approx 1.153902$
 b. $1.924962 = y(2.1) \approx 1.660756$, $4.394170 = y(2.75) \approx 3.526160$
 c. $-1.138277 = y(1.3) \approx -1.103618$, $-1.041267 = y(1.93) \approx -1.022283$
 d. $0.3140018 = y(0.54) \approx 0.2828333$, $0.8866318 = y(0.94) \approx 0.8665521$

15. a. $h = 10^{-n/2}$

b. El error mínimo es $10^{-n/2}(e - 1) + 5e10^{-n-1}$.

c.

t	$w(h = 0.1)$	$w(h = 0.01)$	$y(t)$	Error ($n = 8$)
0.5	0.40951	0.39499	0.39347	1.5×10^{-4}
1.0	0.65132	0.63397	0.63212	3.1×10^{-4}

17. b. $w_{50} = 0.10430 \approx p(50)$

c. Puesto que $p(t) = 1 - 0.99e^{-0.002t}$, $p(50) = 0.10421$.

Conjunto de ejercicios 5.3

1. a.

t_i	w_i	$y(t_i)$
0.50	0.12500000	0.28361652
1.00	2.02323897	3.21909932

c.

t_i	w_i	$y(t_i)$
1.25	2.78125000	2.77892944
1.50	3.61250000	3.60819766
1.75	4.48541667	4.47932763
2.00	5.39404762	5.38629436

3. a.

t_i	w_i	$y(t_i)$
0.50	0.25781250	0.28361652
1.00	3.05529474	3.21909932

c.

t_i	w_i	$y(t_i)$
1.25	2.77897135	2.77892944
1.50	3.60826562	3.60819766
1.75	4.47941561	4.47932763
2.00	5.38639966	5.38629436

b.

t_i	w_i	$y(t_i)$
2.50	1.75000000	1.83333333
3.00	2.42578125	2.50000000

d.

t_i	w_i	$y(t_i)$
0.25	1.34375000	1.32914981
0.50	1.77218707	1.73048976
0.75	2.11067606	2.04147203
1.00	2.20164395	2.11797955

b.

t_i	w_i	$y(t_i)$
2.50	1.81250000	1.83333333
3.00	2.48591644	2.50000000

d.

t_i	w_i	$y(t_i)$
0.25	1.32893880	1.32914981
0.50	1.72966730	1.73048976
0.75	2.03993417	2.04147203
1.00	2.11598847	2.11797955

5. a.

Orden 2			
i	t_i	w_i	$y(t_i)$
1	1.1	1.214999	1.215886
2	1.2	1.465250	1.467570

b.

Orden 2			
i	t_i	w_i	$y(t_i)$
1	0.5	0.5000000	0.5158868
2	1.0	1.076858	1.091818

c.

Orden 2			
i	t_i	w_i	$y(t_i)$
1	1.5	-2.000000	-1.500000
2	2.0	-1.777776	-1.333333
3	2.5	-1.585732	-1.250000
4	3.0	-1.458882	-1.200000

d.

Orden 2			
i	t_i	w_i	$y(t_i)$
1	0.25	1.093750	1.087088
2	0.50	1.312319	1.289805
3	0.75	1.538468	1.513490
4	1.0	1.720480	1.701870

7. a.

Orden 4			
i	t_i	w_i	$y(t_i)$
1	1.1	1.215883	1.215886
2	1.2	1.467561	1.467570

b.

Orden 4			
i	t_i	w_i	$y(t_i)$
1	0.5	0.5156250	0.5158868
2	1.0	1.091267	1.091818

c.

Orden 4			
i	t_i	w_i	$y(t_i)$
1	1.5	-2.000000	-1.500000
2	2.0	-1.679012	-1.333333
3	2.5	-1.484493	-1.250000
4	3.0	-1.374440	-1.200000

d.

Orden 4			
i	t_i	w_i	$y(t_i)$
1	0.25	1.086426	1.087088
2	0.50	1.288245	1.289805
3	0.75	1.512576	1.513490
4	1.0	1.701494	1.701870

9. a. El método de Taylor de orden dos proporciona los resultados en la siguiente tabla.

i	t_i	w_i	$y(t_i)$
1	1.1	0.3397852	0.3459199
5	1.5	3.910985	3.967666
6	1.6	5.643081	5.720962
9	1.9	14.15268	14.32308
10	2.0	18.46999	18.68310

b. La interpolación lineal proporciona $y(1.04) \approx 0.1359139$, $y(1.55) \approx 4.777033$, y $y(1.97) \approx 17.17480$. Los valores reales son $y(1.04) = 0.1199875$, $y(1.55) = 4.788635$, y $y(1.97) = 17.27930$.

c. El método de Taylor de orden cuatro proporciona los resultados en la siguiente tabla.

i	t_i	w_i
1	1.1	0.3459127
5	1.5	3.967603
6	1.6	5.720875
9	1.9	14.32290
10	2.0	18.68287

d. La interpolación cúbica de Hermite proporciona $y(1.04) \approx 0.1199704$, $y(1.55) \approx 4.788527$, y $y(1.97) \approx 17.27904$.

11. El método de Taylor de orden dos da lo siguiente:

t_i	w_i	$y(t_i)$
5	0.5	0.5146389
10	1.0	1.249305
15	1.5	2.152599
20	2.0	2.095185

13. a. Índice = 2 gal/min. Un incremento de 10 galones requiere 5 minutos.

b. 49.75556 libras de sal

Conjunto de ejercicios 5.4

1. a.

t	Euler modificado	$y(t)$
0.5	0.5602111	0.2836165
1.0	5.3014898	3.2190993

c.

t	Euler modificado	$y(t)$
1.25	2.7750000	2.7789294
1.50	3.6008333	3.6081977
1.75	4.4688294	4.4793276
2.00	5.3728586	5.3862944

3. a.

Euler modificado		
t_i	w_i	$y(t_i)$
1.2	1.0147137	1.0149523
1.5	1.0669093	1.0672624
1.7	1.1102751	1.1106551
2.0	1.1808345	1.1812322

c.

Euler modificado		
t_i	w_i	$y(t_i)$
0.4	-1.6229206	-1.6200510
1.0	-1.2442903	-1.2384058
1.4	-1.1200763	-1.1146484
2.0	-1.0391938	-1.0359724

5. a.

t	Punto medio	$y(t)$
0.5	0.2646250	0.2836165
1.0	3.1300023	3.2190993

b.

t	Euler modificado	$y(t)$
2.5	1.8125000	1.8333333
3.0	2.4815531	2.5000000

d.

t	Euler modificado	$y(t)$
0.25	1.3199027	1.3291498
0.50	1.7070300	1.7304898
0.75	2.0053560	2.0414720
1.00	2.0770789	2.1179795

b.

Euler modificado		
t_i	w_i	$y(t_i)$
1.4	0.4850495	0.4896817
2.0	1.6384229	1.6612818
2.4	2.8250651	2.8765514
3.0	5.7075699	5.8741000

d.

Euler modificado		
t_i	w_i	$y(t_i)$
0.2	0.1742708	0.1626265
0.5	0.2878200	0.2773617
0.7	0.5088359	0.5000658
1.0	1.0096377	1.0022460

b.

t	Punto medio	$y(t)$
2.5	1.7812500	1.8333333
3.0	2.4550638	2.5000000

c.

t	Punto medio	$y(t)$
1.25	2.7777778	2.7789294
1.50	3.6060606	3.6081977
1.75	4.4763015	4.4793276
2.00	5.3824398	5.3862944

7. a.

t_i	w_i	$y(t_i)$
1.2	1.0153257	1.0149523
1.5	1.0677427	1.0672624
1.7	1.1111478	1.1106551
2.0	1.1817275	1.1812322

c.

t_i	w_i	$y(t_i)$
0.4	-1.6192966	-1.6200510
1.0	-1.2402470	-1.2384058
1.4	-1.1175165	-1.1146484
2.0	-1.0382227	-1.0359724

9. a.

t_i	w_i	$y(t_i)$
0.50	0.2710885	0.2836165
1.00	3.1327255	3.2190993

c.

t_i	w_i	$y(t_i)$
1.25	2.7788462	2.7789294
1.50	3.6080529	3.6081977
1.75	4.4791319	4.4793276
2.00	5.3860533	5.3862944

11. a.

t_i	w_i	$y(t_i)$
1.2	1.0149305	1.0149523
1.5	1.0672363	1.0672624
1.7	1.1106289	1.1106551
2.0	1.1812064	1.1812322

d.

t	Punto medio	$y(t)$
0.25	1.3337962	1.3291498
0.50	1.7422854	1.7304898
0.75	2.0596374	2.0414720
1.00	2.1385560	2.1179795

b.

t_i	w_i	$y(t_i)$
1.4	0.4861770	0.4896817
2.0	1.6438889	1.6612818
2.4	2.8364357	2.8765514
3.0	5.7386475	5.8741000

d.

t_i	w_i	$y(t_i)$
0.2	0.1722396	0.1626265
0.5	0.2848046	0.2773617
0.7	0.5056268	0.5000658
1.0	1.0063347	1.0022460

b.

t_i	w_i	$y(t_i)$
2.50	1.8464828	1.8333333
3.00	2.5094123	2.5000000

d.

t_i	w_i	$y(t_i)$
0.25	1.3295717	1.3291498
0.50	1.7310350	1.7304898
0.75	2.0417476	2.0414720
1.00	2.1176975	2.1179795

b.

t_i	w_i	$y(t_i)$
1.4	0.4895074	0.4896817
2.0	1.6602954	1.6612818
2.4	2.8741491	2.8765514
3.0	5.8652189	5.8741000

c.

Heun		
t_i	w_i	$y(t_i)$
0.4	-1.6201023	-1.6200510
1.0	-1.2383500	-1.2384058
1.4	-1.1144745	-1.1146484
2.0	-1.0357989	-1.0359724

d.

Heun		
t_i	w_i	$y(t_i)$
0.2	0.1614497	0.1626265
0.5	0.2765100	0.2773617
0.7	0.4994538	0.5000658
1.0	1.0018114	1.0022460

13. a.

Runge-Kutta		
t_i	w_i	$y(t_i)$
0.5	0.2969975	0.2836165
1.0	3.3143118	3.2190993

b.

Runge-Kutta		
t_i	w_i	$y(t_i)$
2.5	1.8333234	1.8333333
3.0	2.4999712	2.5000000

c.

Runge-Kutta		
t_i	w_i	$y(t_i)$
1.25	2.7789095	2.7789294
1.50	3.6081647	3.6081977
1.75	4.4792846	4.4793276
2.00	5.3862426	5.3862944

d.

Runge-Kutta		
t_i	w_i	$y(t_i)$
0.25	1.3291650	1.3291498
0.50	1.7305336	1.7304898
0.75	2.0415436	2.0414720
1.00	2.1180636	2.1179795

15. a.

Runge-Kutta		
t_i	w_i	$y(t_i)$
1.2	1.0149520	1.0149523
1.5	1.0672620	1.0672624
1.7	1.1106547	1.1106551
2.0	1.1812319	1.1812322

b.

Runge-Kutta		
t_i	w_i	$y(t_i)$
1.4	0.4896842	0.4896817
2.0	1.6612651	1.6612818
2.4	2.8764941	2.8765514
3.0	5.8738386	5.8741000

c.

Runge-Kutta		
t_i	w_i	$y(t_i)$
0.4	-1.6200576	-1.6200510
1.0	-1.2384307	-1.2384058
1.4	-1.1146769	-1.1146484
2.0	-1.0359922	-1.0359724

d.

Runge-Kutta		
t_i	w_i	$y(t_i)$
0.2	0.1627655	0.1626265
0.5	0.2774767	0.2773617
0.7	0.5001579	0.5000658
1.0	1.0023207	1.0022460

17. a. $1.0221167 \approx y(1.25) = 1.0219569$, $1.1640347 \approx y(1.93) = 1.1643901$

b. $1.9086500 \approx y(2.1) = 1.9249616$, $4.3105913 \approx y(2.75) = 4.3941697$

c. $-1.1461434 \approx y(1.3) = -1.1382768$, $-1.0454854 \approx y(1.93) = -1.0412665$

d. $0.3271470 \approx y(0.54) = 0.3140018$, $0.8967073 \approx y(0.94) = 0.8866318$

19. a. $1.0227863 \approx y(1.25) = 1.0219569$, $1.1649247 \approx y(1.93) = 1.1643901$
 b. $1.91513749 \approx y(2.1) = 1.9249616$, $4.3312939 \approx y(2.75) = 4.3941697$
 c. $-1.1432070 \approx y(1.3) = -1.1382768$, $-1.0443743 \approx y(1.93) = -1.0412665$
 d. $0.3240839 \approx y(0.54) = 0.3140018$, $0.8934152 \approx y(0.94) = 0.8866318$
21. a. $1.02235985 \approx y(1.25) = 1.0219569$, $1.16440371 \approx y(1.93) = 1.1643901$
 b. $1.88084805 \approx y(2.1) = 1.9249616$, $4.40842612 \approx y(2.75) = 4.3941697$
 c. $-1.14034696 \approx y(1.3) = -1.1382768$, $-1.04182026 \approx y(1.93) = -1.0412665$
 d. $0.31625699 \approx y(0.54) = 0.3140018$, $0.88866134 \approx y(0.94) = 0.8866318$
23. a. $1.0223826 \approx y(1.25) = 1.0219569$, $1.1644292 \approx y(1.93) = 1.1643901$
 b. $1.9373672 \approx y(2.1) = 1.9249616$, $4.4134745 \approx y(2.75) = 4.3941697$
 c. $-1.1405252 \approx y(1.3) = -1.1382768$, $-1.0420211 \approx y(1.93) = -1.0412665$
 d. $0.31716526 \approx y(0.54) = 0.3140018$, $0.88919730 \approx y(0.94) = 0.8866318$
25. a. $1.0219569 = y(1.25) \approx 1.0219550$, $1.1643902 = y(1.93) \approx 1.1643898$
 b. $1.9249617 = y(2.10) \approx 1.9249217$, $4.3941697 = y(2.75) \approx 4.3939943$
 c. $-1.138268 = y(1.3) \approx -1.1383036$, $-1.0412666 = y(1.93) \approx -1.0412862$
 d. $0.31400184 = y(0.54) \approx 0.31410579$, $0.88663176 = y(0.94) \approx 0.88670653$
27. En 0.2 s, tenemos aproximadamente 2099 unidades de KOH.
29. Con $f(t, y) = -y + t + 1$, tenemos

$$w_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}f(t_i, w_i)\right) = w_i \left(1 - h + \frac{h^2}{2}\right) + t_i \left(h - \frac{h^2}{2}\right) + h$$

y

$$w_i + \frac{h}{2} [f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_i + hf(t_i, w_i))]$$

$$= w_i \left(1 - h + \frac{h^2}{2}\right) + t_i \left(h - \frac{h^2}{2}\right) + h.$$

31. Las constantes adecuadas son

$$\alpha_1 = \delta_1 = \alpha_2 = \delta_2 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = \gamma_7 = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \alpha_3 = \delta_3 = 1.$$

Conjunto de ejercicios 5.5

1. El algoritmo de Runge-Kutta-Fehlberg proporciona los resultados en las siguientes tablas.

a.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
1	0.2093900	0.0298184	0.2093900	0.0298337
3	0.5610469	0.4016438	0.1777496	0.4016860
5	0.8387744	1.5894061	0.1280905	1.5894600
7	1.0000000	3.2190497	0.0486737	3.2190993

c.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
1	1.2500000	2.7789299	0.2500000	2.7789294
2	1.5000000	3.6081985	0.2500000	3.6081977
3	1.7500000	4.4793288	0.2500000	4.4793276
4	2.0000000	5.3862958	0.2500000	5.3862944

b.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
1	2.2500000	1.4499988	0.2500000	1.4500000
2	2.5000000	1.8333332	0.2500000	1.8333333
3	2.7500000	2.1785718	0.2500000	2.1785714
4	3.0000000	2.5000005	0.2500000	2.5000000

d.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
1	0.2500000	1.3291478	0.2500000	1.3291498
2	0.5000000	1.7304857	0.2500000	1.7304898
3	0.7500000	2.0414669	0.2500000	2.0414720
4	1.0000000	2.1179750	0.2500000	2.1179795

3. El algoritmo de Runge-Kutta-Fehlberg proporciona los resultados en las siguientes tablas.

a.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
1	1.1101946	1.0051237	0.1101946	1.0051237
5	1.7470584	1.1213948	0.2180472	1.1213947
7	2.3994350	1.2795396	0.3707934	1.2795395
11	4.0000000	1.6762393	0.1014853	1.6762391

b.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
4	1.5482238	0.7234123	0.1256486	0.7234119
7	1.8847226	1.3851234	0.1073571	1.3851226
10	2.1846024	2.1673514	0.0965027	2.1673499
16	2.6972462	4.1297939	0.0778628	4.1297904
21	3.0000000	5.8741059	0.0195070	5.8741000

c.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
1	0.1633541	-1.8380836	0.1633541	-1.8380836
5	0.7585763	-1.3597623	0.1266248	-1.3597624
9	1.1930325	-1.1684827	0.1048224	-1.1684830
13	1.6229351	-1.0749509	0.1107510	-1.0749511
17	2.1074733	-1.0291158	0.1288897	-1.0291161
23	3.0000000	-1.0049450	0.1264618	-1.0049452

d.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
1	0.3986051	0.3108201	0.3986051	0.3108199
3	0.9703970	0.2221189	0.2866710	0.2221186
5	1.5672905	0.1133085	0.3042087	0.1133082
8	2.0000000	0.0543454	0.0902302	0.0543455

5. a. El número de infecciosos es $y(30) \approx 80295.7$.

b. El valor del límite para el número de infecciones para este modelo es $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 100,000$.

7. En los pasos 3 y 6 se deben usar en las ecuaciones nuevas. Ahora se debe utilizar el paso 4

$$R = \frac{1}{h} \left| -\frac{1}{160}K_1 - \frac{125}{17952}K_3 + \frac{1}{144}K_4 - \frac{12}{1955}K_5 - \frac{3}{44}K_6 + \frac{125}{11592}K_7 + \frac{43}{616}K_8 \right|,$$

y en el paso 8 debemos cambiar a $\delta = 0.871(TOL/R)^{1/5}$. Al repetir el ejercicio 3 con el método de Runge-Kutta-Fehlberg obtenemos los resultados en las siguientes tablas.

a.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
1	1.42087564	1.05149775	0.42087564	1.05150868
3	2.28874724	1.25203709	0.50000000	1.25204675
5	3.28874724	1.50135401	0.50000000	1.50136369
7	4.00000000	1.67622922	0.21125276	1.67623914

b.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
1	1.27377960	0.31440170	0.27377960	0.31440111
4	1.93610139	1.50471956	0.20716801	1.50471717
7	2.48318866	3.19129592	0.17192536	3.19129017
11	3.00000000	5.87411325	0.05925262	5.87409998

c.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
1	0.50000000	-1.53788271	0.50000000	-1.53788284
5	1.26573379	-1.14736319	0.17746598	-1.14736283
9	1.99742532	-1.03615509	0.19229794	-1.03615478
14	3.00000000	-1.00494544	0.10525374	-1.00494525

d.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
1	0.50000000	0.29875168	0.50000000	0.29875178
2	1.00000000	0.21662609	0.50000000	0.21662642
4	1.74337091	0.08624885	0.27203938	0.08624932
6	2.00000000	0.05434531	0.03454832	0.05434551

Conjunto de ejercicios 5.6

1. Los métodos de Adams-Bashforth proporcionan los resultados en las siguientes tablas.

a.

t	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	$y(t)$
0.2	0.0268128	0.0268128	0.0268128	0.0268128	0.0268128
0.4	0.1200522	0.1507778	0.1507778	0.1507778	0.1507778
0.6	0.4153551	0.4613866	0.4960196	0.4960196	0.4960196
0.8	1.1462844	1.2512447	1.2961260	1.3308570	1.3308570
1.0	2.8241683	3.0360680	3.1461400	3.1854002	3.2190993

b.

t	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	$y(t)$
2.2	1.3666667	1.3666667	1.3666667	1.3666667	1.3666667
2.4	1.6750000	1.6857143	1.6857143	1.6857143	1.6857143
2.6	1.9632431	1.9794407	1.9750000	1.9750000	1.9750000
2.8	2.2323184	2.2488759	2.2423065	2.2444444	2.2444444
3.0	2.4884512	2.5051340	2.4980306	2.5011406	2.5000000

c.

t	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	$y(t)$
1.2	2.6187859	2.6187859	2.6187859	2.6187859	2.6187859
1.4	3.2734823	3.2710611	3.2710611	3.2710611	3.2710611
1.6	3.9567107	3.9514231	3.9520058	3.9520058	3.9520058
1.8	4.6647738	4.6569191	4.6582078	4.6580160	4.6580160
2.0	5.3949416	5.3848058	5.3866452	5.3862177	5.3862944

d.

t	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	$y(t)$
0.2	1.2529306	1.2529306	1.2529306	1.2529306	1.2529306
0.4	1.5986417	1.5712255	1.5712255	1.5712255	1.5712255
0.6	1.9386951	1.8827238	1.8750869	1.8750869	1.8750869
0.8	2.1766821	2.0844122	2.0698063	2.0789180	2.0789180
1.0	2.2369407	2.1115540	2.0998117	2.1180642	2.1179795

3. Los métodos de Adams-Bashforth proporcionan los resultados en las siguientes tablas.

a.

t	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	$y(t)$
1.2	1.0161982	1.0149520	1.0149520	1.0149520	1.0149523
1.4	1.0497665	1.0468730	1.0477278	1.0475336	1.0475339
1.6	1.0910204	1.0875837	1.0887567	1.0883045	1.0884327
1.8	1.1363845	1.1327465	1.1340093	1.1334967	1.1336536
2.0	1.1840272	1.1803057	1.1815967	1.1810689	1.1812322

b.

t	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	$y(t)$
1.4	0.4867550	0.4896842	0.4896842	0.4896842	0.4896817
1.8	1.1856931	1.1982110	1.1990422	1.1994320	1.1994386
2.2	2.1753785	2.2079987	2.2117448	2.2134792	2.2135018
2.6	3.5849181	3.6617484	3.6733266	3.6777236	3.6784753
3.0	5.6491203	5.8268008	5.8589944	5.8706101	5.8741000

c.

t	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	$y(t)$
0.5	-1.5357010	-1.5381988	-1.5379372	-1.5378676	-1.5378828
1.0	-1.2374093	-1.2389605	-1.2383734	-1.2383693	-1.2384058
1.5	-1.0952910	-1.0950952	-1.0947925	-1.0948481	-1.0948517
2.0	-1.0366643	-1.0359996	-1.0359497	-1.0359760	-1.0359724

d.

t	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	$y(t)$
0.2	0.1739041	0.1627655	0.1627655	0.1627655	0.1626265
0.4	0.2144877	0.2026399	0.2066057	0.2052405	0.2051118
0.6	0.3822803	0.3747011	0.3787680	0.3765206	0.3765957
0.8	0.6491272	0.6452640	0.6487176	0.6471458	0.6461052
1.0	1.0037415	1.0020894	1.0064121	1.0073348	1.0022460

5. Los métodos de Adams-Moulton proporcionan los resultados en las siguientes tablas.

a.

t_i	Paso 2	Paso 3	Paso 4	$y(t_i)$
0.2	0.0268128	0.0268128	0.0268128	0.0268128
0.4	0.1533627	0.1507778	0.1507778	0.1507778
0.6	0.5030068	0.4979042	0.4960196	0.4960196
0.8	1.3463142	1.3357923	1.3322919	1.3308570
1.0	3.2512866	3.2298092	3.2227484	3.2190993

c.

t_i	Paso 2	Paso 3	Paso 4	$y(t_i)$
1.2	2.6187859	2.6187859	2.6187859	2.6187859
1.4	3.2711394	3.2710611	3.2710611	3.2710611
1.6	3.9521454	3.9519886	3.9520058	3.9520058
1.8	4.6582064	4.6579866	4.6580211	4.6580160
2.0	5.3865293	5.3862558	5.3863027	5.3862944

d.

t_i	Paso 2	Paso 3	Paso 4	$y(t_i)$
0.2	1.2529306	1.2529306	1.2529306	1.2529306
0.4	1.5700866	1.5712255	1.5712255	1.5712255
0.6	1.8738414	1.8757546	1.8750869	1.8750869
0.8	2.0787117	2.0803067	2.0789471	2.0789180
1.0	2.1196912	2.1199024	2.1178679	2.1179795

7. a.

t_i	w_i	$y(t_i)$
0.2	0.0269059	0.0268128
0.4	0.1510468	0.1507778
0.6	0.4966479	0.4960196
0.8	1.3408657	1.3308570
1.0	3.2450881	3.2190993

b.

t_i	w_i	$y(t_i)$
2.2	1.3666610	1.3666667
2.4	1.6857079	1.6857143
2.6	1.9749941	1.9750000
2.8	2.2446995	2.2444444
3.0	2.5003083	2.5000000

c.

t_i	w_i	$y(t_i)$
1.2	2.6187787	2.6187859
1.4	3.2710491	3.2710611
1.6	3.9519900	3.9520058
1.8	4.6579968	4.6580160
2.0	5.3862715	5.3862944

d.

t_i	w_i	$y(t_i)$
0.2	1.2529350	1.2529306
0.4	1.5712383	1.5712255
0.6	1.8751097	1.8750869
0.8	2.0796618	2.0789180
1.0	2.1192575	2.1179795

9. El algoritmo indicador-corrector de cuarto orden proporciona los resultados en las siguientes tablas.

a.

t	w	$y(t)$
1.2	1.0149520	1.0149523
1.4	1.0475227	1.0475339
1.6	1.0884141	1.0884327
1.8	1.1336331	1.1336536
2.0	1.1812112	1.1812322

b.

t	w	$y(t)$
1.4	0.4896842	0.4896817
1.8	1.1994245	1.1994386
2.2	2.2134701	2.2135018
2.6	3.6784144	3.6784753
3.0	5.8739518	5.8741000

c.

t	w	$y(t)$
0.5	-1.5378788	-1.5378828
1.0	-1.2384134	-1.2384058
1.5	-1.0948609	-1.0948517
2.0	-1.0359757	-1.0359724

d.

t	w	$y(t)$
0.2	0.1627655	0.1626265
0.4	0.2048557	0.2051118
0.6	0.3762804	0.3765957
0.8	0.6458949	0.6461052
1.0	1.0021372	1.0022460

11. El método indicador-corrector de Milne-Simpson proporciona los resultados en las siguientes tablas.

a.

i	t_i	w_i	$y(t_i)$
2	1.2	1.01495200	1.01495231
5	1.5	1.06725997	1.06726235
7	1.7	1.11065221	1.11065505
10	2.0	1.18122584	1.18123222

b.

i	t_i	w_i	$y(t_i)$
2	1.4	0.48968417	0.48968166
5	2.0	1.66126150	1.66128176
7	2.4	2.87648763	2.87655142
10	3.0	5.87375555	5.87409998

c.

i	t_i	w_i	$y(t_i)$
5	0.5	-1.53788255	-1.53788284
10	1.0	-1.23840789	-1.23840584
15	1.5	-1.09485532	-1.09485175
20	2.0	-1.03597247	-1.03597242

d.

i	t_i	w_i	$y(t_i)$
2	0.2	0.16276546	0.16262648
5	0.5	0.27741080	0.27736167
7	0.7	0.50008713	0.50006579
10	1.0	1.00215439	1.00224598

13. a. Con $h = 0.01$, el método Adams-Moulton de tres pasos da los valores en la siguiente tabla.

i	t_i	w_i
10	0.1	1.317218
20	0.2	1.784511

b. El método de Newton reducirá el número de iteraciones por paso desde tres a dos, al usar el criterio de paso

$$|w_i^{(k)} - w_i^{(k-1)}| \leq 10^{-6}.$$

15. El nuevo algoritmo proporciona los resultados en las siguientes tablas.

a.

t_i	$w_i(p=2)$	$w_i(p=3)$	$w_i(p=4)$	$y(t_i)$
1.2	1.0149520	1.0149520	1.0149520	1.0149523
1.5	1.0672499	1.0672499	1.0672499	1.0672624
1.7	1.1106394	1.1106394	1.1106394	1.1106551
2.0	1.1812154	1.1812154	1.1812154	1.1812322

b.

t_i	$w_i(p=2)$	$w_i(p=3)$	$w_i(p=4)$	$y(t_i)$
1.4	0.4896842	0.4896842	0.4896842	0.4896817
2.0	1.6613427	1.6613509	1.6613517	1.6612818
2.4	2.8767835	2.8768112	2.8768140	2.8765514
3.0	5.8754422	5.8756045	5.8756224	5.8741000

c.

t_i	$w_i(p=2)$	$w_i(p=3)$	$w_i(p=4)$	$y(t_i)$
0.4	-1.6200494	-1.6200494	-1.6200494	-1.6200510
1.0	-1.2384104	-1.2384105	-1.2384105	-1.2384058
1.4	-1.1146533	-1.1146536	-1.1146536	-1.1146484
2.0	-1.0359139	-1.0359740	-1.0359740	-1.0359724

d.

t_i	$w_i(p=2)$	$w_i(p=3)$	$w_i(p=4)$	$y(t_i)$
0.2	0.1627655	0.1627655	0.1627655	0.1626265
0.5	0.2774037	0.2773333	0.2773468	0.2773617
0.7	0.5000772	0.5000259	0.5000356	0.5000658
1.0	1.0022473	1.0022273	1.0022311	1.0022460

17. A través de la notación $y = y(t_i)$, $f = f(t_i, y(t_i))$, $f_t = f_t(t_i, y(t_i))$, etc., tenemos

$$\begin{aligned}
 & y + hf + \frac{h^2}{2}(f_t + ff_y) + \frac{h^3}{6}(f_{tt} + f_t f_y + 2ff_{yt} + ff_y^2 + f^2 f_{yy}) \\
 &= y + ahf + bh \left[f - h(f_t + ff_y) + \frac{h^2}{2}(f_{tt} + f_t f_y + 2ff_{yt} + ff_y^2 + f^2 f_{yy}) \right] \\
 & \quad + ch \left[f - 2h(f_t + ff_y) + 2h^2(f_{tt} + f_t f_y + 2ff_{yt} + ff_y^2 + f^2 f_{yy}) \right].
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$a + b + c = 1, \quad -b - 2c = \frac{1}{2}, \quad y \quad \frac{1}{2}b + 2c = \frac{1}{6}.$$

Este sistema tiene la solución

$$a = \frac{23}{12}, \quad b = -\frac{16}{12}, \quad y \quad c = \frac{5}{12}.$$

19. Tenemos

$$\begin{aligned} y(t_{i+1}) - y(t_{i-1}) &= \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt \\ &= \frac{h}{3} [f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + 4f(t_i, y(t_i)) + f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi, y(\xi)). \end{aligned}$$

Esto conduce a la ecuación de diferencias

$$w_{i+1} = w_{i-1} + \frac{h [f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 4f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_{i+1})]}{3},$$

con error de truncamiento local

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{-h^4 y^{(5)}(\xi)}{90}.$$

21. Las entradas son generadas al evaluar las siguientes integrales:

$$\begin{aligned} k=0 : & (-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds = \int_0^1 ds = 1, \\ k=1 : & (-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds = - \int_0^1 -s ds = \frac{1}{2}, \\ k=2 : & (-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds = \int_0^1 \frac{s(s+1)}{2} ds = \frac{5}{12}, \\ k=3 : & (-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds = - \int_0^1 \frac{-s(s+1)(s+2)}{6} ds = \frac{3}{8}, \\ k=4 : & (-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds = \int_0^1 \frac{s(s+1)(s+2)(s+3)}{24} ds = \frac{251}{720}, \quad y \\ k=5 : & (-1)^k \int_0^1 \binom{-s}{k} ds = - \int_0^1 \frac{s(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}{120} ds = \frac{95}{288}. \end{aligned}$$

Conjunto de ejercicios 5.7

1. El algoritmo indicador-corrector de longitud de paso variable de Adams da los resultados en las siguientes tablas.

a.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
1	0.04275596	0.00096891	0.04275596	0.00096887
5	0.22491460	0.03529441	0.05389076	0.03529359
12	0.60214994	0.50174348	0.05389076	0.50171761
17	0.81943926	1.45544317	0.04345786	1.45541453
22	0.99830392	3.19605697	0.03577293	3.19602842
26	1.00000000	3.21912776	0.00042395	3.21909932

b.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
1	2.06250000	1.12132350	0.06250000	1.12132353
5	2.31250000	1.55059834	0.06250000	1.55059524
9	2.62471924	2.00923157	0.09360962	2.00922829
13	2.99915773	2.49895243	0.09360962	2.49894707
17	3.00000000	2.50000535	0.00021057	2.50000000

c.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
1	1.06250000	2.18941363	0.06250000	2.18941366
4	1.25000000	2.77892931	0.06250000	2.77892944
8	1.85102559	4.84179835	0.15025640	4.84180141
12	2.00000000	5.38629105	0.03724360	5.38629436

d.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
1	0.06250000	1.06817960	0.06250000	1.06817960
5	0.31250000	1.42861668	0.06250000	1.42861361
10	0.62500000	1.90768386	0.06250000	1.90767015
13	0.81250000	2.08668486	0.06250000	2.08666541
16	1.00000000	2.11800208	0.06250000	2.11797955

3. Las siguientes tablas muestran los resultados representativos del algoritmo indicador-corrector de longitud de paso variable de Adams.

a.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
5	1.10431651	1.00463041	0.02086330	1.00463045
15	1.31294952	1.03196889	0.02086330	1.03196898
25	1.59408142	1.08714711	0.03122028	1.08714722
35	2.00846205	1.18327922	0.04824992	1.18327937
45	2.66272188	1.34525123	0.07278716	1.34525143
52	3.40193112	1.52940900	0.11107035	1.52940924
57	4.00000000	1.67623887	0.12174963	1.67623914

b.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
5	1.18519603	0.20333499	0.03703921	0.20333497
15	1.55558810	0.73586642	0.03703921	0.73586631
25	1.92598016	1.48072467	0.03703921	1.48072442
35	2.29637222	2.51764797	0.03703921	2.51764743
45	2.65452689	3.92602442	0.03092051	3.92602332
55	2.94341188	5.50206466	0.02584049	5.50206279
61	3.00000000	5.87410206	0.00122679	5.87409998

c.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
5	0.16854008	-1.83303780	0.03370802	-1.83303783
17	0.64833341	-1.42945306	0.05253230	-1.42945304
27	1.06742915	-1.21150951	0.04190957	-1.21150932
41	1.75380240	-1.05819340	0.06681937	-1.05819325
51	2.50124702	-1.01335240	0.07474446	-1.01335258
61	3.00000000	-1.00494507	0.01257155	-1.00494525

d.

i	t_i	w_i	h_i	y_i
5	0.28548652	0.32153668	0.05709730	0.32153674
15	0.85645955	0.24281066	0.05709730	0.24281095
20	1.35101725	0.15096743	0.09891154	0.15096772
25	1.66282314	0.09815109	0.06236118	0.09815137
29	1.91226786	0.06418555	0.06236118	0.06418579
33	2.00000000	0.05434530	0.02193303	0.05434551

5. La corriente después de 2 segundos es aproximadamente $i(2) = 8.693$ amperes.
7. La población después de 5 años es 56 751.

Conjunto de ejercicios 5.8

1. El algoritmo de extrapolación proporciona los resultados en las siguientes tablas.

a.

i	t_i	w_i	h	k	y_i
1	0.25	0.04543132	0.25	3	0.04543123
2	0.50	0.28361684	0.25	3	0.28361652
3	0.75	1.05257634	0.25	4	1.05257615
4	1.00	3.21909944	0.25	4	3.21909932

c.

i	t_i	w_i	h	k	y_i
1	1.25	2.77892942	0.25	3	2.77892944
2	1.50	3.60819763	0.25	3	3.60819766
3	1.75	4.47932759	0.25	3	4.47932763
4	2.00	5.38629431	0.25	3	5.38629436

b.

i	t_i	w_i	h	k	y_i
1	2.25	1.44999987	0.25	3	1.45000000
2	2.50	1.83333321	0.25	3	1.83333333
3	2.75	2.17857133	0.25	3	2.17857143
4	3.00	2.49999993	0.25	3	2.50000000

d.

i	t_i	w_i	h	k	y_i
1	0.25	1.32914981	0.25	3	1.32914981
2	0.50	1.73048976	0.25	3	1.73048976
3	0.75	2.04147203	0.25	3	2.04147203
4	1.00	2.11797954	0.25	3	2.11797955

3. El algoritmo de extrapolación proporciona los resultados en las siguientes tablas.

a.

i	t_i	w_i	h	k	y_i
1	1.50	1.06726237	0.50	4	1.06726235
2	2.00	1.18123223	0.50	3	1.18123222
3	2.50	1.30460372	0.50	3	1.30460371
4	3.00	1.42951608	0.50	3	1.42951607
5	3.50	1.55364771	0.50	3	1.55364770
6	4.00	1.67623915	0.50	3	1.67623914

c.

i	t_i	w_i	h	k	y_i
1	0.50	-1.53788284	0.50	4	-1.53788284
2	1.00	-1.23840584	0.50	5	-1.23840584
3	1.50	-1.09485175	0.50	5	-1.09485175
4	2.00	-1.03597242	0.50	5	-1.03597242
5	2.50	-1.01338570	0.50	5	-1.01338570
6	3.00	-1.00494526	0.50	4	-1.00494525

b.

i	t_i	w_i	h	k	y_i
1	1.50	0.64387537	0.50	4	0.64387533
2	2.00	1.66128182	0.50	5	1.66128176
3	2.50	3.25801550	0.50	5	3.25801536
4	3.00	5.87410027	0.50	5	5.87409998

d.

i	t_i	w_i	h	k	y_i
1	0.50	0.29875177	0.50	4	0.29875178
2	1.00	0.21662642	0.50	4	0.21662642
3	1.50	0.12458565	0.50	4	0.12458565
4	2.00	0.05434552	0.50	4	0.05434551

5. La extrapolación predice las coordenadas de captura que son (100, 145.59). Las coordenadas reales son (100, 145.59). Todas las coordenadas están en pies.

Conjunto de ejercicios 5.9

1. El algoritmo Runge-Kutta de sistemas da los resultados en las siguientes tablas.

a.

t_i	w_{1i}	u_{1i}	w_{2i}	u_{2i}
0.200	2.12036583	2.12500839	1.50699185	1.51158743
0.400	4.44122776	4.46511961	3.24224021	3.26598528
0.600	9.73913329	9.83235869	8.16341700	8.25629549
0.800	22.67655977	23.00263945	21.34352778	21.66887674
1.000	55.66118088	56.73748265	56.03050296	57.10536209

b.

t_i	w_{1i}	u_{1i}	w_{2i}	u_{2i}
0.500	0.95671390	0.95672798	-1.08381950	-1.08383310
1.000	1.30654440	1.30655930	-0.83295364	-0.83296776
1.500	1.34416716	1.34418117	-0.56980329	-0.56981634
2.000	1.14332436	1.14333672	-0.36936318	-0.36937457

c.

t_i	w_{1i}	u_{1i}	w_{2i}	u_{2i}	w_{3i}	u_{3i}
0.5	0.70787076	0.70828683	-1.24988663	-1.25056425	0.39884862	0.39815702
1.0	-0.33691753	-0.33650854	-3.01764179	-3.01945051	-0.29932294	-0.30116868
1.5	-2.41332734	-2.41345688	-5.40523279	-5.40844686	-0.92346873	-0.92675778
2.0	-5.89479008	-5.89590551	-8.70970537	-8.71450036	-1.32051165	-1.32544426

d.

t_i	w_{1i}	u_{1i}	w_{2i}	u_{2i}	w_{3i}	u_{3i}
0.2	1.38165297	1.38165325	1.00800000	1.00800000	-0.61833075	-0.61833075
0.5	1.90753116	1.90753184	1.12500000	1.12500000	-0.09090565	-0.09090566
0.7	2.25503524	2.25503620	1.34300000	1.34000000	0.26343971	0.26343970
1.0	2.83211921	2.83212056	2.00000000	2.00000000	0.88212058	0.88212056

3. El algoritmo de Runge-Kutta de sistemas da los resultados en las siguientes tablas.

a.

t_i	w_{1i}	y_i
0.200	0.00015352	0.00015350
0.500	0.00742968	0.00743027
0.700	0.03299617	0.03299805
1.000	0.17132224	0.17132880

b.

t_i	w_{1i}	y_i
1.200	0.96152437	0.96152583
1.500	0.77796897	0.77797237
1.700	0.59373369	0.59373830
2.000	0.27258237	0.27258872

c.

t_i	w_{1i}	y_i
1.000	3.73162695	3.73170445
2.000	11.31424573	11.31452924
3.000	34.04395688	34.04517155

d.

t_i	w_{1i}	w_{2i}
1.200	0.27273759	0.27273791
1.500	1.08849079	1.08849259
1.700	2.04353207	2.04353642
2.000	4.36156675	4.36157780

5. El número predicho de presas, x_{1i} , y los predadores, x_{2i} , están dados en la siguiente tabla.

i	t_i	x_{1i}	x_{2i}
10	1.0	4393	1512
20	2.0	288	3175
30	3.0	32	2042
40	4.0	25	1258

7. Las aproximaciones para los problemas de péndulo en movimiento están dados en la siguiente tabla.

a.		b.	
t_i	θ	t_i	θ
1.0	-0.365903	1.0	-0.338253
2.0	-0.0150563	2.0	-0.0862680

9. El método indicador-corrector de cuarto orden de Adams para sistemas aplicado a los problemas en el ejercicio 1 proporcionan los resultados en las siguientes tablas.

a.				
t_i	w_{1i}	u_{1i}	w_{2i}	u_{2i}
0.200	2.12036583	2.12500839	1.50699185	1.51158743
0.400	4.44122776	4.46511961	3.24224021	3.26598528
0.600	9.73913329	9.83235869	8.16341700	8.25629549
0.800	22.52673210	23.00263945	21.20273983	21.66887674
1.000	54.81242211	56.73748265	55.20490157	57.10536209

b.				
t_i	w_{1i}	u_{1i}	w_{2i}	u_{2i}
0.500	0.95675505	0.95672798	-1.08385916	-1.08383310
1.000	1.30659995	1.30655930	-0.83300571	-0.83296776
1.500	1.34420613	1.34418117	-0.56983853	-0.56981634
2.000	1.14334795	1.14333672	-0.36938396	-0.36937457

c.						
t_i	w_{1i}	u_{1i}	w_{2i}	u_{2i}	w_{3i}	u_{3i}
0.5	0.70787076	0.70828683	-1.24988663	-1.25056425	0.39884862	0.39815702
1.0	-0.33691753	-0.33650854	-3.01764179	-3.01945051	-0.29932294	-0.30116868
1.5	-2.41332734	-2.41345688	-5.40523279	-5.40844686	-0.92346873	-0.92675778
2.0	-5.88968402	-5.89590551	-8.72213325	-8.71450036	-1.32972524	-1.32544426

d.						
t_i	w_{1i}	u_{1i}	w_{2i}	u_{2i}	w_{3i}	u_{3i}
0.2	1.38165297	1.38165325	1.00800000	1.00800000	-0.61833075	-0.61833075
0.5	1.90752882	1.90753184	1.12500000	1.12500000	-0.09090527	-0.09090566
0.7	2.25503040	2.25503620	1.34300000	1.34300000	0.26344040	0.26343970
1.0	2.83211032	2.83212056	2.00000000	2.00000000	0.88212163	0.88212056

Conjunto de ejercicios 5.10

1. Si L es la constante de Lipschitz para ϕ . Entonces

$$u_{i+1} - v_{i+1} = u_i - v_i + h[\phi(t_i, u_i, h) - \phi(t_i, v_i, h)],$$

por lo que

$$|u_{i+1} - v_{i+1}| \leq (1 + hL)|u_i - v_i| \leq (1 + hL)^{i+1}|u_0 - v_0|$$

3. Mediante el ejercicio 32 en la sección 5.4, tenemos

$$\begin{aligned}\phi(t, w, h) &= \frac{1}{6}f(t, w) + \frac{1}{3}f\left(t + \frac{1}{2}h, w + \frac{1}{2}hf(t, w)\right) \\ &\quad + \frac{1}{3}f\left(t + \frac{1}{2}h, w + \frac{1}{2}hf\left(t + \frac{1}{2}h, w + \frac{1}{2}hf(t, w)\right)\right) \\ &\quad + \frac{1}{6}f\left(t + h, w + hf\left(t + \frac{1}{2}h, w + \frac{1}{2}hf\left(t + \frac{1}{2}h, w + \frac{1}{2}hf(t, w)\right)\right)\right),\end{aligned}$$

por lo que

$$\phi(t, w, 0) = \frac{1}{6}f(t, w) + \frac{1}{3}f(t, w) + \frac{1}{3}f(t, w) + \frac{1}{6}f(t, w) = f(t, w).$$

5. **a.** El error de truncamiento local es $\tau_{i+1} = \frac{1}{4}h^3 y^{(4)}(\xi_i)$, para algunas ξ_i , donde $t_{i-2} < \xi_i < t_{i+1}$.
b. El método es consistente, pero inestable y no convergente.
7. El método es inestable.

Conjunto de ejercicios 5.11

1. El método de Euler da los resultados en las siguientes tablas.

a.

t_i	w_i	y_i
0.200	0.027182818	0.449328964
0.500	0.000027183	0.030197383
0.700	0.000000272	0.004991594
1.000	0.000000000	0.000335463

c.

t_i	w_i	y_i
0.500	16.47925	0.479470939
1.000	256.7930	0.841470987
1.500	4096.142	0.997494987
2.000	65523.12	0.909297427

b.

t_i	w_i	y_i
0.200	0.373333333	0.046105213
0.500	-0.093333333	0.250015133
0.700	0.146666667	0.490000277
1.000	1.333333333	1.000000001

d.

t_i	w_i	y_i
0.200	6.128259	1.000000001
0.500	-378.2574	1.000000000
0.700	-6052.063	1.000000000
1.000	387332.0	1.000000000

3. El método de cuarto orden de Runge-Kutta proporciona los resultados en las siguientes tablas.

a.

t_i	w_i	y_i
0.200	0.45881186	0.44932896
0.500	0.03181595	0.03019738
0.700	0.00537013	0.00499159
1.000	0.00037239	0.00033546

b.

t_i	w_i	y_i
0.200	0.07925926	0.04610521
0.500	0.25386145	0.25001513
0.700	0.49265127	0.49000028
1.000	1.00250560	1.00000000

c.

t_i	w_i	y_i
0.500	188.3082	0.47947094
1.000	35296.68	0.84147099
1.500	6632737	0.99749499
2.000	1246413200	0.90929743

d.

t_i	w_i	y_i
0.200	-215.7459	1.00000000
0.500	-555750.0	1.00000000
0.700	-104435653	1.00000000
1.000	-269031268010	1.00000000

5. El algoritmo indicador-corrector de cuarto orden de Adams da los resultados en las siguientes tablas.

a.

t_i	w_i	y_i
0.200	0.4588119	0.4493290
0.500	-0.0112813	0.0301974
0.700	0.0013734	0.0049916
1.000	0.0023604	0.0003355

b.

t_i	w_i	y_i
0.200	0.0792593	0.0461052
0.500	0.1554027	0.2500151
0.700	0.5507445	0.4900003
1.000	0.7278557	1.0000000

c.

t_i	w_i	y_i
.500	188.3082	0.4794709
1.000	38932.03	0.8414710
1.500	9073607	0.9974950
2.000	2115741299	0.9092974

d.

t_i	w_i	y_i
0.200	-215.7459	1.000000001
0.500	-682637.0	1.000000000
0.700	-159172736	1.000000000
1.000	-566751172258	1.000000000

7. El algoritmo trapezoidal proporciona los resultados en las siguientes tablas.

a.

t_i	w_i	k	y_i
0.200	0.39109643	2	0.44932896
0.500	0.02134361	2	0.03019738
0.700	0.00307084	2	0.00499159
1.000	0.00016759	2	0.00033546

b.

t_i	w_i	k	y_i
0.200	0.04000000	2	0.04610521
0.500	0.25000000	2	0.25001513
0.700	0.49000000	2	0.49000028
1.000	1.00000000	2	1.00000000

c.

t_i	w_i	k	y_i
0.500	0.66291133	2	0.47947094
1.000	0.87506346	2	0.84147099
1.500	1.00366141	2	0.99749499
2.000	0.91053267	2	0.90929743

d.

t_i	w_i	k	y_i
0.200	-1.07568307	4	1.00000000
0.500	-0.97868360	4	1.00000000
0.700	-0.99046408	3	1.00000000
1.000	-1.00284456	3	1.00000000

9. a.

t_i	w_{1i}	u_{1i}	w_{2i}	u_{2i}
0.100	-96.33011	0.66987648	193.6651	-0.33491554
0.200	-28226.32	0.67915383	56453.66	-0.33957692
0.300	-8214056	0.69387881	16428113	-0.34693941
0.400	-2390290586	0.71354670	4780581173	-0.35677335
0.500	-695574560790	0.73768711	1391149121600	-0.36884355

b.

t_i	w_{1i}	u_{1i}	w_{2i}	u_{2i}
0.100	0.61095960	0.66987648	-0.21708179	-0.33491554
0.200	0.66873489	0.67915383	-0.31873903	-0.33957692
0.300	0.69203679	0.69387881	-0.34325535	-0.34693941
0.400	0.71322103	0.71354670	-0.35612202	-0.35677335
0.500	0.73762953	0.73768711	-0.36872840	-0.36884355

11. El método de Euler hacia atrás aplicado a $y' = \lambda y$ da

$$w_{i+1} = \frac{w_i}{1 - h\lambda}, \quad \text{por lo que } Q(h\lambda) = \frac{1}{1 - h\lambda}.$$

13. Las siguientes tablas listan los resultados del método de Euler hacia atrás aplicado a los problemas en el ejercicio 2.

a.

i	t_i	w_i	k	y_i
2	0.2	1.67216224	2	1.58928220
4	0.4	1.69987544	2	1.62715998
6	0.6	1.92400672	2	1.87190587
8	0.8	2.28233119	2	2.24385657
10	1.0	2.75757631	2	2.72501978

b.

i	t_i	w_i	k	y_i
2	0.2	0.87957046	2	0.56787944
4	0.4	0.56989261	2	0.44978707
6	0.6	0.64247315	2	0.60673795
8	0.8	0.81061829	2	0.80091188
10	1.0	1.00265457	2	1.00012341

c.

i	t_i	w_i	k	y_i
1	1.25	0.55006309	2	0.51199999
3	1.75	0.19753128	2	0.18658892
5	2.25	0.09060118	2	0.08779150
7	2.75	0.04900207	2	0.04808415

d.

i	t_i	w_i	k	y_i
1	0.25	0.79711852	2	0.96217447
3	0.75	0.72203841	2	0.73168856
5	1.25	0.31248267	2	0.31532236
7	1.75	-0.17796016	2	-0.17824606

Conjunto de ejercicios 6.1

1. **a.** Rectas de intersección con solución $x_1 = x_2 = 1$.
b. Una recta, por lo que existe un número infinito de soluciones con $x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_1$.
c. Una recta, por lo que existe un número infinito de soluciones con $x_2 = -\frac{1}{2}x_1$.
d. Rectas de intersección con solución $x_1 = \frac{2}{7}$ y $x_2 = -\frac{11}{7}$.
3. **a.** $x_1 = 1.0$, $x_2 = -0.98$, $x_3 = 2.9$ **b.** $x_1 = 1.1$, $x_2 = -1.1$, $x_3 = 2.9$
5. La eliminación gaussiana proporciona las siguientes soluciones.
a. $x_1 = 1.1875$, $x_2 = 1.8125$, $x_3 = 0.875$ con un intercambio de fila requerido
b. $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ sin intercambio requerido
c. $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1.2$, $x_4 = 3$ sin intercambio requerido
d. Sin solución única.
7. La eliminación gaussiana con aritmética de precisión única da las siguientes soluciones:
a. $x_1 = -227.0769$, $x_2 = 476.9231$, $x_3 = -177.6923$;
b. $x_1 = 1.001291$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1.00155$;
c. $x_1 = -0.03174600$, $x_2 = 0.5952377$, $x_3 = -2.380951$, $x_4 = 2.777777$;
d. $x_1 = 1.918129$, $x_2 = 1.964912$, $x_3 = -0.9883041$, $x_4 = -3.192982$, $x_5 = -1.134503$.
9. **a.** Cuando $\alpha = -1/3$, no existe solución.
b. Cuando $\alpha = 1/3$, existe un número infinito de soluciones con $x_1 = x_2 + 1.5$, y x_2 es arbitraria.
c. Si $\alpha \neq \pm 1/3$, entonces la solución única es

$$x_1 = \frac{3}{2(1+3\alpha)} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-3}{2(1+3\alpha)}.$$

11. **a.** Existe suficiente comida para satisfacer el consumo diario promedio.
b. Podríamos sumar 200 especies 1 o 150 especies 2 o 100 especies 3 o 100 especies 4.
c. Al suponer que no se seleccionó ninguno de los incrementos indicados en la parte b), las especies 2 podrían aumentar 650 o las especies 3 podrían aumentar 150 o las especies 4 podrían aumentar 150.
d. Al suponer que no se seleccionó ninguno de los incrementos indicados en las partes b) y c), las especies 3 podrían aumentar 150 o las especies 4 podrían aumentar 150.

13. Suponga que x'_1, \dots, x'_n es una solución del sistema lineal (6.1).

a. El nuevo sistema se convierte en

$$\begin{aligned} E_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ E_i : \lambda a_{i1}x_1 + \lambda a_{i2}x_2 + \dots + \lambda a_{in}x_n &= \lambda b_i \\ &\vdots \\ E_n : a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}$$

Claramente, x'_1, \dots, x'_n satisface este sistema. En cambio, si x_1^*, \dots, x_n^* satisface el sistema nuevo, al dividir E_i entre λ muestra que x_1^*, \dots, x_n^* también satisface (6.1).

b. El nuevo sistema se convierte en

$$\begin{aligned} E_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ E_i : (a_{i1} + \lambda a_{j1})x_1 + (a_{i2} + \lambda a_{j2})x_2 + \dots + (a_{in} + \lambda a_{jn})x_n &= b_i + \lambda b_j \\ &\vdots \\ E_n : a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}$$

Claramente, x'_1, \dots, x'_n satisface todo, menos la posibilidad en la i -ésima ecuación. Al multiplicar E_j por λ obtenemos

$$\lambda a_{j1}x'_1 + \lambda a_{j2}x'_2 + \dots + \lambda a_{jn}x'_n = \lambda b_j,$$

que se puede restar de E_i en los resultados del sistema nuevo en el sistema (6.1). Por lo tanto, x'_1, \dots, x'_n satisface el sistema nuevo. En cambio, si x_1^*, \dots, x_n^* es una solución para el sistema nuevo, entonces todo pero menos E_i de (6.1) está satisfecho por x_1^*, \dots, x_n^* . Al multiplicar E_j del sistema nuevo por $-\lambda$ obtenemos

$$-\lambda a_{j1}x_1^* - \lambda a_{j2}x_2^* - \dots - \lambda a_{jn}x_n^* = -\lambda b_j.$$

Sumar esto a E_i en el sistema nuevo produce E_i de (6.1). Por lo tanto, x_1^*, \dots, x_n^* es una solución de (6.1).

c. El sistema nuevo y el sistema antiguo tienen que satisfacer el mismo conjunto de ecuaciones. Por lo tanto, tienen el mismo conjunto de soluciones.

15. El método Gauss-Jordan da los siguientes resultados.

a. $x_1 = 0.98, x_2 = -0.98, x_3 = 2.9$

b. $x_1 = 1.1, x_2 = -1.0, x_3 = 2.9$

17. b. Los resultados de este ejercicio se muestran en la siguiente tabla. (Las abreviaturas M/D y A/S se utilizan para multiplicaciones/divisiones y sumas/restas, respectivamente.)

n	Eliminación gaussiana		Gauss-Jordan	
	M/D	A/S	M/D	A/S
3	17	11	21	12
10	430	375	595	495
50	44150	42875	64975	62475
100	343300	338250	509950	499950

19. El método híbrido de eliminación gaussiana-Gauss-Jordan da los siguientes resultados.

a. $x_1 = 1.0, x_2 = -0.98, x_3 = 2.9$

b. $x_1 = 1.0, x_2 = -1.0, x_3 = 2.9$

Conjunto de ejercicios 6.2

1. a. ninguno b. intercambio de filas 2 y 3. c. ninguno d. intercambio de filas 1 y 2.
3. a. Intercambio de filas 1 y 2. b. Intercambio de filas 1 y 3.
c. Intercambio de filas 1 y 2, después intercambio de filas 2 y 3. d. Intercambio de filas 1 y 2.
5. a. Intercambio de filas 1 y 3, después intercambio de filas 2 y 3. b. Intercambio de filas 2 y 3.
c. Intercambio de filas 2 y 3. d. Intercambio de filas 1 y 3, después intercambio de filas 2 y 3.
7. a. Intercambio de filas 1 y 2, y columnas 1 y 3, después intercambio de filas 2 y 3, después intercambio de columnas 2 y 3.
b. Intercambio de filas 1 y 2, y columnas 1 y 3, después intercambio de filas 2 y 3.
c. Intercambio de filas 1 y 2, y columnas 1 y 3, después intercambio de filas 2 y 3.
d. Intercambio de filas 1 y 2, y columnas 1 y 2, después intercambio de filas 2 y 3, después intercambio de columnas 2 y 3.
9. La eliminación gaussiana con aritmética de corte de tres dígitos da los resultados.
a. $x_1 = 30.0, x_2 = 0.990$ b. $x_1 = 0.00, x_2 = 10.0, x_3 = 0.142$
c. $x_1 = 0.206, x_2 = 0.0154, x_3 = -0.0156, x_4 = -0.716$ d. $x_1 = 0.828, x_2 = -3.32, x_3 = 0.153, x_4 = 4.91$
11. La eliminación gaussiana con aritmética de redondeo de tres dígitos da los siguientes resultados.
a. $x_1 = -10.0, x_2 = 1.01$ b. $x_1 = 0.00, x_2 = 10.0, x_3 = 0.143$
c. $x_1 = 0.185, x_2 = 0.0103, x_3 = -0.0200, x_4 = -1.12$ d. $x_1 = 0.799, x_2 = -3.12, x_3 = 0.151, x_4 = 4.56$
13. La eliminación gaussiana con pivoteo parcial y aritmética de corte de tres dígitos da los siguientes resultados.
a. $x_1 = 10.0, x_2 = 1.00$ b. $x_1 = -0.163, x_2 = 9.98, x_3 = 0.142$
c. $x_1 = 0.177, x_2 = -0.0072, x_3 = -0.0208, x_4 = -1.18$ d. $x_1 = 0.777, x_2 = -3.10, x_3 = 0.161, x_4 = 4.50$
15. La eliminación gaussiana con pivoteo parcial y aritmética de redondeo de tres dígitos da los siguientes resultados.
a. $x_1 = 10.0, x_2 = 1.00$ b. $x_1 = 0.00, x_2 = 10.0, x_3 = 0.143$
c. $x_1 = 0.178, x_2 = 0.0127, x_3 = -0.0204, x_4 = -1.16$ d. $x_1 = 0.845, x_2 = -3.37, x_3 = 0.182, x_4 = 5.07$
17. La eliminación gaussiana con pivoteo parcial y aritmética de corte de tres dígitos da los siguientes resultados.
a. $x_1 = 10.0, x_2 = 1.00$ b. $x_1 = -0.163, x_2 = 9.98, x_3 = 0.142$
c. $x_1 = 0.171, x_2 = 0.0102, x_3 = -0.0217, x_4 = -1.27$ d. $x_1 = 0.687, x_2 = -2.66, x_3 = 0.117, x_4 = 3.59$
19. La eliminación gaussiana con pivoteo parcial escalado y aritmética de redondeo de tres dígitos da los siguientes resultados.
a. $x_1 = 10.0, x_2 = 1.00$ b. $x_1 = 0.00, x_2 = 10.0, x_3 = 0.143$
c. $x_1 = 0.180, x_2 = 0.0128, x_3 = -0.0200, x_4 = -1.13$ d. $x_1 = 0.783, x_2 = -3.12, x_3 = 0.147, x_4 = 4.53$
21. a. $x_1 = 9.98, x_2 = 1.00$ b. $x_1 = 0.0724, x_2 = 10.0, x_3 = 0.0952$
c. $x_1 = 0.161, x_2 = 0.0125, x_3 = -0.0232, x_4 = -1.42$ d. $x_1 = 0.719, x_2 = -2.86, x_3 = 0.146, x_4 = 4.00$
23. a. $x_1 = 10.0, x_2 = 1.00$ b. $x_1 = 0.00, x_2 = 10.0, x_3 = 0.143$
c. $x_1 = 0.179, x_2 = 0.0127, x_3 = -0.0203, x_4 = -1.15$ d. $x_1 = 0.874, x_2 = -3.49, x_3 = 0.192, x_4 = 5.33$
25. b. $i_1 = 2.43478$ amps, $i_2 = 4.53846$ amps, $i_3 = -0.23077$ amps
c. $i_1 = 23.0$ amps, $i_2 = 6.54$ amps, $i_3 = 2.97$ amps
d. Real (c) $i_1 = 9.53$ amps, $i_2 = 6.56$ amps, $i_3 = 2.97$ amps. Con pivoteo $i_1 = 9.52$ amps, $i_2 = 6.55$ amps, $i_3 = 2.97$ amps.

Conjunto de ejercicios 6.3

1. a. $\begin{bmatrix} 4 \\ -18 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 0 & 7 & -16 \end{bmatrix}$
3. a. $\begin{bmatrix} -4 & 10 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 11 & 4 & -8 \\ 6 & 13 & -12 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 3 & 4 & -11 \\ -6 & -7 & -4 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -14 & 7 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

5. a. La matriz es singular. b. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$ c. La matriz es singular. d. $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{14} & \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ \frac{3}{28} & -\frac{11}{7} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

7. Las soluciones de los sistemas lineales obtenidas en las partes a) y b) son, de izquierda a derecha,

$$x_1 = 3, x_2 = -6, x_3 = -2, x_4 = -1 \quad \text{y} \quad x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$$

9. No, ya que los productos $A_{ij}B_{jk}$, para $1 \leq i, j, k \leq 2$, no se puede formar.

Lo siguiente son las condiciones necesarias y suficientes:

- a. El número de columnas de A es igual al número de filas de B .
- b. El número de líneas verticales de A es igual al número de líneas horizontales de B .
- c. La colocación de las líneas verticales de A es idéntica a la colocación de las líneas horizontales de B .

11. a. $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^4 = A, \quad A^5 = A^2, \quad A^6 = I, \dots$

b.

	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4
Año 1	6000	36000	12000	6000
Año 2	6000	3000	18000	6000
Año 3	6000	2000	1000	6000

c.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La entrada i, j es el número de escarabajos de edad i , necesario para producir un escarabajo de edad j .

13. a. Suponga que \tilde{A} y \hat{A} son inversas de A . Entonces $\tilde{A}\tilde{A} = \tilde{A}A = I$ y $A\hat{A} = \hat{A}A = I$. Por lo tanto,

$$\tilde{A} = \tilde{A}I = \tilde{A}(A\hat{A}) = (\tilde{A}A)\hat{A} = I\hat{A} = \hat{A}.$$

b. $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$ y $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$, por lo que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ya que existe una sola inversa.

c. Puesto que $A^{-1}A = AA^{-1} = I$, sigue a A^{-1} que es no singular. Puesto que la inversa es única, tenemos $(A^{-1})^{-1} = A$.

15. a. Tenemos

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 & 0 \\ -6 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2(x_0 - x_1) + \alpha_0 + \alpha_1 \\ 3(x_1 - x_0) - \alpha_1 - 2\alpha_0 \\ \alpha_0 \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(x_0 - x_1) + 3\alpha_0 + 3\alpha_1 \\ 3(x_1 - x_0) - 3\alpha_1 - 6\alpha_0 \\ 3\alpha_0 \\ x_0 \end{bmatrix}$$

b. $B = A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 2 & \frac{7}{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

17. Las respuestas son iguales a las del ejercicio 5.

Conjunto de ejercicios 6.4

1. Los determinantes de las matrices son:

a. -8

b. 14

c. 0

d. 3

3. Las respuestas son iguales a las del ejercicio 1.

5. $\alpha = -\frac{3}{2}$ y $\alpha = 2$

7. $\alpha = -5$

9. a. $\bar{x} = x_1 + ix_2 = re^{i\alpha}$, donde $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\alpha = \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1}$. Por lo que,

$$R_\theta \bar{x} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta \\ x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{bmatrix}. \text{ Por lo que,}$$

$$\bar{y} = re^{i(\alpha+\theta)} = r(\cos(\alpha+\theta) + i \sin(\alpha+\theta)) = (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta) + i(x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta) = y_1 + iy_2. \text{ Por lo que, } \bar{y} = R_\theta \bar{x}$$

b. $R_\theta^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = R_{-\theta}$

c. $R_{\frac{\pi}{6}} \bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 \\ \sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ y $R_{-\frac{\pi}{6}} \bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} + 1 \\ \sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

d. $\det R_\theta = \det R_\theta^{-1} = 1$

11. a. $\det A = 0$

b. Si $\det A \neq 0$, el sistema tendría una única solución $(0, 0, 0, 0)^t$ lo cual no tiene sentido en el contexto

c. $x_1 = \frac{1}{2}x_4$, $x_2 = x_4$, $x_3 = \frac{1}{2}x_4$, x_4 es cualquier entero positivo impar.

13. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Expandiendo a lo largo de las terceras filas obtenemos

$$\begin{aligned} \det A &= a_{31} \det \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} - a_{32} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix} + a_{33} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \det \tilde{A} &= a_{31} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} - a_{32} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{11} & a_{13} \end{bmatrix} + a_{33} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} \\ &= a_{31}(a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23}) - a_{32}(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) + a_{33}(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) = -\det A. \end{aligned}$$

Los otros dos casos son similares.

15. a. La solución es $x_1 = 0$, $x_2 = 10$, y $x_3 = 26$.

b. Tenemos $D_1 = -1$, $D_2 = 3$, $D_3 = 7$, y $D = 0$, y no hay soluciones.

c. Tenemos $D_1 = D_2 = D_3 = D = 0$, y existen infinitas soluciones.

d. La regla de Cramer requiere 39 multiplicaciones/divisiones y 20 sumas/restas.

Conjunto de ejercicios 6.5

1. a. $x_1 = -3$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$

b. $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{9}{2}$, $x_3 = \frac{7}{2}$

3. a. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b. $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d. $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. a. $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & 0 \\ 1.5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4.5 & 7.5 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

b. $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2.106719 & 1 & 0 \\ 3.067193 & 1.197756 & 1 \end{bmatrix}$ y $U = \begin{bmatrix} 1.012 & -2.132 & 3.104 \\ 0 & -0.3955257 & -0.4737443 \\ 0 & 0 & -8.939141 \end{bmatrix}$

$$\text{c. } L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1.33333 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{d. } L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1.849190 & 1 & 0 & 0 \\ -0.4596433 & -0.2501219 & 1 & 0 \\ 2.768661 & -0.3079435 & -5.352283 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$U = \begin{bmatrix} 2.175600 & 4.023099 & -2.173199 & 5.196700 \\ 0 & 13.43947 & -4.018660 & 10.80698 \\ 0 & 0 & -0.8929510 & 5.091692 \\ 0 & 0 & 0 & 12.03614 \end{bmatrix}$$

7. a. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$

b. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$

c. $x_1 = 1.5, x_2 = 2, x_3 = -1.199998, x_4 = 3$

d. $x_1 = 2.939851, x_2 = 0.07067770, x_3 = 5.677735, x_4 = 4.379812$

9. a. $P^T LU = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

b. $P^T LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

11. a. $A = PLU = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ La población inicial debe ser $(200, 200, 200, 200)^T$

b. La población inicial debe ser $(200, 400, 800, -300)^T$. La entrada negativa muestra que la población 1 año después nunca puede ser 100 hembras de cada edad.

13. a. Para calcular $P^T LU$ requiere $\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$ multiplicaciones/divisiones y $\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ sumas/restas.

b. Si \tilde{P} se obtiene a partir de P mediante un simple intercambio de filas, entonces $\det \tilde{P} = -\det P$. Por lo tanto, si \tilde{P} se obtiene a partir de P por k intercambios, tenemos $\det \tilde{P} = (-1)^k \det P$.

c. Sólo se necesitan $n - 1$ multiplicaciones, además de las operaciones en la parte a).

d. Tenemos $\det A = -741$. Para factorizar y calcular $\det A$ se requieren 75 multiplicaciones/divisiones y 55 sumas/restas.

Conjunto de ejercicios 6.6

1. a. La única matriz simétrica es a).

b. Todas son no singulares.

c. Las matrices a) y b) son estricta y diagonalmente dominantes.

d. La única matriz definida positiva es a).

3. a.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

b.

$$L = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.25 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.25 & -0.45454545 & 1.0 & 0.0 \\ 0.25 & 0.27272727 & 0.076923077 & 1.0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 4.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 2.75 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.1818182 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.5384615 \end{bmatrix}$$

c.

$$L = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.25 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ -0.25 & -0.27272727 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.44 & 1.0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 4.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 2.75 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 4.5454545 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 3.12 \end{bmatrix}$$

d.

$$L = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.33333333 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.16666667 & 0.2 & 1.0 & 0.0 \\ -0.16666667 & 0.1 & -0.24324324 & 1.0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 6.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 3.3333333 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 3.7 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.5810811 \end{bmatrix}$$

5. El algoritmo de Cholesky da los siguientes resultados.

a. $L = \begin{bmatrix} 1.414213 & 0 & 0 \\ -0.7071069 & 1.224743 & 0 \\ 0 & -0.8164972 & 1.154699 \end{bmatrix}$

b. $L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1.658311 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.7537785 & 1.087113 & 0 \\ 0.5 & 0.4522671 & 0.08362442 & 1.240346 \end{bmatrix}$

c. $L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1.658311 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.4522671 & 2.132006 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9380833 & 1.766351 \end{bmatrix}$

d. $L = \begin{bmatrix} 2.449489 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8164966 & 1.825741 & 0 & 0 \\ 0.4082483 & 0.3651483 & 1.923538 & 0 \\ -0.4082483 & 0.1825741 & -0.4678876 & 1.606574 \end{bmatrix}$

7. El algoritmo modificado de factorización da los siguientes resultados.

a. $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0$

b. $x_1 = 0.2, x_2 = -0.2, x_3 = -0.2, x_4 = 0.25$

c. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = 2$

d. $x_1 = -0.8586387, x_2 = 2.418848, x_3 = -0.9581152, x_4 = -1.272251$

9. El algoritmo modificado de Cholesky proporciona los siguientes resultados.

a. $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0$

b. $x_1 = 0.2, x_2 = -0.2, x_3 = -0.2, x_4 = 0.25$

c. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = 2$

d. $x_1 = -0.85863874, x_2 = 2.4188482, x_3 = -0.95811518, x_4 = -1.2722513$

- ### Conjunto de ejercicios 7.1

1.
 - a. Tenemos $\|\mathbf{x}\|_\infty = 4$ y $\|\mathbf{x}\|_2 = 5.220153$.
 - b. Tenemos $\|\mathbf{x}\|_\infty = 4$ y $\|\mathbf{x}\|_2 = 5.477226$.
 - c. Tenemos $\|\mathbf{x}\|_\infty = 2^k$ y $\|\mathbf{x}\|_2 = (1 + 4^k)^{1/2}$.
 - d. Tenemos $\|\mathbf{x}\|_\infty = 4/(k+1)$ y $\|\mathbf{x}\|_2 = (16/(k+1)^2 + 4/k^4 + k^4 e^{-2k})^{1/2}$.
3.
 - a. Tenemos $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = (0, 0, 0)^t$.
 - b. Tenemos $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = (0, 1, 3)^t$.
 - c. Tenemos $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = (0, 0, \frac{1}{2})^t$.
 - d. Tenemos $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = (1, -1, 1)^t$.
5. Las normas l_∞ son las siguientes:
 - a. 25
 - b. 16
 - c. 4
 - d. 12
7.
 - a. Tenemos $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_\infty = 8.57 \times 10^{-4}$ y $\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_\infty = 2.06 \times 10^{-4}$.
 - b. Tenemos $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_\infty = 0.90$ y $\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_\infty = 0.27$.
 - c. Tenemos $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_\infty = 0.5$ y $\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_\infty = 0.3$.
 - d. Tenemos $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_\infty = 6.55 \times 10^{-2}$, y $\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_\infty = 0.32$.

9. a. Puesto que $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \geq 0$ con igualdad sólo si $x_i = 0$ para todas las i , propiedades *i*) y *ii*) en la definición 7.1 se mantiene. Además,

$$\|\alpha \mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |\alpha x_i| = \sum_{i=1}^n |\alpha| |x_i| = |\alpha| \sum_{i=1}^n |x_i| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|_1,$$

por lo que la propiedad *iii*) se mantiene.
Finalmente,

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|\mathbf{x}\|_1 + \|\mathbf{y}\|_1,$$

por lo que la propiedad *iv*) también se mantiene.

- b. (1a) 8.5 (1b) 10 (1c) $|\sin k| + |\cos k| + e^k$ (1d) $4/(k+1) + 2/k^2 + k^2 e^{-k}$
c. Tenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_1^2 &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)^2 = (|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)^2 \\ &\geq |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \|\mathbf{x}\|_2^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|\mathbf{x}\|_1 \geq \|\mathbf{x}\|_2$.

11. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces $\|AB\|_{\otimes} = 2$, pero $\|A\|_{\otimes} \cdot \|B\|_{\otimes} = 1$.

13. b. Tenemos

5a. $\|A\|_F = \sqrt{326}$

5b. $\|A\|_F = \sqrt{326}$

5c. $\|A\|_F = 4$

5d. $\|A\|_F = \sqrt{148}$.

15. Que $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ se sigue fácilmente. Que $\|\mathbf{x}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se sigue de la definición de definida positiva. Además,

$$\|\alpha \mathbf{x}\| = [(\alpha \mathbf{x})^t S(\alpha \mathbf{x})]^{\frac{1}{2}} = [\alpha^2 \mathbf{x}^t S \mathbf{x}]^{\frac{1}{2}} = |\alpha| (\mathbf{x}^t S \mathbf{x})^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \|\mathbf{x}\|.$$

A partir de la factorización de Cholesky, si $S = LL^t$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^t S \mathbf{y} &= \mathbf{x}^t L L^t \mathbf{y} = (L^t \mathbf{x})^t (L^t \mathbf{y}) \\ &\leq \left[(L^t \mathbf{x})^t (L^t \mathbf{x}) \right]^{1/2} \left[(L^t \mathbf{y})^t (L^t \mathbf{y}) \right]^{1/2} \\ &= (\mathbf{x}^t L L^t \mathbf{x})^{1/2} (\mathbf{y}^t L L^t \mathbf{y})^{1/2} = (\mathbf{x}^t S \mathbf{x})^{1/2} (\mathbf{y}^t S \mathbf{y})^{1/2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= [(\mathbf{x} + \mathbf{y})^t S(\mathbf{x} + \mathbf{y})] = [\mathbf{x}^t S \mathbf{x} + \mathbf{y}^t S \mathbf{x} + \mathbf{x}^t S \mathbf{y} + \mathbf{y}^t S \mathbf{y}] \\ &\leq \mathbf{x}^t S \mathbf{x} + 2 (\mathbf{x}^t S \mathbf{x})^{1/2} (\mathbf{y}^t S \mathbf{y})^{1/2} + (\mathbf{y}^t S \mathbf{y})^{1/2} \\ &= \mathbf{x}^t S \mathbf{x} + 2 \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| + \mathbf{y}^t S \mathbf{y} = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2. \end{aligned}$$

Esto demuestra las propiedades *i*) – *iv*) de la definición 7.1.

17. No es difícil mostrar que *i*) se mantiene. Si $\|A\| = 0$, entonces $\|A\mathbf{x}\| = 0$ para todos los vectores \mathbf{x} con $\|\mathbf{x}\| = 1$. Usando $\mathbf{x} = (1, 0, \dots, 0)^t$, $\mathbf{x} = (0, 1, 0, \dots, 0)^t, \dots$, y $\mathbf{x} = (0, \dots, 0, 1)^t$ sucesivamente implica que cada columna de A es cero. Por lo tanto, $\|A\| = 0$ si y sólo si $A = 0$. Además,

$$\|\alpha A\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|(\alpha A)\mathbf{x}\| = |\alpha| \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|A\|,$$

$$\|A + B\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|(A + B)\mathbf{x}\| \leq \max_{\|\mathbf{x}\|=1} (\|A\mathbf{x}\| + \|B\mathbf{x}\|),$$

por lo que

$$\|A + B\| \leq \max_{\|x\|=1} \|Ax\| + \max_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\|$$

y

$$\|AB\| = \max_{\|x\|=1} \|(AB)x\| = \max_{\|x\|=1} \|A(Bx)\|.$$

Por lo tanto,

$$\|AB\| \leq \max_{\|x\|=1} \|A\| \|Bx\| = \|A\| \max_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\| \|B\|.$$

19. Primero observe que el lado derecho de la desigualdad no cambia si se reemplaza x por cualquier vector \hat{x} con $|x_i| = |\hat{x}_i|$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Entonces seleccione el nuevo vector \hat{x} de tal forma que $\hat{x}_i y_i \geq 0$ para cada i , y aplique la desigualdad a \hat{x} y y .

Conjunto de ejercicios 7.2

1. a. El eigenvalor $\lambda_1 = 3$ tiene el eigenvector $x_1 = (1, -1)^t$, y el eigenvalor $\lambda_2 = 1$ tiene el eigenvector $x_2 = (1, 1)^t$.
 b. El eigenvalor $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ tiene el eigenvector $x = \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t$, y el eigenvalor $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ tiene el eigenvector $x = \left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t$.
 c. El eigenvalor $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ tiene el eigenvector $x_1 = (1, 1)^t$, y el eigenvalor $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ tiene el eigenvector $x_2 = (1, -1)^t$.
 d. El eigenvalor $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ tiene el eigenvector $x_1 = (0, 0, 1)^t$ y $x_2 = (1, 1, 0)^t$, y el eigenvalor $\lambda_3 = 1$ tiene un eigenvector $x_3 = (-1, 1, 0)^t$.
 e. El eigenvalor $\lambda_1 = 7$ tiene el eigenvector $x_1 = (1, 4, 4)^t$, el eigenvalor $\lambda_2 = 3$ tiene el eigenvector $x_2 = (1, 2, 0)^t$, y el eigenvalor $\lambda_3 = -1$ tiene el eigenvector $x_3 = (1, 0, 0)^t$.
 f. El eigenvalor $\lambda_1 = 5$ tiene el eigenvector $x_1 = (1, 2, 1)^t$, y el eigenvalor $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ tiene el eigenvector $x_2 = (-1, 0, 1)^t$ y $x_3 = (-1, 1, 0)^t$.
3. a. Los eigenvalores $\lambda_1 = 2 + \sqrt{2}i$ y $\lambda_2 = 2 - \sqrt{2}i$ tienen los eigenvectores $x_1 = (-\sqrt{2}i, 1)^t$ y $x_2 = (\sqrt{2}i, 1)^t$.
 b. Los eigenvalores $\lambda_1 = (3 + \sqrt{7}i)/2$ y $\lambda_2 = (3 - \sqrt{7}i)/2$ tienen los eigenvectores $x_1 = ((1 - \sqrt{7}i)/2, 1)^t$ y $x_2 = ((1 + \sqrt{7}i)/2, 1)^t$.
5. a. 3 b. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ c. $\frac{1}{2}$ d. 3 e. 7 f. 5
7. Sólo la matriz en 1 c) es convergente.
9. a. 3 b. 1.618034 c. 0.5 d. 3 e. 8.224257 f. 5.203527
11. Puesto que

$$A_1^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2^k-1}{2^{k+1}} & 2^{-k} \end{bmatrix}, \text{ tenemos } \lim_{k \rightarrow \infty} A_1^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Además,

$$A_2^k = \begin{bmatrix} 2^{-k} & 0 \\ \frac{16k}{2^{k-1}} & 2^{-k} \end{bmatrix}, \text{ por lo que } \lim_{k \rightarrow \infty} A_2^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

13. a. Tenemos el eigenvalor real $\lambda = 1$ con el eigenvector $x = (6, 3, 1)^t$.
 b. Seleccione cualquier múltiplo del vector $(6, 3, 1)^t$.
15. Si A es una matriz $n \times n$. Al expandir a lo largo de la primera fila obtenemos el polinomio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)M_{11} + \sum_{j=2}^n (-1)^{j+1} a_{1j} M_{1j}.$$

Los determinantes M_{1j} tienen la forma

$$M_{1j} = \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \cdots & a_{j-1,j-1} - \lambda & a_{j-1,j+1} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \cdots & a_{j,j-1} & a_{j,j+1} & \cdots & a_{j,n} \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & \cdots & a_{j+1,j-1} & a_{j+1,j+1} - \lambda & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix},$$

para $j = 2, \dots, n$. Observe que cada M_{1j} tiene $n - 2$ entradas de la forma $a_{ii} - \lambda$. Por lo tanto,

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)M_{11} + \{\text{términos de grado } n - 2 \text{ o menos}\}.$$

Puesto que

$$M_{11} = \det \begin{bmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

tiene la misma forma que $\det(A - \lambda I)$, el mismo argumento se puede aplicar repetidamente para determinar

$$p(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda) + \{\text{términos de grado } n - 2 \text{ o menos en } \lambda\}.$$

Por lo tanto, $p(\lambda)$ es un polinomio de grado n .

- 17. a.** $\det(A - \lambda I) = \det((A - \lambda I)') = \det(A' - \lambda I)$
b. Si $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, entonces $A^2\mathbf{x} = \lambda A\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$ y, por medio de inducción $A^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}$.
c. Si $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ y A^{-1} existe, entonces $\mathbf{x} = \lambda A^{-1}\mathbf{x}$. Mediante el ejercicio 16 (b), $\lambda \neq 0$, por lo que $\frac{1}{\lambda}\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{x}$.
d. Puesto que $A^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{x}$, tenemos $(A^{-1})^2\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda^2}\mathbf{x}$. La inducción matemática da

$$(A^{-1})^k\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda^k}\mathbf{x}.$$

e. Si $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, entonces

$$q(A)\mathbf{x} = q_0\mathbf{x} + q_1A\mathbf{x} + \cdots + q_kA^k\mathbf{x} = q_0\mathbf{x} + q_1\lambda\mathbf{x} + \cdots + q_k\lambda^k\mathbf{x} = q(\lambda)\mathbf{x}.$$

f. Si $A - \alpha I$ es no singular. Puesto que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$,

$$(A - \alpha I)\mathbf{x} = A\mathbf{x} - \alpha I\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x} = (\lambda - \alpha)\mathbf{x}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{\lambda - \alpha}\mathbf{x} = (A - \alpha I)^{-1}\mathbf{x}.$$

19. Para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

Tenemos $\rho(A) = \rho(B) = 1$ y $\rho(A + B) = 3$.

Conjunto de ejercicios 7.3

1. Dos iteraciones del método de Jacobi proporcionan los siguientes resultados.
 - a. $(0.1428571, -0.3571429, 0.4285714)^t$
 - b. $(0.97, 0.91, 0.74)^t$
 - c. $(-0.65, 1.65, -0.4, -2.475)^t$
 - d. $(1.325, -1.6, 1.6, 1.675, 2.425)^t$
3. Dos iteraciones del método de Gauss-Seidel proporcionan los siguientes resultados.
 - a. $\mathbf{x}^{(2)} = (0.1111111, -0.2222222, 0.6190476)^t$
 - b. $\mathbf{x}^{(2)} = (0.979, 0.9495, 0.7899)^t$
 - c. $\mathbf{x}^{(2)} = (-0.5, 2.64, -0.336875, -2.267375)^t$
 - d. $\mathbf{x}^{(2)} = (1.189063, -1.521354, 1.862396, 1.882526, 2.255645)^t$
5. El algoritmo de Jacobi da los siguientes resultados.
 - a. $\mathbf{x}^{(8)} = (0.0351008, -0.2366338, 0.6581273)^t$
 - b. $\mathbf{x}^{(6)} = (0.9957250, 0.9577750, 0.7914500)^t$
 - c. $\mathbf{x}^{(21)} = (-0.7971058, 2.7951707, -0.2593958, -2.2517930)^t$
 - d. $\mathbf{x}^{(12)} = (0.7870883, -1.003036, 1.866048, 1.912449, 1.985707)^t$
7. El algoritmo de Gauss-Seidel da los siguientes resultados.
 - a. $\mathbf{x}^{(6)} = (0.03535107, -0.2367886, 0.6577590)^t$
 - b. $\mathbf{x}^{(4)} = (0.9957475, 0.9578738, 0.7915748)^t$
 - c. $\mathbf{x}^{(10)} = (-0.7973091, 2.794982, -0.2589884, -2.251798)^t$
 - d. $\mathbf{x}^{(7)} = (0.7866825, -1.002719, 1.866283, 1.912562, 1.989790)^t$
9. a.

$$T_j = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \det(\lambda I - T_j) = \lambda^3 + \frac{5}{4}\lambda.$$

Por lo tanto, los eigenvalores de T_j son 0 y $\pm \frac{\sqrt{5}}{2}i$, por lo que $\rho(T_j) = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$.

- b. $\mathbf{x}^{(25)} = (-20.827873, 2.0000000, -22.827873)^t$
- c.

$$T_g = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ y } \det(\lambda I - T_g) = \lambda \left(\lambda + \frac{1}{2} \right)^2.$$

Por lo tanto, los eigenvalores de T_g son $0, -1/2$, y $-1/2$; por lo que $\rho(T_g) = 1/2$.

- d. $\mathbf{x}^{(23)} = (1.0000023, 1.9999975, -1.0000001)^t$ está dentro de 10^{-5} en la norma l_∞ .
11. a. A no es estricta y diagonalmente dominante.
 - b.

$$T_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.75 \\ 0 & 0 & -0.625 \end{bmatrix} \text{ y } \rho(T_g) = 0.625.$$

- c. Con $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^t$, $\mathbf{x}^{(13)} = (0.89751310, -0.80186518, 0.7015543)^t$
 - d. $\rho(T_g) = 1.375$. Puesto que T_g no es convergente, el método Gauss-Seidel no convergerá.
13. Los resultados de este ejercicio se listan en el ejercicio 9 del Conjunto de ejercicios 7.4, donde se proporcionan los resultados adicionales para un método presentado en la sección 7.4.
 15. a. Las ecuaciones se reordenaron de tal forma que $a_{ii} \neq 0$ para $i = 1, 2, \dots, 8$.
 - b. i). $F_1 \approx -0.00265$
 $F_2 \approx -6339.745$
 $F_3 \approx -3660.255$
 $f_1 \approx -8965.753$
 $f_2 \approx 6339.748$
 $f_3 \approx 10000$
 $f_4 \approx -7320.507$
 $f_5 \approx 6339.748$
 El método iterativo de Jacobi requería 57 iteraciones.

- ii). $F_1 \approx -0.003621$
 $F_2 \approx -6339.745$
 $F_3 \approx -3660.253$
 $f_1 \approx -8965.756$
 $f_2 \approx 6339.745$
 $f_3 \approx 10000$
 $f_4 \approx -7320.509$
 $f_5 \approx 6339.747$

El método de Gauss-Seidel requería 30 iteraciones.

17. La matriz $T_j = (t_{ik})$ tiene entradas dadas por

$$t_{ik} = \begin{cases} 0, & i = k \text{ para } 1 \leq i \leq n \text{ y } 1 \leq k \leq n \\ -\frac{a_{ik}}{a_{ii}}, & i \neq k \text{ para } 1 \leq i \leq n \text{ y } 1 \leq k \leq n. \end{cases}$$

Puesto que A es estricta y diagonalmente dominante,

$$\|T_j\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \left| \frac{a_{ik}}{a_{ii}} \right| < 1.$$

19. a. Puesto que A es definida positiva, $a_{ii} > 0$ para $1 \leq i \leq n$, y A es simétrica. Por lo tanto, A se puede reescribir como $A = D - L - L^t$, donde D es diagonal con $d_{ii} > 0$ y L es triangular inferior. La diagonal de la matriz triangular inferior $D - L$ tiene las entradas positivas $d_{11} = a_{11}$, $d_{22} = a_{22}$, \dots , $d_{nn} = a_{nn}$, por lo que $(D - L)^{-1}$ existe.
- b. Puesto que A es simétrica,

$$P^t = (A - T_g^t A T_g)^t = A^t - T_g^t A^t T_g = A - T_g^t A T_g = P.$$

Por lo tanto, P es simétrica.

- c. $T_g = (D - L)^{-1} L^t$, por lo que

$$(D - L)T_g = L^t = D - L - D + L + L^t = (D - L) - (D - L - L^t) = (D - L) - A.$$

Puesto que $(D - L)^{-1}$ existe, tenemos $T_g = I - (D - L)^{-1} A$.

- d. Puesto que $Q = (D - L)^{-1} A$, tenemos $T_g = I - Q$. Observe que Q^{-1} existe. Mediante la definición de P tenemos

$$\begin{aligned} P &= A - T_g^t A T_g = A - [I - (D - L)^{-1} A]^t A [I - (D - L)^{-1} A] \\ &= A - [I - Q]^t A [I - Q] = A - (I - Q^t) A (I - Q) \\ &= A - (A - Q^t A) (I - Q) = A - (A - Q^t A - A Q + Q^t A Q) \\ &= Q^t A + A Q - Q^t A Q = Q^t [A + (Q^t)^{-1} A Q - A Q] \\ &= Q^t [A Q^{-1} + (Q^t)^{-1} A - A] Q. \end{aligned}$$

- e. Puesto que

$$A Q^{-1} = A [A^{-1} (D - L)] = D - L \quad \text{y} \quad (Q^t)^{-1} A = D - L^t,$$

tenemos

$$A Q^{-1} + (Q^t)^{-1} A - A = D - L + D - L^t - (D - L - L^t) = D.$$

Por lo tanto,

$$P = Q^t [A Q^{-1} + (Q^t)^{-1} A - A] Q = Q^t D Q.$$

Por lo que, para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, tenemos $\mathbf{x}' P \mathbf{x} = \mathbf{x}' Q' D Q \mathbf{x} = (Q \mathbf{x})' D (Q \mathbf{x})$.

Puesto que D es una matriz diagonal positiva $(Q \mathbf{x})' D (Q \mathbf{x}) \geq 0$ a menos que $Q \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Sin embargo, Q es no singular, por lo que $Q \mathbf{x} = \mathbf{0}$ si y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Por lo tanto, P es definida positiva

- f. Si λ es un eigenvalor de T_g con el eigenvector $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Siempre que $\mathbf{x}' P \mathbf{x} > 0$,

$$\mathbf{x}' [A - T_g' A T_g] \mathbf{x} > 0$$

y

$$\mathbf{x}' A \mathbf{x} - \mathbf{x}' T_g' A T_g \mathbf{x} > 0.$$

Puesto que $T_g \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$, tenemos $\mathbf{x}' T_g' = \lambda \mathbf{x}'$, por lo que

$$(1 - \lambda^2) \mathbf{x}' A \mathbf{x} = \mathbf{x}' A \mathbf{x} - \lambda^2 \mathbf{x}' A \mathbf{x} > 0.$$

Puesto que A es definida positiva, $1 - \lambda^2 > 0$, y $\lambda^2 < 1$. Por lo tanto, $|\lambda| < 1$.

- g. Para cualquier eigenvalor λ de T_g , tenemos $|\lambda| < 1$. Esto implica $\rho(T_g) < 1$ y T_g es convergente.

Conjunto de ejercicios 7.4

1. Dos iteraciones del método SOR dan los siguientes resultados.

- a. $(-0.0173714, -0.1829986, 0.6680503)'$ b. $(0.9876790, 0.9784935, 0.7899328)'$
 c. $(-0.71885, 2.818822, -0.2809726, -2.235422)'$
 d. $(1.079675, -1.260654, 2.042489, 1.995373, 2.049536)'$

3. Dos iteraciones del método SOR con $\omega = 1.3$ dan los siguientes resultados.

- a. $\mathbf{x}^{(2)} = (-0.1040103, -0.1331814, 0.6774997)'$ b. $\mathbf{x}^{(2)} = (0.957073, 0.9903875, 0.7206569)'$
 c. $\mathbf{x}^{(2)} = (-1.23695, 3.228752, -0.1523888, -2.041266)'$
 d. $\mathbf{x}^{(2)} = (0.7064258, -0.4103876, 2.417063, 2.251955, 1.061507)'$

5. El algoritmo SOR da los siguientes resultados.

- a. $\mathbf{x}^{(11)} = (0.03544356, -0.23718333, 0.65788317)'$ b. $\mathbf{x}^{(7)} = (0.9958341, 0.9579041, 0.7915756)'$
 c. $\mathbf{x}^{(8)} = (-0.7976009, 2.795288, -0.2588293, -2.251768)'$
 d. $\mathbf{x}^{(10)} = (0.7866310, -1.002807, 1.866530, 1.912645, 1.989792)'$

7. Las matrices tridiagonales están en las partes b) y c).

(9b): Para $\omega = 1.012823$ tenemos $\mathbf{x}^{(4)} = (0.9957846, 0.9578935, 0.7915788)'$.

(9c): Para $\omega = 1.153499$ tenemos $\mathbf{x}^{(7)} = (-0.7977651, 2.795343, -0.2588021, -2.251760)'$.

9.

	Jacobi 33 iteraciones	Gauss-Seidel 8 iteraciones	SOR ($\omega = 1.2$) 13 iteraciones
x_1	1.53873501	1.53873270	1.53873549
x_2	0.73142167	0.73141966	0.73142226
x_3	0.10797136	0.10796931	0.10797063
x_4	0.17328530	0.17328340	0.17328480
x_5	0.04055865	0.04055595	0.04055737
x_6	0.08525019	0.08524787	0.08524925
x_7	0.16645040	0.16644711	0.16644868
x_8	0.12198156	0.12197878	0.12198026
x_9	0.10125265	0.10124911	0.10125043
x_{10}	0.09045966	0.09045662	0.09045793
x_{11}	0.07203172	0.07202785	0.07202912
x_{12}	0.07026597	0.07026266	0.07026392
x_{13}	0.06875835	0.06875421	0.06875546
x_{14}	0.06324659	0.06324307	0.06324429
x_{15}	0.05971510	0.05971083	0.05971200
x_{16}	0.05571199	0.05570834	0.05570949
x_{17}	0.05187851	0.05187416	0.05187529
x_{18}	0.04924911	0.04924537	0.04924648
x_{19}	0.04678213	0.04677776	0.04677885
x_{20}	0.04448679	0.04448303	0.04448409
x_{21}	0.04246924	0.04246493	0.04246597
x_{22}	0.04053818	0.04053444	0.04053546
x_{23}	0.03877273	0.03876852	0.03876952
x_{24}	0.03718190	0.03717822	0.03717920
x_{25}	0.03570858	0.03570451	0.03570548
x_{26}	0.03435107	0.03434748	0.03434844
x_{27}	0.03309542	0.03309152	0.03309246
x_{28}	0.03192212	0.03191866	0.03191958
x_{29}	0.03083007	0.03082637	0.03082727
x_{30}	0.02980997	0.02980666	0.02980755
x_{31}	0.02885510	0.02885160	0.02885248
x_{32}	0.02795937	0.02795621	0.02795707
x_{33}	0.02711787	0.02711458	0.02711543
x_{34}	0.02632478	0.02632179	0.02632262
x_{35}	0.02557705	0.02557397	0.02557479
x_{36}	0.02487017	0.02486733	0.02486814
x_{37}	0.02420147	0.02419858	0.02419938
x_{38}	0.02356750	0.02356482	0.02356560
x_{39}	0.02296603	0.02296333	0.02296410
x_{40}	0.02239424	0.02239171	0.02239247
x_{41}	0.02185033	0.02184781	0.02184855
x_{42}	0.02133203	0.02132965	0.02133038
x_{43}	0.02083782	0.02083545	0.02083615
x_{44}	0.02036585	0.02036360	0.02036429
x_{45}	0.01991483	0.01991261	0.01991324
x_{46}	0.01948325	0.01948113	0.01948175
x_{47}	0.01907002	0.01906793	0.01906846
x_{48}	0.01867387	0.01867187	0.01867239
x_{49}	0.01829386	0.01829190	0.01829233
x_{50}	0.71792896	0.01792707	0.01792749
x_{51}	0.01757833	0.01757648	0.01757683

	Jacobi 33 iteraciones	Gauss-Seidel 8 iteraciones	SOR ($\omega = 1.2$) 13 iteraciones
x_{52}	0.01724113	0.01723933	0.01723968
x_{53}	0.01691660	0.01691487	0.01691517
x_{54}	0.01660406	0.01660237	0.01660267
x_{55}	0.01630279	0.01630127	0.01630146
x_{56}	0.01601230	0.01601082	0.01601101
x_{57}	0.01573198	0.01573087	0.01573077
x_{58}	0.01546129	0.01546020	0.01546010
x_{59}	0.01519990	0.01519909	0.01519878
x_{60}	0.01494704	0.01494626	0.01494595
x_{61}	0.01470181	0.01470085	0.01470077
x_{62}	0.01446510	0.01446417	0.01446409
x_{63}	0.01423556	0.01423437	0.01423461
x_{64}	0.01401350	0.01401233	0.01401256
x_{65}	0.01380328	0.01380234	0.01380242
x_{66}	0.01359448	0.01359356	0.01359363
x_{67}	0.01338495	0.01338434	0.01338418
x_{68}	0.01318840	0.01318780	0.01318765
x_{69}	0.01297174	0.01297109	0.01297107
x_{70}	0.01278663	0.01278598	0.01278597
x_{71}	0.01270328	0.01270263	0.01270271
x_{72}	0.01252719	0.01252656	0.01252663
x_{73}	0.01237700	0.01237656	0.01237654
x_{74}	0.01221009	0.01220965	0.01220963
x_{75}	0.01129043	0.01129009	0.01129008
x_{76}	0.01114138	0.01114104	0.01114102
x_{77}	0.01217337	0.01217312	0.01217313
x_{78}	0.01201771	0.01201746	0.01201746
x_{79}	0.01542910	0.01542896	0.01542896
x_{80}	0.01523810	0.01523796	0.01523796

11. a. Tenemos $P_0 = 1$, por lo que la ecuación $P_1 = \frac{1}{2}P_0 + \frac{1}{2}P_2$ da $P_1 - \frac{1}{2}P_2 = \frac{1}{2}$. Ya que $P_i = \frac{1}{2}P_{i-1} + \frac{1}{2}P_{i+1}$, tenemos $-\frac{1}{2}P_{i-1} + P_i + \frac{1}{2}P_{i+1} = 0$, para $i = 1, \dots, n-2$. Finalmente, puesto que $P_n = 0$ y $P_{n-1} = \frac{1}{2}P_{i-2} + \frac{1}{2}P_n$, tenemos $-\frac{1}{2}P_{n-2} + P_{i-1} = 0$. Esto proporciona el sistema lineal.

b. El vector solución es

$$(0.90906840, 0.81814162, 0.72722042, 0.63630504, 0.54539520, 0.45449021, 0.36358911, 0.18179385, 0.27269073, 0.90897290)^t$$

por medio de 62 iteraciones con $w = 1.25$ y una tolerancia de 10^{-5} en la norma l_∞ . Para $n = 10$.

- c. Las ecuaciones son $P_i = \alpha P_{i-1} + (1 - \alpha)P_{i+1}$ para $i = 1, \dots, n-1$ y el sistema lineal se convierte en

$$\begin{bmatrix} 1 & -(1-\alpha) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha & 1 & -(1-\alpha) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha & 1 & -(1-\alpha) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

R 64 Respuestas a ejercicios seleccionados

- d. El vector solución es $(0.49973968, 0.24961354, 0.1245773, 0.62031557, 0.30770075, 0.15140201, 0.73256883, 0.14651284, 0.34186112, 0.48838809)^t$ por medio de 21 iteraciones con $w = 1.25$ y una tolerancia de 10^{-5} en la norma l_∞ para $n = 10$.

13. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los eigenvalores de T_ω . Entonces

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^n \lambda_i &= \det T_\omega = \det \left((D - \omega L)^{-1} [(1 - \omega)D + \omega U] \right) \\ &= \det(D - \omega L)^{-1} \det((1 - \omega)D + \omega U) = \det(D^{-1}) \det((1 - \omega)D) \\ &= \left(\frac{1}{(a_{11}a_{22} \dots a_{nn})} \right) \left((1 - \omega)^n a_{11}a_{22} \dots a_{nn} \right) = (1 - \omega)^n.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\rho(T_\omega) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \geq |\omega - 1|,$$

y $|\omega - 1| < 1$ si y sólo si $0 < \omega < 2$.

Conjunto de ejercicios 7.5

1. Los números de condición $\|\cdot\|_\infty$ son:

a. 50

b. 241.37

c. 600 002

d. 339 866

3.

	$\ \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\ _\infty$	$K_\infty(A)\ \mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}\ _\infty/\ A\ _\infty$
a	8.571429×10^{-4}	1.238095×10^{-2}
b	0.1	3.832060
c	0.04	0.8
d	20	1.152440×10^5

5. La eliminación gaussiana y el refinamiento iterativo da los siguientes resultados.

- a. i) $(-10.0, 1.01)^t$, ii) $(10.0, 1.00)^t$
b. i) $(12.0, 0.499, -1.98)^t$, ii) $(1.00, 0.500, -1.00)^t$
c. i) $(0.185, 0.0103, -0.0200, -1.12)^t$, ii) $(0.177, 0.0127, -0.0207, -1.18)^t$
d. i) $(0.799, -3.12, 0.151, 4.56)^t$, ii) $(0.758, -3.00, 0.159, 4.30)^t$

7. La matriz está mal condicionada ya que $K_\infty = 60002$. Tenemos $\tilde{\mathbf{x}} = (-1.0000, 2.0000)^t$.

9. a. $K_\infty(H^{(4)}) = 28375$

- b. $K_\infty(H^{(5)}) = 943656$

- c. La solución real $\mathbf{x} = (-124, 1560, -3960, 2660)^t$;

La solución aproximada $\tilde{\mathbf{x}} = (-124.2, 1563.8, -3971.8, 2668.8)^t$; $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty = 11.8$; $\frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} = 0.02980$;

$$\begin{aligned}\frac{K_\infty(A)}{1 - K_\infty(A) \left(\frac{\|\delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty} \right)} \left[\frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} + \frac{\|\delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty} \right] &= \frac{28375}{1 - 28375 \left(\frac{6.6 \times 10^{-6}}{2.083} \right)} \left[0 + \frac{6.6 \times 10^{-6}}{2.083} \right] \\ &= 0.09987.\end{aligned}$$

11. Para cualquier vector \mathbf{x} , tenemos

$$\|\mathbf{x}\| = \|A^{-1}A\mathbf{x}\| \leq \|A^{-1}\| \|A\mathbf{x}\|, \quad \text{tal que } \|A\mathbf{x}\| \geq \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|A^{-1}\|}.$$

Sea $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ de tal forma que $\|\mathbf{x}\| = 1$ y $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Entonces

$$\|(A - B)\mathbf{x}\| = \|A\mathbf{x}\| \geq \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|A^{-1}\|}$$

y

$$\frac{\|(A - B)\mathbf{x}\|}{\|A\mathbf{x}\|} \geq \frac{1}{\|A^{-1}\| \|A\|} = \frac{1}{K(A)}.$$

Puesto que $\|\mathbf{x}\| = 1$,

$$\|(A - B)\mathbf{x}\| \leq \|A - B\| \|\mathbf{x}\| = \|A - B\| \quad \text{y} \quad \frac{\|A - B\|}{\|A\|} \geq \frac{1}{K(A)}.$$

Conjunto de ejercicios 7.6

1. a. $(0.18, 0.13)^t$
 b. $(0.19, 0.10)^t$
 c. La eliminación gaussiana da la mejor respuesta ya que $\mathbf{v}^{(2)} = (0, 0)^t$ en el método de gradiente conjugado.
 d. $(0.13, 0.21)^t$. No existe mejora, aunque $\mathbf{v}^{(2)} \neq \mathbf{0}$.
3. a. $(1.00, -1.00, 1.00)^t$
 b. $(0.827, 0.0453, -0.0357)^t$
 c. El pivoteo parcial y el pivoteo parcial escalado también da $(1.00, -1.00, 1.00)^t$.
 d. $(0.776, 0.238, -0.185)^t$;
 El residuo de (3b) es $(-0.0004, -0.0038, 0.0037)^t$, y el residuo de la parte (3d) es $(0.0022, -0.0038, 0.0024)^t$.
 Al parecer, no hay mucha mejora, si es que hay alguna. El error de redondeo es más prevalente debido al incremento en el número de multiplicaciones de la matriz.
5. a. $\mathbf{x}^{(2)} = (0.1535933456, -0.1697932117, 0.5901172091)^t$, $\|\mathbf{r}^{(2)}\|_\infty = 0.221$.
 b. $\mathbf{x}^{(2)} = (0.9993129510, 0.9642734456, 0.7784266575)^t$, $\|\mathbf{r}^{(2)}\|_\infty = 0.144$.
 c. $\mathbf{x}^{(2)} = (-0.7290954114, 2.515782452, -0.6788904058, -2.331943982)^t$, $\|\mathbf{r}^{(2)}\|_\infty = 2.2$.
 d. $\mathbf{x}^{(2)} = (-0.7071108901, -0.0954748881, -0.3441074093, 0.5256091497)^t$, $\|\mathbf{r}^{(2)}\|_\infty = 0.39$.
 e. $\mathbf{x}^{(2)} = (0.5335968381, 0.9367588935, 1.339920949, 1.743083004, 1.743083004)^t$, $\|\mathbf{r}^{(2)}\|_\infty = 1.3$.
 f. $\mathbf{x}^{(2)} = (0.35714286, 1.42857143, 0.35714286, 1.57142857, 0.28571429, 1.57142857)^t$, $\|\mathbf{r}^{(2)}\|_\infty = 0$.
7. a. $\mathbf{x}^{(3)} = (0.06185567013, -0.1958762887, 0.6185567010)^t$, $\|\mathbf{r}^{(3)}\|_\infty = 0.4 \times 10^{-9}$.
 b. $\mathbf{x}^{(3)} = (0.9957894738, 0.9578947369, 0.7915789474)^t$, $\|\mathbf{r}^{(3)}\|_\infty = 0.1 \times 10^{-9}$.
 c. $\mathbf{x}^{(4)} = (-0.7976470579, 2.795294120, -0.2588235305, -2.251764706)^t$, $\|\mathbf{r}^{(4)}\|_\infty = 0.39 \times 10^{-7}$.
 d. $\mathbf{x}^{(4)} = (-0.7534246575, 0.04109589039, -0.2808219179, 0.6917808219)^t$, $\|\mathbf{r}^{(4)}\|_\infty = 0.11 \times 10^{-9}$.
 e. $\mathbf{x}^{(5)} = (0.4516129032, 0.7096774197, 1.677419355, 1.741935483, 1.806451613)^t$, $\|\mathbf{r}^{(5)}\|_\infty = 0.2 \times 10^{-9}$.
 f. $\mathbf{x}^{(2)} = (0.35714286, 1.42857143, 0.35714286, 1.57142857, 0.28571429, 1.57142857)^t$, $\|\mathbf{r}^{(2)}\|_\infty = 0$.

9.

a.	Jacobi 49 iteraciones	Gauss-Seidel 28 iteraciones	SOR ($\omega = 1.3$) 13 iteraciones	Gradiente conjugado 9 iteraciones
x_1	0.93406183	0.93406917	0.93407584	0.93407713
x_2	0.97473885	0.97475285	0.97476180	0.97476363
x_3	1.10688692	1.10690302	1.10691093	1.10691243
x_4	1.42346150	1.42347226	1.42347591	1.42347699
x_5	0.85931331	0.85932730	0.85933633	0.85933790
x_6	0.80688119	0.80690725	0.80691961	0.80692197
x_7	0.85367746	0.85370564	0.85371536	0.85372011
x_8	1.10688692	1.10690579	1.10691075	1.10691250
x_9	0.87672774	0.87674384	0.87675177	0.87675250
x_{10}	0.80424512	0.80427330	0.80428301	0.80428524
x_{11}	0.80688119	0.80691173	0.80691989	0.80692252
x_{12}	0.97473885	0.97475850	0.97476265	0.97476392
x_{13}	0.93003466	0.93004542	0.93004899	0.93004987
x_{14}	0.87672774	0.87674661	0.87675155	0.87675298
x_{15}	0.85931331	0.85933296	0.85933709	0.85933979
x_{16}	0.93406183	0.93407462	0.93407672	0.93407768

b.	Jacobi 60 iteraciones	Gauss-Seidel 35 iteraciones	SOR ($\omega = 1.2$) 23 iteraciones	Gradiente conjugado 11 iteraciones
x_1	0.39668038	0.39668651	0.39668915	0.39669775
x_2	0.07175540	0.07176830	0.07177348	0.07178516
x_3	-0.23080396	-0.23078609	-0.23077981	-0.23076923
x_4	0.24549277	0.24550989	0.24551535	0.24552253
x_5	0.83405412	0.83406516	0.83406823	0.83407148
x_6	0.51497606	0.51498897	0.51499414	0.51500583
x_7	0.12116003	0.12118683	0.12119625	0.12121212
x_8	-0.24044414	-0.24040991	-0.24039898	-0.24038462
x_9	0.37873579	0.37876891	0.37877812	0.37878788
x_{10}	1.09073364	1.09075392	1.09075899	1.09076341
x_{11}	0.54207872	0.54209658	0.54210286	0.54211344
x_{12}	0.13838259	0.13841682	0.13842774	0.13844211
x_{13}	-0.23083868	-0.23079452	-0.23078224	-0.23076923
x_{14}	0.41919067	0.41923122	0.41924136	0.41925019
x_{15}	1.15015953	1.15018477	1.15019025	1.15019425
x_{16}	0.51497606	0.51499318	0.51499864	0.51500583
x_{17}	0.12116003	0.12119315	0.12120236	0.12121212
x_{18}	-0.24044414	-0.24040359	-0.24039345	-0.24038462
x_{19}	0.37873579	0.37877365	0.37878188	0.37878788
x_{20}	1.09073364	1.09075629	1.09076069	1.09076341
x_{21}	0.39668038	0.39669142	0.39669449	0.39669775
x_{22}	0.07175540	0.07177567	0.07178074	0.07178516
x_{23}	-0.23080396	-0.23077872	-0.23077323	-0.23076923
x_{24}	0.24549277	0.24551542	0.24551982	0.24552253
x_{25}	0.83405412	0.83406793	0.83407025	0.83407148

c.	Jacobi 15 iteraciones	Gauss-Seidel 9 iteraciones	SOR ($\omega = 1.1$) 8 iteraciones	Gradiente Conjugado 8 iteraciones
x_1	-3.07611424	-3.07611739	-3.07611796	-3.07611794
x_2	-1.65223176	-1.65223563	-1.65223579	-1.65223582
x_3	-0.53282391	-0.53282528	-0.53282531	-0.53282528
x_4	-0.04471548	-0.04471608	-0.04471609	-0.04471604
x_5	0.17509673	0.17509661	0.17509661	0.17509661
x_6	0.29568226	0.29568223	0.29568223	0.29568218
x_7	0.37309012	0.37309011	0.37309011	0.37309011
x_8	0.42757934	0.42757934	0.42757934	0.42757927
x_9	0.46817927	0.46817927	0.46817927	0.46817927
x_{10}	0.49964748	0.49964748	0.49964748	0.49964748
x_{11}	0.52477026	0.52477026	0.52477026	0.52477027
x_{12}	0.54529835	0.54529835	0.54529835	0.54529836
x_{13}	0.56239007	0.56239007	0.56239007	0.56239009
x_{14}	0.57684345	0.57684345	0.57684345	0.57684347
x_{15}	0.58922662	0.58922662	0.58922662	0.58922664
x_{16}	0.59995522	0.59995522	0.59995522	0.59995523
x_{17}	0.60934045	0.60934045	0.60934045	0.60934045
x_{18}	0.61761997	0.61761997	0.61761997	0.61761998
x_{19}	0.62497846	0.62497846	0.62497846	0.62497847
x_{20}	0.63156161	0.63156161	0.63156161	0.63156161
x_{21}	0.63748588	0.63748588	0.63748588	0.63748588
x_{22}	0.64284553	0.64284553	0.64284553	0.64284553
x_{23}	0.64771764	0.64771764	0.64771764	0.64771764
x_{24}	0.65216585	0.65216585	0.65216585	0.65216585
x_{25}	0.65624320	0.65624320	0.65624320	0.65624320
x_{26}	0.65999423	0.65999423	0.65999423	0.65999422
x_{27}	0.66345660	0.66345660	0.66345660	0.66345660
x_{28}	0.66666242	0.66666242	0.66666242	0.66666242
x_{29}	0.66963919	0.66963919	0.66963919	0.66963919
x_{30}	0.67241061	0.67241061	0.67241061	0.67241060
x_{31}	0.67499722	0.67499722	0.67499722	0.67499721
x_{32}	0.67741692	0.67741692	0.67741691	0.67741691
x_{33}	0.67968535	0.67968535	0.67968535	0.67968535
x_{34}	0.68181628	0.68181628	0.68181628	0.68181628
x_{35}	0.68382184	0.68382184	0.68382184	0.68382184
x_{36}	0.68571278	0.68571278	0.68571278	0.68571278
x_{37}	0.68749864	0.68749864	0.68749864	0.68749864
x_{38}	0.68918652	0.68918652	0.68918652	0.68918652
x_{39}	0.69067718	0.69067718	0.69067718	0.69067717
x_{40}	0.68363346	0.68363346	0.68363346	0.68363349

11. a.

Solución	Residuo
2.55613420	0.00668246
4.09171393	-0.00533953
4.60840390	-0.01739814
3.64309950	-0.03171624
5.13950533	0.01308093
7.19697808	-0.02081095
7.68140405	-0.04593118
5.93227784	0.01692180
5.81798997	0.04414047
5.85447806	0.03319707
5.94202521	-0.00099947
4.42152959	-0.00072826
3.32211695	0.02363822
4.49411604	0.00982052
4.80968966	0.00846967
3.81108707	-0.01312902

Esto converge en 6 iteraciones con tolerancia 5.00×10^{-2} en la norma l_∞ y $\|\mathbf{r}^{(6)}\|_\infty = 0.046$.

b.

Solución	Residuo
2.55613420	0.00668246
4.09171393	-0.00533953
4.60840390	-0.01739814
3.64309950	-0.03171624
5.13950533	0.01308093
7.19697808	-0.02081095
7.68140405	-0.04593118
5.93227784	0.01692180
5.81798996	0.04414047
5.85447805	0.03319706
5.94202521	-0.00099947
4.42152959	-0.00072826
3.32211694	0.02363822
4.49411603	0.00982052
4.80968966	0.00846967
3.81108707	-0.01312902

Esto converge en 6 iteraciones con tolerancia 5.00×10^{-2} en la norma l_∞ y $\|\mathbf{r}^{(6)}\|_\infty = 0.046$.

c. Todas las tolerancias conducen a las mismas especificaciones de convergencia.

13. a. Tenemos $P_0 = 1$, por lo que la ecuación $P_1 = \frac{1}{2}P_0 + \frac{1}{2}P_2$ da $P_1 - \frac{1}{2}P_2 = \frac{1}{2}$. Puesto que $P_i = \frac{1}{2}P_{i-1} + \frac{1}{2}P_{i+1}$, tenemos $-\frac{1}{2}P_{i-1} + P_i + \frac{1}{2}P_{i+1} = 0$, para $i = 1, \dots, n-2$. Finalmente, ya que $P_n = 0$ y $P_{n-1} = \frac{1}{2}P_{n-2} + \frac{1}{2}P_n$, tenemos $-\frac{1}{2}P_{n-2} + P_{n-1} = 0$. Esto provee el sistema lineal que contiene una matriz definida positiva A .

b. Para $n = 10$, el vector solución es $(0.909009091, 0.81818182, 0.72727273, 0, 0.63636364, 0.54545455, 0.45454545, 0.36363636, 0.27272727, 0.18181818, 0.09090909)^t$ al usar 10 iteraciones con $C^{-1} = I$ y una tolerancia de 10^{-5} en la norma l_∞ .

c. La matriz resultante no es definida positiva y el método falla.

d. El método falla.

15. a. Sea $\{\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ es un conjunto de vectores A -ortogonales diferentes de cero para la matriz definida positiva simétrica A . Entonces, $\langle \mathbf{v}^{(i)}, A\mathbf{v}^{(j)} \rangle = 0$, si $i \neq j$. Suponga que

$$c_1\mathbf{v}^{(1)} + c_2\mathbf{v}^{(2)} + \dots + c_n\mathbf{v}^{(n)} = \mathbf{0},$$

donde no todas las c_i son cero. Suponga que k es el entero más pequeño para el que $c_k \neq 0$. Entonces

$$c_k \mathbf{v}^{(k)} + c_{k+1} \mathbf{v}^{(k+1)} + \cdots + c_n \mathbf{v}^{(n)} = \mathbf{0}.$$

Resolvemos para $\mathbf{v}^{(k)}$ para obtener

$$\mathbf{v}^{(k)} = -\frac{c_{k+1}}{c_k} \mathbf{v}^{(k+1)} - \cdots - \frac{c_n}{c_k} \mathbf{v}^{(n)}.$$

Al multiplicar por A obtenemos

$$A\mathbf{v}^{(k)} = -\frac{c_{k+1}}{c_k} A\mathbf{v}^{(k+1)} - \cdots - \frac{c_n}{c_k} A\mathbf{v}^{(n)},$$

por lo que

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}^{(k)})^t A\mathbf{v}^{(k)} &= -\frac{c_{k+1}}{c_k} (\mathbf{v}^{(k)})^t A\mathbf{v}^{(k+1)} - \cdots - \frac{c_n}{c_k} (\mathbf{v}^{(k)})^t A\mathbf{v}^{(n)} \\ &= -\frac{c_{k+1}}{c_k} \langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(k+1)} \rangle - \cdots - \frac{c_n}{c_k} \langle \mathbf{v}^{(k)}, A\mathbf{v}^{(n)} \rangle \\ &= -\frac{c_{k+1}}{c_k} \cdot 0 - \cdots - \frac{c_n}{c_k} \cdot 0. \end{aligned}$$

Puesto que A es definida positiva, $\mathbf{v}^{(k)} = \mathbf{0}$, que es una contradicción. Por lo tanto, todas las c_i deben ser cero y $\{\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ es linealmente independiente.

- b. Sea $\{\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ un conjunto de vectores A -ortogonales diferentes de cero para la matriz definida positiva simétrica A y si \mathbf{z} es ortogonal para $\mathbf{v}^{(i)}$, para cada $i = 1, \dots, n$. Desde la parte a), el conjunto $\{\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ es linealmente independiente, por lo que existe un conjunto de constantes β_1, \dots, β_n con

$$\mathbf{z} = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{v}^{(i)}.$$

Por lo tanto,

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = \mathbf{z}^t \mathbf{z} = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{z}^t \mathbf{v}^{(i)} = \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot 0 = 0,$$

y el teorema 7.30, parte v), implica que $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

17. Si A es una matriz definida positiva cuyos eigenvalores son $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$, entonces $\|A\|_2 = \lambda_n$ y $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\lambda_1}$, por lo que $K_2(A) = \lambda_n / \lambda_1$.

Para la matriz A en el ejemplo 3, tenemos

$$K_2(A) = \frac{\lambda_5}{\lambda_1} = \frac{700.031}{0.0570737} = 12265.2,$$

Y la matriz AH tiene

$$K_2(AH) = \frac{\lambda_5}{\lambda_1} = \frac{1.88052}{0.156370} = 12.0261.$$

Conjunto de ejercicios 8.1

- El polinomio de mínimos cuadrados lineales es $1.70784x + 0.89968$.
- Los polinomios de mínimos cuadrados con sus errores son, respectivamente, $0.6208950 + 1.219621x$, con $E = 2.719 \times 10^{-5}$; $0.5965807 + 1.253293x - 0.01085343x^2$, con $E = 1.801 \times 10^{-5}$; y $0.6290193 + 1.185010x + 0.03533252x^2 - 0.01004723x^3$, con $E = 1.741 \times 10^{-5}$.
- a. El polinomio de mínimos cuadrados lineal es $72.0845x - 194.138$, con error 329.
b. El polinomio de mínimos cuadrados de grado dos es $6.61821x^2 - 1.14352x + 1.23556$, con error 1.44×10^{-3} .
c. El polinomio de mínimos cuadrados de grado tres es $-0.0136742x^3 + 6.84557x^2 - 2.37919x + 3.42904$, con error 5.27×10^{-4} .

- d. La aproximación de mínimos cuadrados de la forma be^{ax} es $24.2588e^{0.372382x}$, con error 418.
 e. La aproximación de mínimos cuadrados de la forma bx^a es $6.23903x^{2.01954}$, con error 0.00703.
 7. a. $k = 0.8996$, $E(k) = 0.295$
 b. $k = 0.9052$, $E(k) = 0.128$. La parte b) se ajusta mejor a los datos experimentales totales.
 9. La línea de mínimos cuadrados para el promedio de punto es 0.101 (puntuación ACT) + 0.487 .
 11. El polinomio de mínimos cuadrados lineales provee $y \approx 0.17952x + 8.2084$.
 13. a. $\ln R = \ln 1.304 + 0.5756 \ln W$ b. $E = 25.25$
 c. $\ln R = \ln 1.051 + 0.7006 \ln W + 0.06695(\ln W)^2$ d. $E = \sum_{i=1}^{37} \left(R_i - bW_i^a e^{c(\ln W_i)^2} \right)^2 = 20.30$

Conjunto de ejercicios 8.2

1. Las aproximaciones de mínimos cuadrados lineales son:
 a. $P_1(x) = 1.833333 + 4x$ b. $P_1(x) = -1.600003 + 3.600003x$ c. $P_1(x) = 1.140981 - 0.2958375x$
 d. $P_1(x) = 0.1945267 + 3.000001x$ e. $P_1(x) = 0.6109245 + 0.09167105x$ f. $P_1(x) = -1.861455 + 1.666667x$
 3. Las aproximaciones de mínimos cuadrados de grado dos son:
 a. $P_2(x) = 2.000002 + 2.999991x + 1.000009x^2$ b. $P_2(x) = 0.4000163 - 2.400054x + 3.000028x^2$
 c. $P_2(x) = 1.723551 - 0.9313682x + 0.1588827x^2$ d. $P_2(x) = 1.167179 + 0.08204442x + 1.458979x^2$
 e. $P_2(x) = 0.4880058 + 0.8291830x - 0.7375119x^2$ f. $P_2(x) = -0.9089523 + 0.6275723x + 0.2597736x^2$
 5. a. 0.3427×10^{-9} b. 0.0457142 c. 0.000358354 d. 0.0106445 e. 0.0000134621 f. 0.0000967795
 7. El proceso Gram-Schmidt produce los siguientes conjuntos de polinomios:
 a. $\phi_0(x) = 1$, $\phi_1(x) = x - 0.5$, $\phi_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$, y $\phi_3(x) = x^3 - 1.5x^2 + 0.6x - 0.05$
 b. $\phi_0(x) = 1$, $\phi_1(x) = x - 1$, $\phi_2(x) = x^2 - 2x + \frac{2}{3}$, y $\phi_3(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{12}{5}x - \frac{2}{5}$
 c. $\phi_0(x) = 1$, $\phi_1(x) = x - 2$, $\phi_2(x) = x^2 - 4x + \frac{11}{3}$, y $\phi_3(x) = x^3 - 6x^2 + 11.4x - 6.8$
 9. Los polinomios de mínimos cuadrados de grado dos son:
 a. $P_2(x) = 3.833333\phi_0(x) + 4\phi_1(x) + 0.9999998\phi_2(x)$
 b. $P_2(x) = 2\phi_0(x) + 3.6\phi_1(x) + 3\phi_2(x) + \phi_3(x)$
 c. $P_2(x) = 0.5493061\phi_0(x) - 0.2958369\phi_1(x) + 0.1588785\phi_2(x) + 0.013771507\phi_3(x)$
 d. $P_2(x) = 3.194528\phi_0(x) + 3\phi_1(x) + 1.458960\phi_2(x) + 0.4787957\phi_3(x)$
 e. $P_2(x) = 0.6567600\phi_0(x) + 0.09167105\phi_1(x) - 0.73751218\phi_2(x) - 0.18769253\phi_3(x)$
 f. $P_2(x) = 1.471878\phi_0(x) + 1.666667\phi_1(x) + 0.2597705\phi_2(x) + 0.059387393\phi_3(x)$
 11. Los polinomios de Laguerre son $L_1(x) = x - 1$, $L_2(x) = x^2 - 4x + 2$ y $L_3(x) = x^3 - 9x^2 + 18x - 6$.
 13. Si $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)\}$ es un conjunto linealmente independiente de polinomios en \prod_n . Para cada $i = 0, 1, \dots, n$, si $\phi_i(x) = \sum_{k=0}^n b_{ki}x^k$. Sea $Q(x) = \sum_{k=0}^n a_kx^k \in \prod_n$. Queremos encontrar constantes c_0, \dots, c_n tales que

$$Q(x) = \sum_{i=0}^n c_i \phi_i(x).$$

Esta ecuación se vuelve

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{i=0}^n c_i \left(\sum_{k=0}^n b_{ki} x^k \right),$$

por lo que

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^n c_i b_{ki} \right) x^k, \quad y \quad \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=0}^n b_{ki} c_i \right) x^k.$$

Pero $\{1, x, \dots, x^n\}$ es linealmente independiente, por lo que, para cada $k = 0, \dots, n$, tenemos

$$\sum_{i=0}^n b_{ki} c_i = a_k,$$

lo cual se expande hacia el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} b_{01} & b_{02} & \cdots & b_{0n} \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Este sistema lineal debe tener una solución única $\{c_0, c_1, \dots, c_n\}$, de lo contrario existe un conjunto no trivial de constantes $\{c'_0, c'_1, \dots, c'_n\}$, para el que

$$\begin{bmatrix} b_{01} & \cdots & b_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c'_0 \\ \vdots \\ c'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$c'_0 \phi_0(x) + c'_1 \phi_1(x) + \cdots + c'_n \phi_n(x) = \sum_{k=0}^n 0x^k = 0,$$

lo cual contradice la independencia lineal del conjunto $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$. Por lo tanto, existe un conjunto único de constantes $\{c_0, \dots, c_n\}$ para el que

$$Q(x) = c_0 \phi_0(x) + c_1 \phi_1(x) + \cdots + c_n \phi_n(x).$$

15. Las ecuaciones normales son

$$\sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^{j+k} dx = \int_a^b x^j f(x) dx, \quad \text{para cada } j = 0, 1, \dots, n.$$

Sea

$$b_{jk} = \int_a^b x^{j+k} dx, \quad \text{para cada } j = 0, \dots, n, \quad \text{y } k = 0, \dots, n,$$

y sea $B = (b_{jk})$. Además, sea

$$\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n)^t \quad \text{y} \quad \mathbf{g} = \left(\int_a^b f(x) dx, \dots, \int_a^b x^n f(x) dx \right)^t.$$

Entonces las ecuaciones normales producen el sistema lineal $B\mathbf{a} = \mathbf{g}$.

Para mostrar que las ecuaciones normales tienen una solución única, es suficiente demostrar que si $f \equiv 0$ entonces $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Si $f \equiv 0$, entonces

$$\sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^{j+k} dx = 0, \quad \text{para } j = 0, \dots, n, \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^n a_j a_k \int_a^b x^{j+k} dx = 0, \quad \text{para } j = 0, \dots, n,$$

Y al sumar a j obtenemos

$$\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n a_j a_k \int_a^b x^{j+k} dx = 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n a_j a_k x^k dx = 0 \quad \text{y} \quad \int_a^b \left(\sum_{j=0}^n a_j x^j \right)^2 dx = 0.$$

Defina $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Entonces $\int_a^b [P(x)]^2 dx = 0$ y $P(x) \equiv 0$. Esto implica que $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$, para $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Por lo tanto, la matriz B es no singular y las ecuaciones normales tienen una única solución.

Conjunto de ejercicios 8.3

1. Los polinomios interpolantes de grado dos son:

- a. $P_2(x) = 2.377443 + 1.590534(x - 0.8660254) + 0.5320418(x - 0.8660254)x$
- b. $P_2(x) = 0.7617600 + 0.8796047(x - 0.8660254)$
- c. $P_2(x) = 1.052926 + 0.4154370(x - 0.8660254) - 0.1384262x(x - 0.8660254)$
- d. $P_2(x) = 0.5625 + 0.649519(x - 0.8660254) + 0.75x(x - 0.8660254)$

3. Las cotas para los errores máximos de los polinomios en el ejercicio 1 son:

- a. 0.1132617 b. 0.04166667 c. 0.08333333 d. 1.000000

5. Los ceros de \tilde{T}_3 producen los siguientes polinomios interpolantes de grado dos.

- a. $P_2(x) = 0.3489153 - 0.1744576(x - 2.866025) + 0.1538462(x - 2.866025)(x - 2)$
- b. $P_2(x) = 0.1547375 - 0.2461152(x - 1.866025) + 0.1957273(x - 1.866025)(x - 1)$
- c. $P_2(x) = 0.6166200 - 0.2370869(x - 0.9330127) - 0.7427732(x - 0.9330127)(x - 0.5)$
- d. $P_2(x) = 3.0177125 + 1.883800(x - 2.866025) + 0.2584625(x - 2.866025)(x - 2)$

7. El polinomio cúbico $\frac{383}{384}x - \frac{5}{32}x^3$ aproxima a $\sin x$ con error por lo menos de 7.19×10^{-4} .

9. a. $n = 1 : \det T_1 = x$

b. $n = 2 : \det T_2 = \det \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 2x \end{pmatrix} = 2x^2 - 1$

c. $n = 3 : \det T_3 = \det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 2x & 1 \\ 0 & 1 & 2x \end{pmatrix} = x \det \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2x \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} = x(4x^2 - 1) - 2x = 4x^3 - 3x$

11. El cambio de variable $x = \cos \theta$ produce

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{[\cos(n \arccos x)]^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi (\cos(n\theta))^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

13. En el texto se mostró (consulte la ecuación 8.13) que los ceros de $T'_n(x)$ se presentan en $x'_k = \cos(k\pi/n)$ para $k = 1, \dots, n-1$. Puesto que $x'_0 = \cos(0) = 1$, $x'_n = \cos(\pi) = -1$, todos los valores del coseno se encuentran en el intervalo $[-1, 1]$ sólo falta demostrar que los ceros son distintos. Esto sigue al hecho de que para cada $k = 1, \dots, n-1$, tenemos x'_k en el intervalo $(0, \pi)$ y en este intervalo $D_x \cos(x) = -\sin x < 0$. Por consiguiente, $T'_n(x)$ es uno a uno en $(0, \pi)$, y estos $n-1$ ceros de $T'_n(x)$ son distintos.

Conjunto de ejercicios 8.4

1. Las aproximaciones de Padé de grado dos para $f(x) = e^{2x}$ son:

$$n = 2, m = 0 : r_{2,0}(x) = 1 + 2x + 2x^2$$

$$n = 1, m = 1 : r_{1,1}(x) = (1+x)/(1-x)$$

$$n = 0, m = 2 : r_{0,2}(x) = (1-2x+2x^2)^{-1}$$

i	x_i	$f(x_i)$	$r_{2,0}(x_i)$	$r_{1,1}(x_i)$	$r_{0,2}(x_i)$
1	0.2	1.4918	1.4800	1.5000	1.4706
2	0.4	2.2255	2.1200	2.3333	1.9231
3	0.6	3.3201	2.9200	4.0000	1.9231
4	0.8	4.9530	3.8800	9.0000	1.4706
5	1.0	7.3891	5.0000	indefinido	1.0000

$$3. r_{2,3}(x) = (1 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{20}x^2)/(1 - \frac{3}{5}x + \frac{3}{20}x^2 - \frac{1}{60}x^3)$$

i	x_i	$f(x_i)$	$r_{2,3}(x_i)$
1	0.2	1.22140276	1.22140277
2	0.4	1.49182470	1.49182561
3	0.6	1.82211880	1.82213210
4	0.8	2.22554093	2.22563652
5	1.0	2.71828183	2.71875000

$$5. r_{3,3}(x) = (x - \frac{7}{60}x^3)/(1 + \frac{1}{20}x^2)$$

i	x_i	$f(x_i)$	Polinomio de MacLaurin de grado 6	$r_{3,3}(x_i)$
0	0.0	0.00000000	0.00000000	0.00000000
1	0.1	0.09983342	0.09966675	0.09938640
2	0.2	0.19866933	0.19733600	0.19709571
3	0.3	0.29552021	0.29102025	0.29246305
4	0.4	0.38941834	0.37875200	0.38483660
5	0.5	0.47942554	0.45859375	0.47357724

7. Las aproximaciones de Padé de grado cinco son:

$$a. r_{0,5}(x) = (1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5)^{-1}$$

$$b. r_{1,4}(x) = (1 - \frac{1}{5}x)/(1 + \frac{4}{5}x + \frac{3}{10}x^2 + \frac{1}{15}x^3 + \frac{1}{120}x^4)$$

$$c. r_{3,2}(x) = (1 - \frac{3}{5}x + \frac{3}{20}x^2 - \frac{1}{60}x^3)/(1 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{20}x^2)$$

$$d. r_{4,1}(x) = (1 - \frac{4}{5}x + \frac{3}{10}x^2 - \frac{1}{15}x^3 + \frac{1}{120}x^4)/(1 + \frac{1}{5}x)$$

i	x_i	$f(x_i)$	$r_{0,5}(x_i)$	$r_{1,4}(x_i)$	$r_{2,3}(x_i)$	$r_{4,1}(x_i)$
1	0.2	0.81873075	0.81873081	0.81873074	0.81873075	0.81873077
2	0.4	0.67032005	0.67032276	0.67031942	0.67031963	0.67032099
3	0.6	0.54881164	0.54883296	0.54880635	0.54880763	0.54882143
4	0.8	0.44932896	0.44941181	0.44930678	0.44930966	0.44937931
5	1.0	0.36787944	0.36809816	0.36781609	0.36781609	0.36805556

$$9. r_{T_{2,0}}(x) = (1.266066T_0(x) - 1.130318T_1(x) + 0.2714953T_2(x))/T_0(x)$$

$$r_{T_{1,1}}(x) = (0.9945705T_0(x) - 0.4569046T_1(x))/(T_0(x) + 0.48038745T_1(x))$$

$$r_{T_{0,2}}(x) = 0.7940220T_0(x)/(T_0(x) + 0.8778575T_1(x) + 0.1774266T_2(x))$$

i	x_i	$f(x_i)$	$r_{T_{2,0}}(x_i)$	$r_{T_{1,1}}(x_i)$	$r_{T_{0,2}}(x_i)$
1	0.25	0.77880078	0.74592811	0.78595377	0.74610974
2	0.50	0.60653066	0.56515935	0.61774075	0.58807059
3	1.00	0.36787944	0.40724330	0.36319269	0.38633199

$$11. r_{T_{2,2}}(x) = \frac{0.91747T_1(x)}{T_0(x) + 0.088914T_2(x)}$$

i	x_i	$f(x_i)$	$r_{T_{2,2}}(x_i)$
0	0.00	0.00000000	0.00000000
1	0.10	0.09983342	0.09093843
2	0.20	0.19866933	0.18028797
3	0.30	0.29552021	0.26808992
4	0.40	0.38941834	0.35438412

13. a. $e^x = e^{M \ln \sqrt{10} + s} = e^{M \ln \sqrt{10}} e^s = e^{\ln 10 \frac{M}{2}} e^s = 10^{\frac{M}{2}} e^s$
 b. $e^s \approx (1 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{10}s^2 + \frac{1}{120}s^3) / (1 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{10}s^2 - \frac{1}{120}s^3)$, con $|\text{error}| \leq 3.75 \times 10^{-7}$.
 c. Set $M = \text{redondeo}(0.8685889638x)$, $s = x - M/(0.8685889638)$, y
 $\hat{f} = (1 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{10}s^2 + \frac{1}{120}s^3) / (1 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{10}s^2 - \frac{1}{120}s^3)$. Entonces $f = (3.16227766)^M \hat{f}$.

Conjunto de ejercicios 8.5

1. $S_2(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos x + \cos 2x$
 3. $S_3(x) = 3.676078 - 3.676078 \cos x + 1.470431 \cos 2x - 0.7352156 \cos 3x + 3.676078 \sin x - 2.940862 \sin 2x$
 5. $S_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1-(-1)^k}{k} \sin kx$
 7. Los polinomios de mínimos cuadrados trigonométricos son:
 a. $S_2(x) = \cos 2x$
 b. $S_2(x) = 0$
 c. $S_3(x) = 1.566453 + 0.5886815 \cos x - 0.2700642 \cos 2x + 0.2175679 \cos 3x + 0.8341640 \sin x - 0.3097866 \sin 2x$
 d. $S_3(x) = -2.046326 + 3.883872 \cos x - 2.320482 \cos 2x + 0.7310818 \cos 3x$
 9. El polinomio de mínimos cuadrados trigonométricos es $S_3(x) = -0.4968929 + 0.2391965 \cos x + 1.515393 \cos 2x + 0.2391965 \cos 3x - 1.150649 \sin x$, con error $E(S_3) = 7.271197$.
 11. Los polinomios de mínimos cuadrados trigonométricos y sus errores son
 a. $S_3(x) = -0.08676065 - 1.446416 \cos \pi(x-3) - 1.617554 \cos 2\pi(x-3) + 3.980729 \cos 3\pi(x-3) - 2.154320 \sin \pi(x-3) + 3.907451 \sin 2\pi(x-3)$ con $E(S_3) = 210.90453$
 b. $S_3(x) = -0.0867607 - 1.446416 \cos \pi(x-3) - 1.617554 \cos 2\pi(x-3) + 3.980729 \cos 3\pi(x-3) - 2.354088 \cos 4\pi(x-3) - 2.154320 \sin \pi(x-3) + 3.907451 \sin 2\pi(x-3) - 1.166181 \sin 3\pi(x-3)$ con $E(S_4) = 169.4943$
 13. a. $T_4(x) = 15543.19 + 141.1964 \cos(\frac{2}{15}\pi t - \pi) - 203.4015 \cos(\frac{4}{15}\pi t - 4\pi) + 274.6943 \cos(\frac{2}{5}\pi t - 6\pi) - 210.75 \cos(\frac{8}{15}\pi t - 4\pi) + 716.5316 \sin(\frac{2}{15}\pi t - \pi) - 286.7289 \sin(\frac{4}{15}\pi t - 2\pi) + 453.1107 \sin(\frac{2}{5}\pi t - 3\pi)$
 b. El 8 de abril de 2013 corresponde a $t = 1.27$ con $P_4(1.27) = 14374$, y el 8 de abril de 2014 corresponde a $t = 13.27$ con $P_4(13.27) = 16906$
 c. $|14374 - 14613| = 239$ y $|16906 - 16256| = 650$. Al parecer, no aproxima correctamente un error relativo de aproximadamente 3 por ciento.
 d. El 17 de junio de 2014 corresponde a $t = 15.57$ con $P_4(15.57) = 14298$. Puesto que el cierre real era 16 808, la aproximación estaba muy lejos.
 15. Si $f(-x) = -f(x)$. La integral $\int_{-a}^0 f(x) dx$ bajo el cambio de variable $t = -x$ se transforma a

$$-\int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt = -\int_0^a f(t) dt = -\int_0^a f(x) dx.$$

Por lo tanto,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0.$$

17. Las siguientes integraciones establecen la ortogonalidad.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} [\phi_0(x)]^2 dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} [\phi_k(x)]^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos kx)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2kx \right] dx = \pi + \left[\frac{1}{4k} \sin 2kx \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} [\phi_{n+k}(x)]^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} (\sin kx)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2kx \right] dx = \pi - \left[\frac{1}{4k} \sin 2kx \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \phi_k(x) \phi_0(x) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = \left[\frac{1}{2k} \sin kx \right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{n+k}(x) \phi_0(x) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = \left[-\frac{1}{2k} \cos kx \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{-1}{2k} [\cos k\pi - \cos(-k\pi)] = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \phi_k(x) \phi_j(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos jx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k+j)x + \cos(k-j)x] dx = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{n+k}(x) \phi_{n+j}(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin jx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k-j)x - \cos(k+j)x] dx = 0,\end{aligned}$$

y

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_k(x) \phi_{n+j}(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin jx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(k+j)x - \sin(k-j)x] dx = 0.$$

19. Los pasos son casi idénticos a aquellos para determinar las constantes b_k excepto por el término constante adicional a_0 en la serie de coseno. En este caso,

$$0 = \frac{\partial E}{\partial a_0} = 2 \sum_{j=0}^{2m-1} [y_j - S_n(x_j)](-1/2) = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j - \sum_{j=0}^{2m-1} \left(\frac{a_0}{2} + a_n \cos nx_j + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx_j + b_k \sin kx_j) \right),$$

La ortogonalidad implica que sólo el término constante permanece en la segunda suma y tenemos

$$0 = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j - \frac{a_0}{2} (2m), \quad \text{lo cual implica que} \quad a_0 = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j.$$

Conjunto de ejercicios 8.6

1. Los polinomios interpolantes trigonométricos son:

- a. $S_2(x) = -12.33701 + 4.934802 \cos x - 2.467401 \cos 2x + 4.934802 \sin x$
- b. $S_2(x) = -6.168503 + 9.869604 \cos x - 3.701102 \cos 2x + 4.934802 \sin x$
- c. $S_2(x) = 1.570796 - 1.570796 \cos x$
- d. $S_2(x) = -0.5 - 0.5 \cos 2x + \sin x$

3. El algoritmo de la transformada rápida de Fourier provee los siguientes polinomios trigonométricos.

- a. $S_4(x) = -11.10331 + 2.467401 \cos x - 2.467401 \cos 2x + 2.467401 \cos 3x - 1.233701 \cos 4x + 5.956833 \sin x - 2.467401 \sin 2x + 1.022030 \sin 3x$
- b. $S_4(x) = 1.570796 - 1.340759 \cos x - 0.2300378 \cos 3x$
- c. $S_4(x) = -0.1264264 + 0.2602724 \cos x - 0.3011140 \cos 2x + 1.121372 \cos 3x + 0.04589648 \cos 4x - 0.1022190 \sin x + 0.2754062 \sin 2x - 2.052955 \sin 3x$
- d. $S_4(x) = -0.1526819 + 0.04754278 \cos x + 0.6862114 \cos 2x - 1.216913 \cos 3x + 1.176143 \cos 4x - 0.8179387 \sin x + 0.1802450 \sin 2x + 0.2753402 \sin 3x$

5.

	Aproximación	Real
a.	-69.76415	-62.01255
b.	9.869602	9.869604
c.	-0.7943605	-0.2739383
d.	-0.9593287	-0.9557781

7. Los términos b_j son todos cero. Los términos a_j son los siguientes:

$a_0 = -4.0008033$	$a_1 = 3.7906715$	$a_2 = -2.2230259$	$a_3 = 0.6258042$
$a_4 = -0.3030271$	$a_5 = 0.1813613$	$a_6 = -0.1216231$	$a_7 = 0.0876136$
$a_8 = -0.0663172$	$a_9 = 0.0520612$	$a_{10} = -0.0420333$	$a_{11} = 0.0347040$
$a_{12} = -0.0291807$	$a_{13} = 0.0249129$	$a_{14} = -0.0215458$	$a_{15} = 0.0188421$
$a_{16} = -0.0166380$	$a_{17} = 0.0148174$	$a_{18} = -0.0132962$	$a_{19} = 0.0120123$
$a_{20} = -0.0109189$	$a_{21} = 0.0099801$	$a_{22} = -0.0091683$	$a_{23} = 0.0084617$
$a_{24} = -0.0078430$	$a_{25} = 0.0072984$	$a_{26} = -0.0068167$	$a_{27} = 0.0063887$
$a_{28} = -0.0060069$	$a_{29} = 0.0056650$	$a_{30} = -0.0053578$	$a_{31} = 0.0050810$
$a_{32} = -0.0048308$	$a_{33} = 0.0046040$	$a_{34} = -0.0043981$	$a_{35} = 0.0042107$
$a_{36} = -0.0040398$	$a_{37} = 0.0038837$	$a_{38} = -0.0037409$	$a_{39} = 0.0036102$
$a_{40} = -0.0034903$	$a_{41} = 0.0033803$	$a_{42} = -0.0032793$	$a_{43} = 0.0031866$
$a_{44} = -0.0031015$	$a_{45} = 0.0030233$	$a_{46} = -0.0029516$	$a_{47} = 0.0028858$
$a_{48} = -0.0028256$	$a_{49} = 0.0027705$	$a_{50} = -0.0027203$	$a_{51} = 0.0026747$
$a_{52} = -0.0026333$	$a_{53} = 0.0025960$	$a_{54} = -0.0025626$	$a_{55} = 0.0025328$
$a_{56} = -0.0025066$	$a_{57} = 0.0024837$	$a_{58} = -0.0024642$	$a_{59} = 0.0024478$
$a_{60} = -0.0024345$	$a_{61} = 0.0024242$	$a_{62} = -0.0024169$	$a_{63} = 0.0024125$

9. a. El polinomio interpolante trigonométrico es

$$S(x) = \frac{31086.25}{2} - \frac{240.25}{2} \cos(\pi x - 8\pi) + 141.0809 \cos\left(\frac{\pi}{8}x - \pi\right) - 203.4989 \cos\left(\frac{\pi}{4}x - 2\pi\right) + 274.6464 \cos\left(\frac{3\pi}{8}x - 3\pi\right) - 210.75 \cos\left(\frac{\pi}{2}x - 4\pi\right) + 104.2019 \cos\left(\frac{5\pi}{8}x - 5\pi\right) - 155.7601 \cos\left(\frac{3\pi}{4}x - 6\pi\right) + 243.0707 \cos\left(\frac{7\pi}{8}x - 7\pi\right) + 716.5795 \sin\left(\frac{\pi}{8}x - \pi\right) - 286.6405 \sin\left(\frac{\pi}{4}x - 2\pi\right) + 453.2262 \sin\left(\frac{3\pi}{8}x - 3\pi\right) + 22.5 \sin\left(\frac{\pi}{2}x - 4\pi\right) + 138.9449 \sin\left(\frac{5\pi}{8}x - 5\pi\right) - 223.8905 \sin\left(\frac{3\pi}{4}x - 6\pi\right) - 194.2018 \sin\left(\frac{7\pi}{8}x - 7\pi\right)$$

b. El 8 de abril de 2013 corresponde a $x = 1.27$ con $S(1.27) = 14721$, y el 8 de abril de 2014 corresponde a $x = 13.27$ con $S(13.27) = 16323$

c. $|14613 - 14721| = 108$ con error relativo 0.00734 y $|16256 - 16323| = 67$ con error relativo 0.00412. Las aproximaciones no son tan malas.

d. El 17 de junio de 2014 corresponde a $x = 15.57$ con $S(15.57) = 15073$. El cierre real era 16808 por lo que la aproximación no era tan buena.

11. A partir de la ecuación (8.28),

$$c_k = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{\frac{\pi i j k}{m}} = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j (\zeta)^{jk} = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j (\zeta^k)^j.$$

Por lo tanto,

$$c_k = \left(1, \zeta^k, \zeta^{2k}, \dots, \zeta^{(2m-1)k}\right)^t \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{2m-1} \end{bmatrix},$$

y el resultado sigue.

Conjunto de ejercicios 9.1

1. a. Los eigenvalores y los eigenvectores son $\lambda = 2$, $\mathbf{v}_1^{(1)} = (1, 0, 0)^t$; $\lambda = 1$, $\mathbf{v}_2^{(2)} = (0, 2, 1)^t$; y $\lambda_3 = -1$, $\mathbf{v}^{(3)} = (-1, 1, 1)^t$. El conjunto es linealmente independiente.

- b. Los eigenvalores y los eigenvectores son $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{v}^{(1)} = (0, 1, 0)^t$; $\lambda_2 = 3$, $\mathbf{v}^{(2)} = (1, 0, 1)^t$; y $\lambda_3 = 1$, $\mathbf{v}^{(3)} = (1, 0, -1)^t$. El conjunto es linealmente independiente.
- c. Los eigenvalores y los eigenvectores asociados son $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{v}^{(1)} = (0, -1, 1)^t$; $\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$, $\mathbf{v}^{(2)} = (\sqrt{2}, 1, 1)^t$; y $\lambda_3 = 1 - \sqrt{2}$, $\mathbf{v}^{(3)} = (-\sqrt{2}, 1, 1)^t$; el conjunto es linealmente independiente.
- d. Los eigenvalores y los eigenvectores asociados son $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}^{(2)} = (1, 0, 0)^t$; $\lambda_3 = 3$ con $\mathbf{v}^{(3)} = (0, 1, 1)^t$. Sólo existen 2 eigenvectores linealmente independientes.
3. a. Los tres eigenvalores están dentro de $\{\lambda \mid |\lambda| \leq 2\} \cup \{\lambda \mid |\lambda - 2| \leq 2\}$ por lo que $\rho(A) \leq 4$.
 b. Los tres eigenvalores están dentro de $\{\lambda \mid |\lambda - 4| \leq 2\}$ por lo que $\rho(A) \leq 6$.
 c. Los tres eigenvalores reales satisfacen $0 \leq \lambda \leq 6$ por lo que $\rho(A) \leq 6$.
 d. Los tres eigenvalores reales satisfacen $1.25 \leq \lambda \leq 8.25$ por lo que $1.25 \leq \rho(A) \leq 8.25$.
5. Los vectores son linealmente dependientes ya que $-2\mathbf{v}_1 + 7\mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$.
7. a. i) $\mathbf{0} = c_1(1, 1)^t + c_2(-2, 1)^t$ implica que $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Pero $\det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 \neq 0$, de modo que por el teorema 6.7, tenemos $c_1 = c_2 = 0$.
 ii) $\{(1, 1)^t, (-3/2, 3/2)^t\}$.
 iii) $\{(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)^t, (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)^t\}$.
 b. i) El determinante de esta matriz es $-2 \neq 0$, por lo que $\{(1, 1, 0)^t, (1, 0, 1)^t, (0, 1, 1)^t\}$ que es un conjunto linealmente independiente.
 ii) $\{(1, 1, 0)^t, (1/2, -1/2, 1)^t, (-2/3, 2/3, 2/3)^t\}$
 iii) $\{(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)^t, (\sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3)^t, (-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)^t\}$
 c. i) Si $\mathbf{0} = c_1(1, 1, 1, 1)^t + c_2(0, 2, 2, 2)^t + c_3(1, 0, 0, 1)^t$, entonces tenemos

$$(E_1) : c_1 + c_3 = 0, \quad (E_2) : c_1 + 2c_2 = 0, \quad (E_3) : c_1 + 2c_2 = 0, \quad (E_4) : c_1 + 2c_2 + c_3 = 0.$$

Restar (E_3) de (E_4) implica que $c_3 = 0$. Por lo tanto, a partir de (E_1) , tenemos $c_1 = 0$, y a partir de (E_2) , tenemos $c_2 = 0$. Los vectores son linealmente independientes.

- ii) $\{(1, 1, 1, 1)^t, (-3/2, 1/2, 1/2, 1/2)^t, (0, -1/3, -1/3, 2/3)^t\}$
 iii) $\{(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)^t, (-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/6, \sqrt{3}/6, \sqrt{3}/6)^t, (0, -\sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3)^t\}$
- d. i) Si A es la matriz cuyas columnas son los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$, entonces $\det A = 60 \neq 0$, por lo que los vectores son linealmente independientes.
 ii) $\{(2, 2, 3, 2, 3)^t, (2, -1, 0, -1, 0)^t, (0, 0, 1, 0, -1)^t, (1, 2, -1, 0, -1)^t, (-2/7, 3/7, 2/7, -1, 2/7)^t\}$
 iii) $\{(\sqrt{30}/15, \sqrt{30}/15, \sqrt{30}/10, \sqrt{30}/15, \sqrt{30}/10)^t, (\sqrt{6}/3, -\sqrt{6}/6, 0, -\sqrt{6}/6, 0)^t, (0, 0, \sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2)^t, (\sqrt{7}/7, 2\sqrt{7}/7, -\sqrt{7}/7, 0, -\sqrt{7}/7)^t, (-\sqrt{70}/35, 3\sqrt{70}/70, \sqrt{70}/35, -\sqrt{70}/10, \sqrt{70}/35)^t\}$
9. a. Sea μ un eigenvalor de A . Puesto que A es simétrica, μ es real y el teorema 9.13 $0 \leq \mu \leq 4$. Los eigenvalores de $A - 4I$ son de la forma $\mu - 4$. Por tanto,

$$\rho(A - 4I) = \max|\mu - 4| = \max(4 - \mu) = 4 - \min\mu = 4 - \lambda = |\lambda - 4|.$$

- b. Los eigenvalores de $A - 4I$ son $-3.618034, -2.618034, -1.381966$, y -0.381966 , por lo que $\rho(A - 4I) = 3.618034$ y $\lambda = 0.381966$. Un eigenvalor es $(0.618034, 1, 1, 0.618034)^t$.
- c. Como en la parte a), $0 \leq \mu \leq 6$, por lo que $|\lambda - 6| = \rho(B - 6I)$.
- d. Los eigenvalores de $B - 6I$ son $-5.2360673, -4, -2$, y -0.76393202 , por lo que $\rho(B - 6I) = 5.2360673$ y $\lambda = 0.7639327$. Un eigenvector es $(0.61803395, 1, 1, 0.61803395)^t$.
11. Si $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, entonces para cualquier j , con $1 \leq j \leq k$, tenemos $c_1\mathbf{v}_j^t\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_j^t\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. Pero la ortogonalidad da $c_i\mathbf{v}_j^t\mathbf{v}_i = 0$, para $i \neq j$, por lo que $c_j\mathbf{v}_j^t\mathbf{v}_j = 0$, y puesto que $\mathbf{v}_j^t\mathbf{v}_j \neq 0$, tenemos $c_j = 0$.
13. Puesto que $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$ es linealmente independiente en \mathbb{R}^n , existen números c_1, \dots, c_n con

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n.$$

Por lo tanto, para cualquier k , con $1 \leq k \leq n$, $\mathbf{v}_k^t\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_k^t\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_k^t\mathbf{v}_n = c_k\mathbf{v}_k^t\mathbf{v}_k = c_k$.

15. Una matriz estricta y diagonalmente dominante tiene todos sus elementos diagonales más grandes que la suma de las magnitudes de todos los otros elementos y sus filas. Por consiguiente, la magnitud del centro de cada círculo de Geršgorin excede la magnitud del radio del círculo. Por lo tanto, ningún círculo incluye el origen. Así, 0 no puede ser el eigenvalor de la matriz y la matriz no singular.

Conjunto de ejercicios 9.2

1. En cada instancia, compararemos el polinomio característico de A , denotado $p(A)$ con el de B , denotado $p(B)$. Estos deben concordar si las matrices son similares.

a. $p(A) = x^2 - 4x + 3 \neq x^2 - 2x - 3 = p(B)$. b. $p(A) = x^2 - 5x + 6 \neq x^2 - 6x + 6 = p(B)$.

c. $p(A) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \neq x^3 - 4x^2 + 5x - 6 = p(B)$.

d. $p(A) = x^3 - 5x^2 + 12x - 11 \neq x^3 - 4x^2 + 4x + 11 = p(B)$.

3. En cada caso, tenemos $A^3 = (PDP^{(-1)})(PDP^{(-1)})(PDP^{(-1)}) = PD^3P^{(-1)}$.

a. $\begin{bmatrix} \frac{26}{5} & -\frac{14}{5} \\ -\frac{21}{5} & \frac{19}{5} \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} \frac{9}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{7}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{6}{5} \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

5. Todas son diagonalizables con P y D , de acuerdo con lo siguiente.

a. $P = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b. $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

c. $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d. $P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. Todas las matrices, excepto d), tienen 3 eigenvectores linealmente independientes. La matriz en la parte d) sólo tiene 2 eigenvectores linealmente independientes. Una selección para P en cada caso es

a. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

9. Sólo las matrices en las partes a) y c) son definidas positivas.

a. $Q = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

c. $Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

11. En cada caso, la matriz falla en tener 3 eigenvectores linealmente independientes.

a. $\det(A) = 12$, por lo que A es no singular

b. $\det(A) = -1$, por lo que A es no singular

c. $\det(A) = 12$, por lo que A es no singular

d. $\det(A) = 1$, por lo que A es no singular

13. La matriz A tiene un eigenvalor de multiplicidad 1 en $\lambda_1 = 3$ con eigenvector $\mathbf{s}_1 = (0, 1, 1)^t$, y un eigenvalor de multiplicidad 2 en $\lambda_2 = 2$ con eigenvectores linealmente independientes $\mathbf{s}_2 = (1, 1, 0)^t$ y $\mathbf{s}_3 = (-2, 0, 1)^t$. Sea $S_1 = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3\}$, $S_2 = \{\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_3\}$, y $S_3 = \{\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3, \mathbf{s}_1\}$. Entonces $A = S_1^{-1}D_1S_1 = S_2^{-1}D_2S_2 = S_3^{-1}D_3S_3$, por lo que A es similar a D_1 , D_2 y D_3 .

15. a. Los eigenvalores y eigenvectores asociados son

$\lambda_1 = 5.307857563$, $(0.59020967, 0.51643129, 0.62044441)^t$;

$\lambda_2 = -0.4213112993$, $(0.77264234, -0.13876278, -0.61949069)^t$;

$\lambda_3 = -0.1365462647$, $(0.23382978, -0.84501102, 0.48091581)^t$.

b. A es definida no positiva porque $\lambda_2 < 0$ y $\lambda_3 < 0$.

17. Puesto que A es similar a B y B es similar a C , existen matrices invertibles S y T con $A = S^{-1}BS$ y $B = T^{-1}CT$.

Por lo tanto, A es similar a C porque

$$A = S^{-1}BS = S^{-1}(T^{-1}CT)S = (S^{-1}T^{-1})C(TS) = (TS)^{-1}C(TS).$$

19. a. Sean las columnas de Q denotadas por los vectores $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$, los cuales también son las filas de Q^t . Puesto que Q es ortogonal, $(\mathbf{q}_i)^t \cdot \mathbf{q}_j$ es cero cuando $i \neq j$ y 1 cuando $i = j$. Pero la entrada ij de Q^tQ es $(\mathbf{q}_i)^t \cdot \mathbf{q}_j$ para cada i y j , por lo que $Q^tQ = I$.

Por lo tanto, $Q^t = Q^{-1}$.

b. Después de la parte i), tenemos $Q^tQ = I$, por lo que

$$(Q\mathbf{x})^t(Q\mathbf{y}) = (\mathbf{x}^tQ^t)(Q\mathbf{y}) = \mathbf{x}^t(Q^tQ)\mathbf{y} = \mathbf{x}^t(I)\mathbf{y} = \mathbf{x}^t\mathbf{y}.$$

c. Esto se sigue de la parte ii) con \mathbf{x} reemplazando a \mathbf{y} ya que entonces

$$\|Q\mathbf{x}\|_2^2 = (Q\mathbf{x})^t(Q\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_2^2.$$

Conjunto de ejercicios 9.3

1. Los eigenvalores aproximados y los eigenvectores aproximados son:
 - a. $\mu^{(3)} = 3.666667$, $\mathbf{x}^{(3)} = (0.9772727, 0.9318182, 1)^t$
 - b. $\mu^{(3)} = 2.000000$, $\mathbf{x}^{(3)} = (1, 1, 0.5)^t$
 - c. $\mu^{(3)} = 5.000000$, $\mathbf{x}^{(3)} = (-0.2578947, 1, -0.2842105)^t$
 - d. $\mu^{(3)} = 5.038462$, $\mathbf{x}^{(3)} = (1, 0.2213741, 0.3893130, 0.4045802)^t$
3. Los eigenvalores aproximados y los eigenvectores aproximados son:
 - a. $\mu^{(3)} = 1.027730$, $\mathbf{x}^{(3)} = (-0.1889082, 1, -0.7833622)^t$
 - b. $\mu^{(3)} = -0.4166667$, $\mathbf{x}^{(3)} = (1, -0.75, -0.6666667)^t$
 - c. $\mu^{(3)} = 17.64493$, $\mathbf{x}^{(3)} = (-0.3805794, -0.09079132, 1)^t$
 - d. $\mu^{(3)} = 1.378684$, $\mathbf{x}^{(3)} = (-0.3690277, -0.2522880, 0.2077438, 1)^t$
5. Los eigenvalores aproximados y los eigenvectores aproximados son:
 - a. $\mu^{(3)} = 3.959538$, $\mathbf{x}^{(3)} = (0.5816124, 0.5545606, 0.5951383)^t$
 - b. $\mu^{(3)} = 2.0000000$, $\mathbf{x}^{(3)} = (-0.6666667, -0.6666667, -0.3333333)^t$
 - c. $\mu^{(3)} = 7.189567$, $\mathbf{x}^{(3)} = (0.5995308, 0.7367472, 0.3126762)^t$
 - d. $\mu^{(3)} = 6.037037$, $\mathbf{x}^{(3)} = (0.5073714, 0.4878571, -0.6634857, -0.2536857)^t$
7. Los eigenvalores aproximados y los eigenvectores aproximados son:
 - a. $\lambda_1 \approx \mu^{(9)} = 3.999908$, $\mathbf{x}^{(9)} = (0.9999943, 0.9999828, 1)^t$
 - b. $\lambda_1 \approx \mu^{(13)} = 2.414214$, $\mathbf{x}^{(13)} = (1, 0.7071429, 0.7070707)^t$
 - c. $\lambda_1 \approx \mu^{(9)} = 5.124749$, $\mathbf{x}^{(9)} = (-0.2424476, 1, -0.3199733)^t$
 - d. $\lambda_1 \approx \mu^{(24)} = 5.235861$, $\mathbf{x}^{(24)} = (1, 0.6178361, 0.1181667, 0.4999220)^t$
9. a. $\mu^{(9)} = 1.00001523$ con $\mathbf{x}^{(9)} = (-0.19999391, 1, -0.79999087)^t$
 b. $\mu^{(12)} = -0.41421356$ con $\mathbf{x}^{(12)} = (1, -0.70709184, -0.707121720)^t$
 c. El método no converge en 25 iteraciones. Sin embargo, la convergencia se presenta con $\mu^{(42)} = 1.63663642$ con $\mathbf{x}^{(42)} = (-0.57068151, 0.3633658, 1)^t$
 d. $\mu^{(9)} = 1.38195929$ con $\mathbf{x}^{(9)} = (-0.38194003, -0.23610068, 0.23601909, 1)^t$
11. Los eigenvalores aproximados y los eigenvectores aproximados son:
 - a. $\mu^{(8)} = 4.0000000$, $\mathbf{x}^{(8)} = (0.5773547, 0.5773282, 0.5773679)^t$
 - b. $\mu^{(13)} = 2.414214$, $\mathbf{x}^{(13)} = (-0.7071068, -0.5000255, -0.4999745)^t$
 - c. $\mu^{(16)} = 7.223663$, $\mathbf{x}^{(16)} = (0.6247845, 0.7204271, 0.3010466)^t$
 - d. $\mu^{(20)} = 7.086130$, $\mathbf{x}^{(20)} = (0.3325999, 0.2671862, -0.7590108, -0.4918246)^t$
13. Los eigenvalores aproximados y los eigenvectores aproximados son:
 - a. $\lambda_2 \approx \mu^{(1)} = 1.000000$, $\mathbf{x}^{(1)} = (-2.999908, 2.999908, 0)^t$
 - b. $\lambda_2 \approx \mu^{(1)} = 1.000000$, $\mathbf{x}^{(1)} = (0, -1.414214, 1.414214)^t$
 - c. $\lambda_2 \approx \mu^{(6)} = 1.636734$, $\mathbf{x}^{(6)} = (1.783218, -1.135350, -3.124733)^t$
 - d. $\lambda_2 \approx \mu^{(10)} = 3.618177$, $\mathbf{x}^{(10)} = (0.7236390, -1.170573, 1.170675, -0.2763374)^t$
15. Los eigenvalores aproximados y los eigenvectores aproximados son:
 - a. $\mu^{(8)} = 4.000001$, $\mathbf{x}^{(8)} = (0.9999773, 0.99993134, 1)^t$
 - b. El método falla debido a la división por cero.
 - c. $\mu^{(7)} = 5.124890$, $\mathbf{x}^{(7)} = (-0.2425938, 1, -0.3196351)^t$
 - d. $\mu^{(15)} = 5.236112$, $\mathbf{x}^{(15)} = (1, 0.6125369, 0.1217216, 0.4978318)^t$
17. a. Tenemos $|\lambda| \leq 6$ para todos los eigenvalores λ .
 b. El eigenvalor y el eigenvector aproximados son $\mu^{(133)} = 0.69766854$, $\mathbf{x}^{(133)} = (1, 0.7166727, 0.2568099, 0.04601217)^t$.
 c. El polinomio característico es $P(\lambda) = \lambda^4 - \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{16}$, y los eigenvalores son $\lambda_1 = 0.6976684972$, $\lambda_2 = -0.2301775942 + 0.56965884i$, $\lambda_3 = -0.2301775942 - 0.56965884i$, y $\lambda_4 = -0.237313308$.
 d. La población de escarabajos se debería aproximar a cero ya que A es convergente.

19. El uso del método de potencia inversa con $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)^t$ y $q = 0$ da los siguientes resultados:
- $\mu^{(49)} = 1.0201926$, por lo que $\rho(A^{-1}) \approx 1/\mu^{(49)} = 0.9802071$;
 - $\mu^{(30)} = 1.0404568$, por lo que $\rho(A^{-1}) \approx 1/\mu^{(30)} = 0.9611163$;
 - $\mu^{(22)} = 1.0606974$, por lo que $\rho(A^{-1}) \approx 1/\mu^{(22)} = 0.9427760$.
- El método parece estable para todas α en $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.
21. La formación de $A^{-1}B$ y el uso del método de potencia con $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)^t$ proveen los siguientes resultados:
- El radio espectral es aproximadamente $\mu^{(46)} = 0.9800021$.
 - El radio espectral es aproximadamente $\mu^{(25)} = 0.9603543$.
 - El radio espectral es aproximadamente $\mu^{(18)} = 0.9410754$.
23. Los eigenvalores aproximados y los eigenvectores aproximados son:
- $\mu^{(2)} = 1.000000$, $\mathbf{x}^{(2)} = (0.1542373, -0.7715828, 0.6171474)^t$
 - $\mu^{(13)} = 1.000000$, $\mathbf{x}^{(13)} = (0.00007432, -0.7070723, 0.7071413)^t$
 - $\mu^{(14)} = 4.961699$, $\mathbf{x}^{(14)} = (-0.4814472, 0.05180473, 0.8749428)^t$
 - $\mu^{(17)} = 4.428007$, $\mathbf{x}^{(17)} = (0.7194230, 0.4231908, 0.1153589, 0.5385466)^t$
25. Puesto que

$$\mathbf{x}^t = \frac{1}{\lambda_1 v_i^{(1)}} (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}),$$

la i -ésima fila de B es

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 v_i^{(1)}} (v_i^{(1)} a_{i1}, v_i^{(1)} a_{i2}, \dots, v_i^{(1)} a_{in}) = \mathbf{0}.$$

Conjunto de ejercicios 9.4

1. El método de Householder produce las siguientes matrices tridiagonales.

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \begin{bmatrix} 12.00000 & -10.77033 & 0.0 \\ -10.77033 & 3.862069 & 5.344828 \\ 0.0 & 5.344828 & 7.137931 \end{bmatrix} & \text{b. } \begin{bmatrix} 2.0000000 & 1.414214 & 0.0 \\ 1.414214 & 1.000000 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 3.0 \end{bmatrix} \\ \text{c. } \begin{bmatrix} 1.0000000 & -1.414214 & 0.0 \\ -1.414214 & 1.000000 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.000000 \end{bmatrix} & \text{d. } \begin{bmatrix} 4.750000 & -2.263846 & 0.0 \\ -2.263846 & 4.475610 & -1.219512 \\ 0.0 & -1.219512 & 5.024390 \end{bmatrix} \end{array}$$

3. El método de Householder produce las siguientes matrices superiores de Hessenberg.

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \begin{bmatrix} 2.0000000 & 2.8284271 & 1.4142136 \\ -2.8284271 & 1.0000000 & 2.0000000 \\ 0.0000000 & 2.0000000 & 3.0000000 \end{bmatrix} & \text{b. } \begin{bmatrix} -1.0000000 & -3.0655513 & 0.0000000 \\ -3.0655513 & -0.23076923 & 3.1538462 \\ 0.0000000 & 0.15384615 & 2.2307692 \end{bmatrix} \\ \text{c. } \begin{bmatrix} 5.0000000 & 4.9497475 & -1.4320780 & -1.5649769 \\ -1.4142136 & -2.0000000 & -2.4855515 & 1.8226448 \\ 0.0000000 & -5.4313902 & -1.4237288 & -2.6486542 \\ 0.0000000 & 0.0000000 & 1.5939865 & 5.4237288 \end{bmatrix} & \\ \text{d. } \begin{bmatrix} 4.0000000 & 1.7320508 & 0.0000000 & 0.0000000 \\ 1.7320508 & 2.3333333 & 0.23570226 & 0.40824829 \\ 0.0000000 & -0.47140452 & 4.6666667 & -0.57735027 \\ 0.0000000 & 0.0000000 & 0.0000000 & 5.0000000 \end{bmatrix} & \end{array}$$

Conjunto de ejercicios 9.5

1. Dos iteraciones del método QR sin procedimiento de cambio producen las siguientes matrices.

$$\begin{array}{ll} \text{a. } A^{(3)} = \begin{bmatrix} 3.142857 & -0.559397 & 0.0 \\ -0.559397 & 2.248447 & -0.187848 \\ 0.0 & -0.187848 & 0.608696 \end{bmatrix} & \text{b. } A^{(3)} = \begin{bmatrix} 4.549020 & 1.206958 & 0.0 \\ 1.206958 & 3.519688 & 0.000725 \\ 0.0 & 0.000725 & -0.068708 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } A^{(3)} &= \begin{bmatrix} 4.592920 & -0.472934 & 0.0 \\ -0.472934 & 3.108760 & -0.232083 \\ 0.0 & -0.232083 & 1.298319 \end{bmatrix} \\ \text{d. } A^{(3)} &= \begin{bmatrix} 3.071429 & 0.855352 & 0.0 & 0.0 \\ 0.855352 & 3.314192 & -1.161046 & 0.0 \\ 0.0 & -1.161046 & 3.331770 & 0.268898 \\ 0.0 & 0.0 & 0.268898 & 0.282609 \end{bmatrix} \\ \text{e. } A^{(3)} &= \begin{bmatrix} -3.607843 & 0.612882 & 0.0 & 0.0 \\ 0.612882 & -1.395227 & -1.111027 & 0.0 \\ 0 & -1.111027 & 3.133919 & 0.346353 \\ 0.0 & 0.0 & 0.346353 & 0.869151 \end{bmatrix} \\ \text{f. } A^{(3)} &= \begin{bmatrix} 1.013260 & 0.279065 & 0.0 & 0.0 \\ 0.279065 & 0.696255 & 0.107448 & 0.0 \\ 0.0 & 0.107448 & 0.843061 & 0.310832 \\ 0.0 & 0.0 & 0.310832 & 0.317424 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. Las matrices en el ejercicio 1 tienen los siguientes eigenvalores, exactos dentro de 10^{-5} .

- | | |
|--|--|
| a. 3.414214, 2.000000, 0.58578644 | b. -0.06870782, 5.346462, 2.722246 |
| c. 1.267949, 4.732051, 3.000000 | d. 4.745281, 3.177283, 1.822717, 0.2547188 |
| e. 3.438803, 0.8275517, -1.488068, -3.778287 | f. 0.9948440, 1.189091, 0.5238224, 0.1922421 |

5. Las matrices en el ejercicio 1 tienen los siguientes eigenvalores, exactos dentro de 10^{-5} .

- a. $(-0.7071067, 1, -0.7071067)^t$, $(1, 0, -1)^t$, $(0.7071068, 1, 0.7071068)^t$
 b. $(0.1741299, -0.5343539, 1)^t$, $(0.4261735, 1, 0.4601443)^t$, $(1, -0.2777544, -0.3225491)^t$
 c. $(0.2679492, 0.7320508, 1)^t$, $(1, -0.7320508, 0.2679492)^t$, $(1, 1, -1)^t$
 d. $(-0.08029447, -0.3007254, 0.7452812, 1)^t$, $(0.4592880, 1, -0.7179949, 0.8727118)^t$,
 $(0.8727118, 0.7179949, 1, -0.4592880)^t$, $(1, -0.7452812, -0.3007254, 0.08029447)^t$
 e. $(-0.01289861, -0.07015299, 0.4388026, 1)^t$, $(-0.1018060, -0.2878618, 1, -0.4603102)^t$,
 $(1, 0.5119322, 0.2259932, -0.05035423)^t$, $(-0.5623391, 1, 0.2159474, -0.03185871)^t$
 f. $(-0.1520150, -0.3008950, -0.05155956, 1)^t$, $(0.3627966, 1, 0.7459807, 0.3945081)^t$,
 $(1, 0.09528962, -0.6907921, 0.1450703)^t$, $(0.8029403, -0.9884448, 1, -0.1237995)^t$

7. a. Dentro de 10^{-5} , los eigenvalores son 2.618034, 3.618034, 1.381966, y 0.3819660.

b. En términos de p y ρ los eigenvalores son $-65.45085p/\rho$, $-90.45085p/\rho$, $-34.54915p/\rho$, y $-9.54915p/\rho$.

9. Los eigenvalores reales son los siguientes:

- a. Cuando $\alpha = 1/4$, tenemos 0.97974649, 0.92062677, 0.82743037, 0.70770751, 0.57115742, 0.42884258, 0.29229249, 0.17256963, 0.07937323, y 0.02025351.
 b. Cuando $\alpha = 1/2$, tenemos 0.95949297, 0.84125353, 0.65486073, 0.41541501, 0.14231484, -0.14231484, -0.41541501, -0.65486073, -0.84125353, y -0.95949297.
 c. Cuando $\alpha = 3/4$, tenemos 0.93923946, 0.76188030, 0.48229110, 0.12312252, -0.28652774, -0.71347226, -1.12312252, -1.48229110, -1.76188030, y -1.93923946. El método parece ser estable para $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

11. a. Sea

$$P = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

y $\mathbf{y} = P\mathbf{x}$. Muestre que $\|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{y}\|_2$. Use la relación $x_1 + ix_2 = re^{i\alpha}$, donde $r = \|\mathbf{x}\|_2$ y $\alpha = \tan^{-1}(x_2/x_1)$ y $y_1 + iy_2 = re^{i(\alpha+\theta)}$.

b. Sea $\mathbf{x} = (1, 0)^t$ y $\theta = \pi/4$.

13. Sea $C = RQ$, donde R es triangular superior y Q es Hessenberg superior. Entonces $c_{ij} = \sum_{k=1}^n r_{ik}q_{kj}$. Puesto que R es una matriz triangular superior, $r_{ik} = 0$ si $k < i$. Puesto que, $c_{ij} = \sum_{k=i}^n r_{ik}q_{kj}$. Puesto que Q es una matriz Hessenberg superior $q_{kj} = 0$ si $k > j + 1$. Por lo tanto, $c_{ij} = \sum_{k=i}^{j+1} r_{ik}q_{kj}$. La suma es cero si $i > j + 1$. Por lo tanto, $c_{ij} = 0$ si $i \geq j + 2$. Esto significa que C es una matriz Hessenberg superior.

15. ENTRADA: dimensión n , matriz $A = (a_{ij})$, tolerancia TOL , número máximo de iteraciones N .

SALIDA: eigenvalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A o un mensaje que indica que se superó el número de iteraciones.

Paso 1 Determine $FLAG = 1$; $k1 = 1$.

Paso 2 Mientras ($FLAG = 1$) haga los pasos 3–10

Paso 3 Para $i = 2, \dots, n$ haga los pasos 4–8.

Paso 4 Para $j = 1, \dots, i - 1$ haga los pasos 5–8.

Paso 5 Si $a_{ii} = a_{jj}$ entonces determine
 $CO = 0.5\sqrt{2}$;
 $SI = CO$

si no determine

$$b = |a_{ii} - a_{jj}|;$$

$$c = 2a_{ij} \operatorname{sign}(a_{ii} - a_{jj});$$

$$CO = 0.5 \left(1 + b / (c^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$SI = 0.5c / \left(CO (c^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Paso 6 Para $k = 1, \dots, n$

si ($k \neq i$) y ($k \neq j$) entonces

determine $x = a_{k,j}$;

$$y = a_{k,i};$$

$$a_{k,j} = CO \cdot x + SI \cdot y;$$

$$a_{k,i} = CO \cdot y + SI \cdot x;$$

$$x = a_{j,k};$$

$$y = a_{i,k};$$

$$a_{j,k} = CO \cdot x + SI \cdot y;$$

$$a_{i,k} = CO \cdot y - SI \cdot x.$$

Paso 7 determine $x = a_{j,j}$;

$$y = a_{i,i};$$

$$a_{j,j} = CO \cdot CO \cdot x + 2 \cdot SI \cdot CO \cdot a_{j,i} + SI \cdot SI \cdot y;$$

$$a_{i,i} = SI \cdot SI \cdot x - 2 \cdot SI \cdot CO \cdot a_{i,j} + CO \cdot CO \cdot y.$$

Paso 8 Determine $a_{i,j} = 0$; $a_{j,i} = 0$.

Paso 9 Determine

$$s = \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}|.$$

Paso 10 Si $s < TOL$ entonces para $i = 1, \dots, n$ determine

$$\lambda_i = a_{ii};$$

SALIDA ($\lambda_1, \dots, \lambda_n$);

determine $FLAG = 0$.

si no determine $k1 = k1 + 1$;

si $k1 > N$ entonces determine $FLAG = 0$.

Paso 11 Si $k1 > N$ entonces

SALIDA ('Se excedió el número máximo de iteraciones');

PARE.

Conjunto de ejercicios 9.6

1. a. $s_1 = 1 + \sqrt{2}$, $s_2 = -1 + \sqrt{2}$

b. $s_1 = 2.676243$, $s_2 = 0.9152717$

c. $s_1 = 3.162278$, $s_2 = 2$

d. $s_1 = 2.645751$, $s_2 = 1$, $s_3 = 1$

3. a.

$$U = \begin{bmatrix} -0.923880 & -0.382683 \\ -0.382683 & 0.923880 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 2.414214 & 0 \\ 0 & 0.414214 \end{bmatrix},$$

$$V' = \begin{bmatrix} -0.923880 & -0.382683 \\ -0.382683 & 0.923880 \end{bmatrix}$$

$$\text{b.} \quad U = \begin{bmatrix} 0.8247362 & -0.3913356 & 0.4082483 \\ 0.5216090 & 0.2475023 & -0.8164966 \\ 0.2184817 & 0.8863403 & 0.4082483 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 2.676243 & 0 \\ 0 & 0.9152717 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$V^t = \begin{bmatrix} 0.8112422 & 0.5847103 \\ -0.5847103 & 0.8112422 \end{bmatrix}$$

$$\text{c.} \quad U = \begin{bmatrix} -0.632456 & -0.500000 & -0.5 & 0.3162278 \\ 0.316228 & -0.500000 & 0.5 & 0.6324555 \\ -0.316228 & -0.500000 & 0.5 & -0.6324555 \\ -0.632456 & 0.500000 & 0.5 & 0.3162278 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 3.162278 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$V^t = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{d.} \quad U = \begin{bmatrix} -0.436436 & 0.707107 & 0.408248 & -0.377964 \\ 0.436436 & 0.707107 & -0.408248 & 0.377964 \\ -0.436436 & 0 & -0.816497 & -0.377964 \\ -0.654654 & 0 & 0 & 0.755929 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 2.645751 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$V^t = \begin{bmatrix} -0.577350 & -0.577350 & 0.577350 \\ 0 & 0.707107 & 0.707107 \\ 0.816497 & -0.408248 & 0.408248 \end{bmatrix}$$

5. Para la matriz A en el ejemplo 2, tenemos

$$A^t A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Por lo que $A^t A(1, 2, 1)^t = (5, 10, 5)^t = 5(1, 2, 1)^t$, $A^t A(1, -1, 1)^t = (2, -2, 2)^t = 2(1, -1, 1)^t$, y $A^t A(-1, 0, 1)^t = (-1, 0, 1)^t$.

7. a. Utilice los valores tabulados para construir

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.84 \\ 1.96 \\ 2.21 \\ 2.45 \\ 2.94 \\ 3.18 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1.0 & 1.0 \\ 1 & 1.1 & 1.21 \\ 1 & 1.3 & 1.69 \\ 1 & 1.5 & 2.25 \\ 1 & 1.9 & 3.61 \\ 1 & 2.1 & 4.41 \end{bmatrix}.$$

La matriz A tiene la descomposición de valor singular $A = U S V^t$, donde

$$U = \begin{bmatrix} -0.203339 & -0.550828 & 0.554024 & 0.055615 & -0.177253 & -0.560167 \\ -0.231651 & -0.498430 & 0.185618 & 0.165198 & 0.510822 & 0.612553 \\ -0.294632 & -0.369258 & -0.337742 & -0.711511 & -0.353683 & 0.177288 \\ -0.366088 & -0.20758 & -0.576499 & 0.642950 & -0.264204 & -0.085730 \\ -0.534426 & 0.213281 & -0.200202 & -0.214678 & 0.628127 & -0.433808 \\ -0.631309 & 0.472467 & 0.414851 & 0.062426 & -0.343809 & 0.289864 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} 7.844127 & 0 & 0 \\ 0 & 1.223790 & 0 \\ 0 & 0 & 0.070094 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad V^t = \begin{bmatrix} -0.288298 & -0.475702 & -0.831018 \\ -0.768392 & -0.402924 & 0.497218 \\ 0.571365 & -0.781895 & 0.249363 \end{bmatrix}.$$

Por lo que,

$$\mathbf{c} = U' \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5.955009 \\ -1.185591 \\ -0.044985 \\ -0.003732 \\ -0.000493 \\ -0.001963 \end{bmatrix},$$

y las componentes de \mathbf{z} son

$$z_1 = \frac{c_1}{s_1} = \frac{-5.955009}{7.844127} = -0.759168, \quad z_2 = \frac{c_2}{s_2} = \frac{-1.185591}{1.223790} = -0.968786,$$

y

$$z_3 = \frac{c_3}{s_3} = \frac{-0.044985}{0.070094} = -0.641784.$$

Esto provee los coeficientes de mínimos cuadrados en $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ como

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x} = V \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0.596581 \\ 1.253293 \\ -0.010853 \end{bmatrix}.$$

El error de mínimos cuadrados por medio de estos valores usa los últimos tres componentes de \mathbf{c} y es

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 = \sqrt{c_4^2 + c_5^2 + c_6^2} = \sqrt{(-0.003732)^2 + (-0.000493)^2 + (-0.001963)^2} = 0.004244.$$

b. Use los valores tabulados para construir

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.84 \\ 1.96 \\ 2.21 \\ 2.45 \\ 2.94 \\ 3.18 \end{bmatrix}, \quad y \quad A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \\ 1 & x_5 & x_5^2 & x_5^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1 & 1.1 & 1.21 & 1.331 \\ 1 & 1.3 & 1.69 & 2.197 \\ 1 & 1.5 & 2.25 & 3.375 \\ 1 & 1.9 & 3.61 & 6.859 \\ 1 & 2.1 & 4.41 & 9.261 \end{bmatrix}.$$

La matriz A tiene la descomposición de valor singular $A = U S V'$, donde

$$U = \begin{bmatrix} -0.116086 & -0.514623 & 0.569113 & -0.437866 & -0.381082 & 0.246672 \\ -0.143614 & -0.503586 & 0.266325 & 0.184510 & 0.535306 & 0.578144 \\ -0.212441 & -0.448121 & -0.238475 & 0.48499 & 0.180600 & -0.655247 \\ -0.301963 & -0.339923 & -0.549619 & 0.038581 & -0.573591 & 0.400867 \\ -0.554303 & 0.074101 & -0.306350 & -0.636776 & 0.417792 & -0.115640 \\ -0.722727 & 0.399642 & 0.390359 & 0.363368 & -0.179026 & 0.038548 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} 14.506808 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.084909 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.198760 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.868328 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y

$$V' = \begin{bmatrix} -0.141391 & -0.246373 & -0.449207 & -0.847067 \\ -0.639122 & -0.566437 & -0.295547 & 0.428163 \\ 0.660862 & -0.174510 & -0.667840 & 0.294610 \\ -0.367142 & 0.766807 & -0.514640 & 0.111173 \end{bmatrix}.$$

Por lo que,

$$\mathbf{c} = U^t \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5.632309 \\ -2.268376 \\ 0.036241 \\ 0.005717 \\ -0.000845 \\ -0.004086 \end{bmatrix},$$

y las componentes de \mathbf{z} son

$$z_1 = \frac{c_1}{s_1} = \frac{-5.632309}{14.506808} = -0.388253, \quad z_2 = \frac{c_2}{s_2} = \frac{-2.268376}{2.084909} = -1.087998,$$

$$z_3 = \frac{c_3}{s_3} = \frac{0.036241}{0.198760} = 0.182336, \quad \text{y} \quad z_4 = \frac{c_4}{s_4} = \frac{0.005717}{0.868328} = 0.65843.$$

Esto provee los coeficientes de mínimos cuadrados en $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ como

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \mathbf{x} = V \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0.629019 \\ 1.185010 \\ 0.035333 \\ -0.010047 \end{bmatrix}.$$

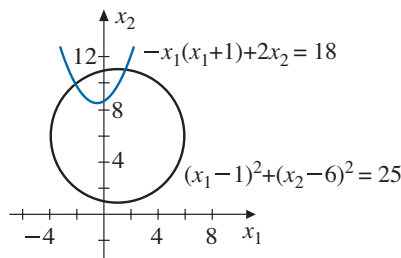
El error de mínimos cuadrados por medio de estos valores usa los dos componentes de \mathbf{c} y es

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 = \sqrt{c_5^2 + c_6^2} = \sqrt{(-0.000845)^2 + (-0.004086)^2} = 0.004172.$$

9. $P_2(x) = 19.691025 - 0.0065112585x + 6.3494753 \times 10^{-7}x^2$. El error de mínimos cuadrados es 0.42690171.
11. Sea A una matriz $m \times n$. El teorema 9.25 implica que $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A^t)$, por lo que $\text{Nulidad}(A) = n - \text{Rango}(A)$ y $\text{Nulidad}(A^t) = m - \text{Rango}(A^t) = m - \text{Rango}(A)$. Por lo que, $\text{Nulidad}(A) = \text{Nulidad}(A^t)$ si y sólo si $n = m$.
13. $\text{Rango}(S)$ es el número de entradas diferentes de cero en la diagonal de S . Esto corresponde al número de eigenvalores diferentes a cero (multiplicidades de conteo) de $A^t A$. Por lo que $\text{Rango}(S) = \text{Rango}(A^t A)$, y por la parte ii) del teorema 9.26 es igual a $\text{Rango}(A)$.
15. Puesto que $U^{-1} = U^t$ y $V^{-1} = V^t$ existen ambos $A = USV^t$ implica que $A^{-1} = (USV^t)^{-1} = VS^{-1}U^t$ si y sólo si existe S^{-1} .
17. Sí. Por medio del teorema 9.25 tenemos $\text{Rango}(A^t A) = \text{Rango}((A^t A)^t) = \text{Rango}(AA^t)$. Al aplicar la parte iii) del teorema 9.26 obtenemos $\text{Rango}(AA^t) = \text{Rango}(A^t A) = \text{Rango}(A)$.
19. Si la matriz A $n \times n$ tiene los valores singulares $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n > 0$, entonces $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)} = s_1$. Además, los valores singulares de A^{-1} son $\frac{1}{s_n} \geq \dots \geq \frac{1}{s_2} \geq \frac{1}{s_1} > 0$, por lo que $\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{s_n^2}} = \frac{1}{s_n}$. Por lo tanto, $K_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = s_1/s_n$.

Conjunto de ejercicios 10.1

1. Las soluciones están cerca de $(-1.5, 10.5)$ y $(2, 11)$.
 - a. Las gráficas se muestran en la figura siguiente.



b. Use

$$\mathbf{G}_1(\mathbf{x}) = \left(-0.5 + \sqrt{2x_2 - 17.75}, 6 + \sqrt{25 - (x_1 - 1)^2} \right)^t$$

y

$$\mathbf{G}_2(\mathbf{x}) = \left(-0.5 - \sqrt{2x_2 - 17.75}, 6 + \sqrt{25 - (x_1 - 1)^2} \right)^t.$$

Para $\mathbf{G}_1(\mathbf{x})$ con $\mathbf{x}^{(0)} = (2, 11)^t$, tenemos $\mathbf{x}^{(9)} = (1.5469466, 10.969994)^t$, y para $\mathbf{G}_2(\mathbf{x})$ con $\mathbf{x}^{(0)} = (-1.5, 10.5)$, tenemos $\mathbf{x}^{(34)} = (-2.000003, 9.999996)^t$.

3. b. Con $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)^t$ y tolerancia 10^{-5} , tenemos $\mathbf{x}^{(13)} = (0.9999973, 0.9999973)^t$.

c. Con $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)^t$ y tolerancia 10^{-5} , tenemos $\mathbf{x}^{(11)} = (0.9999984, 0.9999991)^t$.

5. a. Con $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^t$, tenemos $\mathbf{x}^{(5)} = (5.0000000, 0.0000000, -0.5235988)^t$.

b. Con $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^t$, tenemos $\mathbf{x}^{(9)} = (1.0364011, 1.0857072, 0.93119113)^t$.

c. Con $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0.5)^t$, tenemos $\mathbf{x}^{(5)} = (0.0000000, 0.09999999, 1.0000000)^t$.

d. Con $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^t$, tenemos $\mathbf{x}^{(5)} = (0.49814471, -0.19960600, -0.52882595)^t$.

7. a. Con $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^t$, tenemos $\mathbf{x}^{(3)} = (0.5000000, 0, -0.5235988)^t$.

b. Con $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^t$, tenemos $\mathbf{x}^{(4)} = (1.036400, 1.085707, 0.9311914)^t$.

c. Con $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^t$, tenemos $\mathbf{x}^{(3)} = (0, 0.1000000, 1.0000000)^t$.

d. Con $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^t$, tenemos $\mathbf{x}^{(4)} = (0.4981447, -0.1996059, -0.5288260)^t$.

9. Una solución estable se presenta cuando $x_1 = 8000$ y $x_2 = 4000$.

11. Use el teorema 10.5.

13. Use el teorema 10.5 para cada una de las derivadas parciales.

15. En esta situación tenemos, para cualquier norma de matriz,

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|.$$

Los resultados se siguen al seleccionar $\delta = \varepsilon/\|\mathbf{A}\|$, siempre que $\|\mathbf{A}\| \neq 0$. Cuando $\|\mathbf{A}\| = 0$, δ se puede seleccionar de manera arbitraria porque \mathbf{A} es la matriz cero.

Conjunto de ejercicios 10.2

1. a. $\mathbf{x}^{(2)} = (0.4958936, 1.983423)^t$

c. $\mathbf{x}^{(2)} = (-23.942626, 7.6086797)^t$

3. a. $(0.5, 0.2)^t$ y $(1.1, 6.1)^t$

c. $(-1, 3.5)^t$, $(2.5, 4)^t$

5. a. Con $\mathbf{x}^{(0)} = (0.5, 2)^t$, $\mathbf{x}^{(3)} = (0.5, 2)^t$. Con $\mathbf{x}^{(0)} = (1.1, 6.1)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (1.0967197, 6.0409329)^t$.

b. Con $\mathbf{x}^{(0)} = (-0.35, 0.05)^t$, $\mathbf{x}^{(3)} = (-0.37369822, 0.056266490)^t$.

Con $\mathbf{x}^{(0)} = (0.2, -0.45)^t$, $\mathbf{x}^{(4)} = (0.14783924, -0.43617762)^t$.

Con $\mathbf{x}^{(0)} = (0.4, -0.5)^t$, $\mathbf{x}^{(3)} = (0.40809566, -0.49262939)^t$.

Con $\mathbf{x}^{(0)} = (1, -0.3)^t$, $\mathbf{x}^{(4)} = (1.0330715, -0.27996184)^t$.

c. Con $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, 3.5)^t$, $\mathbf{x}^{(1)} = (-1, 3.5)^t$ y $\mathbf{x}^{(0)} = (2.5, 4)^t$, $\mathbf{x}^{(3)} = (2.546947, 3.984998)^t$.

d. Con $\mathbf{x}^{(0)} = (0.11, 0.27)^t$, $\mathbf{x}^{(6)} = (0.1212419, 0.2711051)^t$.

7. a. $\mathbf{x}^{(5)} = (0.5000000, 0.8660254)^t$

c. $\mathbf{x}^{(5)} = (-1.456043, -1.664230, 0.4224934)^t$

b. $\mathbf{x}^{(2)} = (-0.5131616, -0.01837622)^t$

d. $\mathbf{x}^{(1)}$ No se puede calcular ya que $J(0)$ es singular.

b. $(-0.35, 0.05)^t$, $(0.2, -0.45)^t$, $(0.4, -0.5)^t$ y $(1, -0.3)^t$

d. $(0.11, 0.27)^t$

b. $\mathbf{x}^{(6)} = (1.772454, 1.772454)^t$

d. $\mathbf{x}^{(4)} = (0.4981447, -0.1996059, -0.5288260)^t$

9. Con $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1 - 1)^t$ y $TOL = 10^{-6}$, tenemos $\mathbf{x}^{(20)} = (0.5, 9.5 \times 10^{-7}, -0.5235988)^t$.

11. Con $\theta_i^{(0)} = 1$, para cada $i = 1, 2, \dots, 20$, se obtienen los siguientes resultados.

i	1	2	3	4	5	6	
$\theta_i^{(5)}$	0.14062	0.19954	0.24522	0.28413	0.31878	0.35045	
i	7	8	9	10	11	12	13
$\theta_i^{(5)}$	0.37990	0.40763	0.43398	0.45920	0.48348	0.50697	0.52980

i	14	15	16	17	18	19	20
$\theta_i^{(5)}$	0.55205	0.57382	0.59516	0.61615	0.63683	0.65726	0.67746

13. Cuando la dimensión n es 1, $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ es una función de un componente $f(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x})$, y el vector \mathbf{x} sólo tiene una componente $x_1 = x$. En este caso, la matriz Jacobina $J(\mathbf{x})$ se reduce a la matriz $1 \times 1 \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right] = f'(\mathbf{x}) = f'(x)$. Por lo tanto, la ecuación vector

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} - J(\mathbf{x}^{(k-1)})^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k-1)})$$

se convierte en la ecuación escalar

$$x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1})^{-1} f(x_{k-1}) = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}.$$

Conjunto de ejercicios 10.3

1. a. $\mathbf{x}^{(2)} = (0.4777920, 1.927557)^t$
 c. $\mathbf{x}^{(2)} = (0.52293721, 0.82434906)^t$
2. a. $\mathbf{x}^{(8)} = (0.5, 2)^t$
 c. $\mathbf{x}^{(9)} = (0.5, 0.8660254)^t$
3. a. Con $\mathbf{x}^{(0)} = (2.5, 4)^t$, tenemos $\mathbf{x}^{(3)} = (2.546947, 3.984998)^t$.
 b. Con $\mathbf{x}^{(0)} = (0.11, 0.27)^t$, tenemos $\mathbf{x}^{(4)} = (0.1212419, 0.2711052)^t$.
 c. Con $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^t$, tenemos $\mathbf{x}^{(3)} = (1.036401, 1.085707, 0.9311914)^t$.
 d. Con $\mathbf{x}^{(0)} = (1, -1, 1)^t$, tenemos $\mathbf{x}^{(8)} = (0.9, -1, 0.5)^t$; y con $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, -1)^t$, tenemos $\mathbf{x}^{(8)} = (0.5, 1, -0.5)^t$.
7. Con $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1 - 1)^t$, tenemos $\mathbf{x}^{(56)} = (0.5000591, 0.01057235, -0.5224818)^t$.
9. Con $\mathbf{x}^{(0)} = (0.75, 1.25)^t$, tenemos $\mathbf{x}^{(4)} = (0.7501948, 1.184712)^t$. Por lo tanto, $a = 0.7501948$, $b = 1.184712$, y el error es 19.796.
11. Sea λ un eigenvalor de $M = (I + \mathbf{u}\mathbf{v}^t)$ con eigenvector $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Entonces $\lambda \mathbf{x} = M\mathbf{x} = (I + \mathbf{u}\mathbf{v}^t)\mathbf{x} = \mathbf{x} + (\mathbf{v}^t \mathbf{x}) \mathbf{u}$. Por lo tanto, $(\lambda - 1)\mathbf{x} = (\mathbf{v}^t \mathbf{x}) \mathbf{u}$. Si $\lambda = 1$, entonces $\mathbf{v}^t \mathbf{x} = 0$. Por lo que, $\lambda = 1$ es un eigenvalor de M con multiplicidad $n - 1$ y eigenvectores $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n-1)}$, donde $\mathbf{v}^t \mathbf{x}^{(j)} = 0$, para $j = 1, \dots, n - 1$. Suponga que $\lambda \neq 1$ implica que \mathbf{x} y \mathbf{u} son paralelas. Suponga que $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{u}$. Entonces $(\lambda - 1)\alpha \mathbf{u} = (\mathbf{v}^t(\alpha \mathbf{u})) \mathbf{u}$. Entonces, $\alpha(\lambda - 1)\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{v}^t \mathbf{u}) \mathbf{u}$, lo cual implica que $\lambda - 1 = \mathbf{v}^t \mathbf{u}$ o $\lambda = 1 + \mathbf{v}^t \mathbf{u}$. Por lo tanto, M tiene eigenvalores λ_i , $1 \leq i \leq n$, donde $\lambda_i = 1$, para $i = 1, \dots, n - 1$, y $\lambda_n = 1 + \mathbf{v}^t \mathbf{u}$. Puesto que $\det M = \prod_{i=1}^n \lambda_i$, tenemos $\det M = 1 + \mathbf{v}^t \mathbf{u}$.

Conjunto de ejercicios 10.4

1. a. Con $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)^t$, tenemos $\mathbf{x}^{(11)} = (0.4943541, 1.948040)^t$.
 b. Con $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1)^t$, tenemos $\mathbf{x}^{(2)} = (0.4970073, 0.8644143)^t$.
 c. Con $\mathbf{x}^{(0)} = (2, 2)^t$, tenemos $\mathbf{x}^{(1)} = (1.736083, 1.804428)^t$.
 d. Con $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)^t$, tenemos $\mathbf{x}^{(2)} = (-0.3610092, 0.05788368)^t$.
2. a. $\mathbf{x}^{(3)} = (0.5, 2)^t$
 c. $\mathbf{x}^{(4)} = (1.772454, 1.772454)^t$
3. a. $\mathbf{x}^{(3)} = (0.5, 0.8660254)^t$
 d. $\mathbf{x}^{(3)} = (-0.3736982, 0.05626649)^t$
5. a. Con $\mathbf{x}(0) = (0, 0)^t$, $g(3.3231994, 0.11633359) = -0.14331228$ en dos iteraciones.
 b. Con $\mathbf{x}(0) = (0, 0)^t$, $g(0.43030383, 0.18006958) = 0.32714638$ en 38 iteraciones.
 c. Con $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)^t$, $g(-0.66340113, 0.31453697, 0.50007629) = 0.69215167$ en cinco iteraciones.
 d. Con $\mathbf{x}(0) = (0.5, 0.5, 0.5)^t$, $g(-0.03338762, 0.00401587, -0.00093451) = 1.01000124$ en tres iteraciones.
7. a. $b = 1.5120985$, $a = 0.87739838$
 c. La parte b) lo hace.
- b. $b = 21.014867$, $a = -3.7673246$
 d. La parte a) predice 86% y la parte b) predice 39%.

3. El algoritmo de disparo lineal proporciona los resultados en las siguientes tablas.

a.

i	x_i	w_{1i}	$y(x_i)$
3	0.3	0.7833204	0.7831923
6	0.6	0.6023521	0.6022801
9	0.9	0.8568906	0.8568760

b.

i	x_i	w_{1i}	$y(x_i)$
5	1.25	0.1676179	0.1676243
10	1.50	0.4581901	0.4581935
15	1.75	0.6077718	0.6077740

c.

i	x_i	w_{1i}	$y(x_i)$
3	0.3	-0.5185754	-0.5185728
6	0.6	-0.2195271	-0.2195247
9	0.9	-0.0406577	-0.0406570

d.

i	x_i	w_{1i}	$y(x_i)$
3	1.3	0.0655336	0.06553420
6	1.6	0.0774590	0.07745947
9	1.9	0.0305619	0.03056208

5. El algoritmo de disparo lineal con $h = 0.05$ proporciona los siguientes resultados.

i	x_i	w_{1i}
6	0.3	0.04990547
10	0.5	0.00673795
16	0.8	0.00033755

El algoritmo de disparo lineal con $h = 0.1$ proporciona los siguientes resultados.

i	x_i	w_{1i}
3	0.3	0.05273437
5	0.5	0.00741571
8	0.8	0.00038976

7. Para la ecuación (11.3), sea $u_1(x) = y$ y $u_2(x) = y'$. Entonces

$$u_1'(x) = u_2(x), \quad a \leq x \leq b, \quad u_1(a) = \alpha$$

y

$$u_2'(x) = p(x)u_2(x) + q(x)u_1(x) + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad u_2(a) = 0.$$

Para la ecuación (11.4), sea $v_1(x) = y$ y $v_2(x) = y'$. Entonces

$$v_1'(x) = v_2(x), \quad a \leq x \leq b, \quad v_1(a) = 0$$

y

$$v_2'(x) = p(x)v_2(x) + q(x)v_1(x), \quad a \leq x \leq b, \quad v_2(a) = 1.$$

Usando la notación $u_{1,i} = u_1(x_i)$, $u_{2,i} = u_2(x_i)$, $v_{1,i} = v_1(x_i)$, y $v_{2,i} = v_2(x_i)$ nos dirige hacia las ecuaciones en el paso 4 del algoritmo 11.1.

9. a. No hay soluciones si b es un entero múltiplo de π y $B \neq 0$.

b. La única solución existe siempre que b no sea un entero múltiplo de π .

c. Existe un número infinito de soluciones si b es un entero múltiplo de π y $B = 0$.

Conjunto de ejercicios 11.2

- El algoritmo de disparo no lineal provee $w_1 = 0.405505 \approx \ln 1.5 = 0.405465$.
- El algoritmo de disparo no lineal provee los resultados en las siguientes tablas.

a.

i	x_i	w_{1i}	$y(x_i)$	w_{2i}
2	1.20000000	0.18232094	0.18232156	0.83333370
4	1.40000000	0.33647129	0.33647224	0.71428547
6	1.60000000	0.47000243	0.47000363	0.62499939
8	1.80000000	0.58778522	0.58778666	0.55555468

Convergencia en 4 iteraciones $t = 1.0000017$.

c.

i	x_i	w_{1i}	$y(x_i)$	w_{2i}
1	0.83775804	0.86205941	0.86205848	0.38811718
2	0.89011792	0.88156057	0.88155882	0.35695076
3	0.94247780	0.89945618	0.89945372	0.32675844
4	0.99483767	0.91579268	0.91578959	0.29737141

Convergencia en 3 iteraciones $t = 0.42046725$.

b.

i	x_i	w_{1i}	$y(x_i)$	w_{2i}
2	0.31415927	1.36209813	1.36208552	1.29545926
4	0.62831853	1.80002060	1.79999746	1.45626846
6	0.94247780	2.24572329	2.24569937	1.32001776
8	1.25663706	2.58845757	2.58844295	0.79988757

Convergencia en 4 iteraciones $t = 1.0000301$.

d.

i	x_i	w_{1i}	$y(x_i)$	w_{2i}
4	0.62831853	2.58784539	2.58778525	0.80908243
8	1.25663706	2.95114591	2.95105652	0.30904693
12	1.88495559	2.95115520	2.95105652	-0.30901625
16	2.51327412	2.58787536	2.58778525	-0.80904433

Convergencia en 6 iteraciones $t = 1.0001253$.

5.

i	x_i	w_{1i}	w_{2i}
3	0.6	0.71682963	0.92122169
5	1.0	1.00884285	0.53467944
8	1.6	1.13844628	-0.11915193

Conjunto de ejercicios 11.3

- El algoritmo de diferencia finita lineal provee los siguientes resultados.

a.

i	x_i	w_{1i}	$y(x_i)$
1	0.5	0.83333333	0.82402714

c.
$$\frac{4(0.82653061) - 0.83333333}{3} = 0.82426304$$

b.

i	x_i	w_{1i}	$y(x_i)$
1	0.25	0.39512472	0.39367669
2	0.5	0.82653061	0.82402714
3	0.75	1.33956916	1.33708613

- El algoritmo de diferencia finita lineal provee los resultados en las siguientes tablas.

a.

i	x_i	w_i	$y(x_i)$
2	0.2	1.018096	1.0221404
5	0.5	0.5942743	0.59713617
7	0.7	0.6514520	0.65290384

c.

i	x_i	w_{1i}	$y(x_i)$
3	0.3	-0.5183084	-0.5185728
6	0.6	-0.2192657	-0.2195247
9	0.9	-0.0405748	-0.04065697

b.

i	x_i	w_i	$y(x_i)$
5	1.25	0.16797186	0.16762427
10	1.50	0.45842388	0.45819349
15	1.75	0.60787334	0.60777401

d.

i	x_i	w_{1i}	$y(x_i)$
3	1.3	0.0654387	0.0655342
6	1.6	0.0773936	0.0774595
9	1.9	0.0305465	0.0305621

5. El algoritmo de diferencia finita lineal provee los resultados en las siguientes tablas.

i	x_i	$w_i(h = 0.1)$	i	x_i	$w_i(h = 0.05)$
3	0.3	0.05572807	6	0.3	0.05132396
6	0.6	0.00310518	12	0.6	0.00263406
9	0.9	0.00016516	18	0.9	0.00013340

7. a. Las deflexiones aproximadas se muestran en la siguiente tabla.

i	x_i	w_{1i}
5	30	0.0102808
10	60	0.0144277
15	90	0.0102808

b. Sí.

c. Sí. La deflexión máxima se presenta en $x = 60$. La solución exacta se encuentra dentro de la tolerancia, pero la aproximación no.

9. Primero, tenemos

$$\left| \frac{h}{2} p(x_i) \right| \leq \frac{hL}{2} < 1,$$

por lo que

$$\left| -1 - \frac{h}{2} p(x_i) \right| = 1 + \frac{h}{2} p(x_i) \quad \text{y} \quad \left| -1 + \frac{h}{2} p(x_i) \right| = 1 - \frac{h}{2} p(x_i).$$

Por lo tanto,

$$\left| -1 - \frac{h}{2} p(x_i) \right| + \left| -1 + \frac{h}{2} p(x_i) \right| = 2 \leq 2 + h^2 q(x_i),$$

para $2 \leq i \leq N - 1$.

Puesto que

$$\left| -1 + \frac{h}{2} p(x_1) \right| < 2 \leq 2 + h^2 q(x_1) \quad \text{y} \quad \left| -1 - \frac{h}{2} p(x_N) \right| < 2 \leq 2 + h^2 q(x_N),$$

El teorema 6.31 implica que el sistema lineal (11.19) tiene una solución única.

Conjunto de ejercicios 11.4

1. El algoritmo de diferencias finitas no lineal proporciona los siguientes resultados.

i	x_i	w_i	$y(x_i)$
1	1.5	0.4067967	0.4054651

3. El algoritmo de diferencia finita no lineal proporciona los resultados en las siguientes tablas.

a.

i	x_i	w_i	$y(x_i)$
2	1.20000000	0.18220299	0.18232156
4	1.40000000	0.33632929	0.33647224
6	1.60000000	0.46988413	0.47000363
8	1.80000000	0.58771808	0.58778666

Convergencia en 3 iteraciones

b.

i	x_i	w_i	$y(x_i)$
2	0.31415927	1.36244080	1.36208552
4	0.62831853	1.80138559	1.79999746
6	0.94247780	2.24819259	2.24569937
8	1.25663706	2.59083695	2.58844295

Convergencia en 3 iteraciones

c.

i	x_i	w_i	$y(x_i)$
1	0.83775804	0.86205907	0.86205848
2	0.89011792	0.88155964	0.88155882
3	0.94247780	0.89945447	0.89945372
4	0.99483767	0.91579005	0.91578959

Convergencia en 2 iteraciones

d.

i	x_i	w_i	$y(x_i)$
4	0.62831853	2.58932301	2.58778525
8	1.25663706	2.95378037	2.95105652
12	1.88495559	2.95378037	2.95105652
16	2.51327412	2.58932301	2.58778525

Convergencia en 4 iteraciones

5. b. Para (4a)

x_i	$w_i(h = 0.2)$	$w_i(h = 0.1)$	$w_i(h = 0.05)$	$EXT_{1,i}$	$EXT_{2,i}$	$EXT_{3,i}$
1.2	0.45458862	0.45455753	0.45454935	0.45454717	0.45454662	0.45454659
1.4	0.41672067	0.41668202	0.41667179	0.41666914	0.41666838	0.41666833
1.6	0.38466137	0.38462855	0.38461984	0.38461761	0.38461694	0.38461689
1.8	0.35716943	0.35715045	0.35714542	0.35714412	0.35714374	0.35714372

Para (4c)

x_i	$w_i(h = 0.2)$	$w_i(h = 0.1)$	$w_i(h = 0.05)$	$EXT_{1,i}$	$EXT_{2,i}$	$EXT_{3,i}$
1.2	2.0340273	2.0335158	2.0333796	2.0333453	2.0333342	2.0333334
1.4	2.1148732	2.1144386	2.1143243	2.1142937	2.1142863	2.1142858
1.6	2.2253630	2.2250937	2.2250236	2.2250039	2.2250003	2.2250000
1.8	2.3557284	2.3556001	2.3555668	2.3555573	2.3555556	2.3555556

7. La matriz jacobina $J = (a_{i,j})$ es tridiagonal con entradas determinadas en (11.21). Por lo que,

$$\begin{aligned}
 a_{1,1} &= 2 + h^2 f_y \left(x_1, w_1, \frac{1}{2h}(w_2 - \alpha) \right), \\
 a_{1,2} &= -1 + \frac{h}{2} f_{y'} \left(x_1, w_1, \frac{1}{2h}(w_2 - \alpha) \right), \\
 a_{i,i-1} &= -1 - \frac{h}{2} f_{y'} \left(x_i, w_i, \frac{1}{2h}(w_{i+1} - w_{i-1}) \right), \quad \text{para } 2 \leq i \leq N-1 \\
 a_{i,i} &= 2 + h^2 f_y \left(x_i, w_i, \frac{1}{2h}(w_{i+1} - w_{i-1}) \right), \quad \text{para } 2 \leq i \leq N-1 \\
 a_{i,i+1} &= -1 + \frac{h}{2} f_{y'} \left(x_i, w_i, \frac{1}{2h}(w_{i+1} - w_{i-1}) \right), \quad \text{para } 2 \leq i \leq N-1 \\
 a_{N,N-1} &= -1 - \frac{h}{2} f_{y'} \left(x_N, w_N, \frac{1}{2h}(\beta - w_{N-1}) \right), \\
 a_{N,N} &= 2 + h^2 f_y \left(x_N, w_N, \frac{1}{2h}(\beta - w_{N-1}) \right).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $|a_{i,i}| \geq 2 + h^2 \delta$, para $i = 1, \dots, N$. Puesto que $|f_{y'}(x, y, y')| \leq L$ y $h < 2/L$,

$$\left| \frac{h}{2} f_{y'}(x, y, y') \right| \leq \frac{hL}{2} < 1.$$

Por lo que,

$$|a_{1,2}| = \left| -1 + \frac{h}{2} f_{y'} \left(x_1, w_1, \frac{1}{2h}(w_2 - \alpha) \right) \right| < 2 < |a_{1,1}|,$$

$$\begin{aligned}
 |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| &= -a_{i,i-1} - a_{i,i+1} \\
 &= 1 + \frac{h}{2} f_{y'} \left(x_i, w_i, \frac{1}{2h}(w_{i+1} - w_{i-1}) \right) + 1 - \frac{h}{2} f_{y'} \left(x_i, w_i, \frac{1}{2h}(w_{i+1} - w_{i-1}) \right) \\
 &= 2 \leq |a_{i,i}|,
 \end{aligned}$$

y

$$|a_{N,N-1}| = -a_{N,N-1} = 1 + \frac{h}{2} f_{y'} \left(x_N, w_N, \frac{1}{2h}(\beta - w_{N-1}) \right) < 2 < |a_{N,N}|.$$

Por el teorema 6.31, la matriz J es no singular.

Conjunto de ejercicios 11.5

- El algoritmo lineal por tramos proporciona $\phi(x) = -0.07713274\phi_1(x) - 0.07442678\phi_2(x)$. Los valores reales son $y(x_1) = -0.07988545$ y $y(x_2) = -0.07712903$.
- El algoritmo lineal por tramos provee los resultados en las siguientes tablas.

a.

i	x_i	$\phi(x_i)$	$y(x_i)$
3	0.3	-0.212333	-0.21
6	0.6	-0.241333	-0.24
9	0.9	-0.090333	-0.09

b.

i	x_i	$\phi(x_i)$	$y(x_i)$
3	0.3	0.1815138	0.1814273
6	0.6	0.1805502	0.1804753
9	0.9	0.05936468	0.05934303

c.

i	x_i	$\phi(x_i)$	$y(x_i)$
5	0.25	-0.3585989	-0.3585641
10	0.50	-0.5348383	-0.5347803
15	0.75	-0.4510165	-0.4509614

d.

i	x_i	$\phi(x_i)$	$y(x_i)$
5	0.25	-0.1846134	-0.1845204
10	0.50	-0.2737099	-0.2735857
15	0.75	-0.2285169	-0.2284204

- El algoritmo de spline cúbico proporciona los resultados en las siguientes tablas.

i	x_i	$\phi(x_i)$	y_i
1	0.25	-0.1875	-0.1875
2	0.5	-0.25	-0.25
3	0.75	-0.1875	-0.1875

- El algoritmo lineal por tramos proporciona los resultados en la siguiente tabla.

i	x_i	$\phi(x_i)$	$w(x_i)$
4	24	0.00071265	0.0007
8	48	0.0011427	0.0011
10	60	0.00119991	0.0012
16	96	0.00071265	0.0007

- Con $z(x) = y(x) - \beta x - \alpha(1-x)$, tenemos

$$z(0) = y(0) - \alpha = \alpha - \alpha = 0 \quad \text{y} \quad z(1) = y(1) - \beta = \beta - \beta = 0.$$

Además, $z'(x) = y'(x) - \beta + \alpha$. Por lo tanto,

$$y(x) = z(x) + \beta x + \alpha(1-x) \quad \text{y} \quad y'(x) = z'(x) + \beta - \alpha.$$

Al sustituir para y y y' en la ecuación diferencial obtenemos

$$-\frac{d}{dx}(p(x)z' + p(x)(\beta - \alpha)) + q(x)(z + \beta x + \alpha(1-x)) = f(x).$$

Simplificando obtenemos la ecuación diferencial

$$-\frac{d}{dx}(p(x)z') + q(x)z = f(x) + (\beta - \alpha)p'(x) - [\beta x + \alpha(1 - x)]q(x).$$

11. El algoritmo de spline cúbico proporciona los resultados en la siguiente tabla.

x_i	$\phi_i(x)$	$y(x_i)$
0.3	1.0408183	1.0408182
0.5	1.1065307	1.1065301
0.9	1.3065697	1.3065697

13. Si $\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) = 0$, para $0 \leq x \leq 1$, entonces para cualquier j , tenemos $\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x_j) = 0$.
Pero

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j, \end{cases}$$

por lo que $c_j \phi_j(x_j) = c_j = 0$. Por lo tanto, las funciones son linealmente independientes.

15. Sea $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^t$ cualquier vector y sea $\phi(x) = \sum_{j=1}^n c_j \phi_j(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^t \mathbf{A} \mathbf{c} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} c_i c_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i-1}^{i+1} a_{ij} c_i c_j \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\int_0^1 \{p(x) c_i \phi'_i(x) c_{i-1} \phi'_{i-1}(x) + q(x) c_i \phi_i(x) c_{i-1} \phi_{i-1}(x)\} dx \right. \\ &\quad + \int_0^1 \{p(x) c_i^2 [\phi'_i(x)]^2 + q(x) c_i^2 [\phi_i(x)]^2\} dx \\ &\quad \left. + \int_0^1 \{p(x) c_i \phi'_i(x) c_{i+1} \phi'_{i+1}(x) + q(x) c_i \phi_i(x) c_{i+1} \phi_{i+1}(x)\} dx \right] \\ &= \int_0^1 \{p(x) [\phi'(x)]^2 + q(x) [\phi(x)]^2\} dx. \end{aligned}$$

Por lo que, $\mathbf{c}^t \mathbf{A} \mathbf{c} \geq 0$ con igualdad si y sólo si $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Puesto que A también es simétrica, A es definida positiva.

Conjunto de ejercicios 12.1

1. El algoritmo de diferencias finitas de la ecuación de Poisson provee los siguientes resultados.

i	j	x_i	y_j	$w_{i,j}$	$u(x_i, y_j)$
1	1	0.5	0.5	0.0	0
1	2	0.5	1.0	0.25	0.25
1	3	0.5	1.5	1.0	1

3. El algoritmo de diferencias finitas de la ecuación de Poisson provee los siguientes resultados

a. 30 iteraciones requeridas:

i	j	x_i	y_j	$w_{i,j}$	$u(x_i, y_j)$
2	2	0.4	0.4	0.1599988	0.16
2	4	0.4	0.8	0.3199988	0.32
4	2	0.8	0.4	0.3199995	0.32
4	4	0.8	0.8	0.6399996	0.64

c. 126 iteraciones requeridas:

i	j	x_i	y_j	$w_{i,j}$	$u(x_i, y_j)$
4	3	0.8	0.3	1.2714468	1.2712492
4	7	0.8	0.7	1.7509414	1.7506725
8	3	1.6	0.3	1.6167917	1.6160744
8	7	1.6	0.7	3.0659184	3.0648542

b. 29 iteraciones requeridas:

i	j	x_i	y_j	$w_{i,j}$	$u(x_i, y_j)$
2	1	1.256637	0.3141593	0.2951855	0.2938926
2	3	1.256637	0.9424778	0.1830822	0.1816356
4	1	2.513274	0.3141593	-0.7721948	-0.7694209
4	3	2.513274	0.9424778	-0.4785169	-0.4755283

d. 127 iteraciones requeridas:

i	j	x_i	y_j	$w_{i,j}$	$u(x_i, y_j)$
2	2	1.2	1.2	0.5251533	0.5250861
4	4	1.4	1.4	1.3190830	1.3189712
6	6	1.6	1.6	2.4065150	2.4064186
8	8	1.8	1.8	3.8088995	3.8088576

5. El potencial aproximado en algunos puntos comunes provee los siguientes resultados.

i	j	x_i	y_j	$w_{i,j}$
1	4	0.1	0.4	88
2	1	0.2	0.1	66
4	2	0.4	0.2	66

7. Para incorporar el método SOR, realice los siguientes cambios al algoritmo 12.1:

Paso 1 Determine $h = (b - a)/n$;

$k = (d - c)/m$;

$\omega = 4 / \left(2 + \sqrt{4 - (\cos \pi/m)^2 - (\cos \pi/n)^2} \right)$;

$\omega_0 = 1 - \omega$;

En cada paso 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, y 16 después

determine ...

Inserte

determine $E = w_{\alpha,\beta} - z$;

si $(|E| > \text{NORM})$ entonces determine $\text{NORM} = |E|$;

determine $w_{\alpha,\beta} = \omega_0 E + z$.

donde α y β dependen del paso que se modifica.

Conjunto de ejercicios 12.2

1. El algoritmo de diferencias hacia atrás de la ecuación de calor provee los siguientes resultados.

a.

i	j	x_i	t_j	$w_{i,j}$	$u(x_i, t_j)$
1	1	0.5	0.05	0.632952	0.652037
2	1	1.0	0.05	0.895129	0.883937
3	1	1.5	0.05	0.632952	0.625037
1	2	0.5	0.1	0.566574	0.552493
2	2	1.0	0.1	0.801256	0.781344
3	2	1.5	0.1	0.566574	0.552493

3. El algoritmo de Crank-Nicholson provee los siguientes resultados.

a.

i	j	x_i	t_j	w_{ij}	$u(x_i, t_j)$
1	1	0.5	0.05	0.628848	0.652037
2	1	1.0	0.05	0.889326	0.883937
3	1	1.5	0.05	0.628848	0.625037
1	2	0.5	0.1	0.559251	0.552493
2	2	1.0	0.1	0.790901	0.781344
3	2	1.5	0.1	0.559252	0.552493

5. El algoritmo de diferencias hacia adelante provee los siguientes resultados.

a. Para $h = 0.4$ y $k = 0.1$:

i	j	x_i	t_j	w_{ij}	$u(x_i, t_j)$
2	5	0.8	0.5	3.035630	0
3	5	1.2	0.5	-3.035630	0
4	5	1.6	0.5	1.876122	0

Para $h = 0.4$ y $k = 0.05$:

i	j	x_i	t_j	w_{ij}	$u(x_i, t_j)$
2	10	0.8	0.5	0	0
3	10	1.2	0.5	0	0
4	10	1.6	0.5	0	0

b. Para $h = \frac{\pi}{10}$ y $k = 0.05$:

i	j	x_i	t_j	w_{ij}	$u(x_i, t_j)$
3	10	0.94247780	0.5	0.4926589	0.4906936
6	10	1.88495559	0.5	0.5791553	0.5768449
9	10	2.82743339	0.5	0.1881790	0.1874283

7. a. Para $h = 0.4$ y $k = 0.1$:

i	j	x_i	t_j	$w_{i,j}$	$u(x_i, t_j)$
2	5	0.8	0.5	-0.00258	0
3	5	1.2	0.5	0.00258	0
4	5	1.6	0.5	-0.00159	0

Para $h = 0.4$ y $k = 0.05$:

i	j	x_i	t_j	$w_{i,j}$	$u(x_i, t_j)$
2	10	0.8	0.5	-4.93×10^{-4}	0
3	10	1.2	0.5	4.93×10^{-4}	0
4	10	1.6	0.5	-3.05×10^{-4}	0

b. Para $h = \frac{\pi}{10}$ y $k = 0.05$:

i	j	x_i	t_j	$w_{i,j}$	$u(x_i, t_j)$
3	10	0.94247780	0.5	0.4986092	0.4906936
6	10	1.88495559	0.5	0.5861503	0.5768449
9	10	2.82743339	0.5	0.1904518	0.1874283

9. El algoritmo de Crank-Nicholson provee los siguientes resultados.

a. Para $h = 0.4$ y $k = 0.1$:

i	j	x_i	t_j	w_{ij}	$u(x_i, t_j)$
2	5	0.8	0.5	8.2×10^{-7}	0
3	5	1.2	0.5	-8.2×10^{-7}	0
4	5	1.6	0.5	5.1×10^{-7}	0

Para $h = 0.4$ y $k = 0.05$:

i	j	x_i	t_j	w_{ij}	$u(x_i, t_j)$
2	10	0.8	0.5	-2.6×10^{-6}	0
3	10	1.2	0.5	2.6×10^{-6}	0
4	10	1.6	0.5	-1.6×10^{-6}	0

b. Para $h = \frac{\pi}{10}$ y $k = 0.05$:

i	j	x_i	t_j	w_{ij}	$u(x_i, t_j)$
3	10	0.94247780	0.5	0.4926589	0.4906936
6	10	1.88495559	0.5	0.5791553	0.5768449
9	10	2.82743339	0.5	0.1881790	0.1874283

11. a. El uso de $h = 0.4$ y $k = 0.1$ conduce a resultados sin sentido. Al usar $h = 0.4$ y $k = 0.05$ de nuevo obtenemos respuestas sin sentido. Al determinar $h = 0.4$ y $k = 0.005$ se produce lo siguiente:

i	j	x_i	t_j	w_{ij}
1	100	0.4	0.5	-165.405
2	100	0.8	0.5	267.613
3	100	1.2	0.5	-267.613
4	100	1.6	0.5	165.405

b.

i	j	x_i	t_j	$w(x_{ij})$
3	10	0.94247780	0.5	0.46783396
6	10	1.88495556	0.5	0.54995267
9	10	2.82743334	0.5	0.17871220

13. a. La temperatura aproximada en algunos puntos comunes se proporciona en la tabla.

i	j	r_i	t_j	$w_{i,j}$
1	20	0.6	10	137.6753
2	20	0.7	10	245.9678
3	20	0.8	10	340.2862
4	20	0.9	10	424.1537

b. La tensión es aproximadamente $I = 1242.537$.

15. Tenemos

$$a_{11}v_1^{(i)} + a_{12}v_2^{(i)} = (1 - 2\lambda) \operatorname{sen} \frac{i\pi}{m} + \lambda \operatorname{sen} \frac{2\pi i}{m}$$

y

$$\begin{aligned} \mu_i v_1^{(i)} &= \left[1 - 4\lambda \left(\operatorname{sen} \frac{i\pi}{2m} \right)^2 \right] \operatorname{sen} \frac{i\pi}{m} = \left[1 - 4\lambda \left(\operatorname{sen} \frac{i\pi}{2m} \right)^2 \right] \left(2 \operatorname{sen} \frac{i\pi}{2m} \cos \frac{i\pi}{2m} \right) \\ &= 2 \operatorname{sen} \frac{i\pi}{2m} \cos \frac{i\pi}{2m} - 8\lambda \left(\operatorname{sen} \frac{i\pi}{2m} \right)^3 \cos \frac{i\pi}{2m}. \end{aligned}$$

Sin embargo,

$$\begin{aligned} (1 - 2\lambda) \operatorname{sen} \frac{i\pi}{m} + \lambda \operatorname{sen} \frac{2\pi i}{m} &= 2(1 - 2\lambda) \operatorname{sen} \frac{i\pi}{2m} \cos \frac{i\pi}{2m} + 2\lambda \operatorname{sen} \frac{i\pi}{m} \cos \frac{i\pi}{m} \\ &= 2(1 - 2\lambda) \operatorname{sen} \frac{i\pi}{2m} \cos \frac{i\pi}{2m} \\ &\quad + 2\lambda \left[2 \operatorname{sen} \frac{i\pi}{2m} \cos \frac{i\pi}{2m} \right] \left[1 - 2 \left(\operatorname{sen} \frac{i\pi}{2m} \right)^2 \right] \\ &= 2 \operatorname{sen} \frac{i\pi}{2m} \cos \frac{i\pi}{2m} - 8\lambda \cos \frac{i\pi}{2m} \left[\operatorname{sen} \frac{i\pi}{2m} \right]^3. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$a_{11}v_1^{(i)} + a_{12}v_2^{(i)} = \mu_i v_1^{(i)}.$$

Además,

$$\begin{aligned} a_{j,j-1}v_{j-1}^{(i)} + a_{j,j}v_j^{(i)} + a_{j,j+1}v_{j+1}^{(i)} &= \lambda \operatorname{sen} \frac{i(j-1)\pi}{m} + (1 - 2\lambda) \operatorname{sen} \frac{ij\pi}{m} + \lambda \operatorname{sen} \frac{i(j+1)\pi}{m} \\ &= \lambda \left(\operatorname{sen} \frac{ij\pi}{m} \cos \frac{i\pi}{m} - \operatorname{sen} \frac{i\pi}{m} \cos \frac{ij\pi}{m} \right) + (1 - 2\lambda) \operatorname{sen} \frac{ij\pi}{m} \\ &\quad + \lambda \left(\operatorname{sen} \frac{ij\pi}{m} \cos \frac{i\pi}{m} + \operatorname{sen} \frac{i\pi}{m} \cos \frac{ij\pi}{m} \right) \\ &= \operatorname{sen} \frac{ij\pi}{m} - 2\lambda \operatorname{sen} \frac{ij\pi}{m} + 2\lambda \operatorname{sen} \frac{ij\pi}{m} \cos \frac{i\pi}{m} \\ &= \operatorname{sen} \frac{ij\pi}{m} + 2\lambda \operatorname{sen} \frac{ij\pi}{m} \left(\cos \frac{i\pi}{m} - 1 \right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mu_i v_j^{(i)} &= \left[1 - 4\lambda \left(\operatorname{sen} \frac{i\pi}{2m} \right)^2 \right] \operatorname{sen} \frac{ij\pi}{m} = \left[1 - 4\lambda \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{i\pi}{m} \right) \right] \operatorname{sen} \frac{ij\pi}{m} \\ &= \left[1 + 2\lambda \left(\cos \frac{i\pi}{m} - 1 \right) \right] \operatorname{sen} \frac{ij\pi}{m}, \end{aligned}$$

por lo que

$$a_{j,j-1}v_{j-1}^{(i)} + a_{j,j}v_j^{(i)} + a_{j,j+1}v_{j+1}^{(i)} = \mu_i v_j^{(i)}.$$

De igual forma,

$$a_{m-2,m-1}v_{m-2}^{(i)} + a_{m-1,m-1}v_{m-1}^{(i)} = \mu_i v_{m-1}^{(i)},$$

Por lo que $A\mathbf{v}^{(i)} = \mu_i \mathbf{v}^{(i)}$.

17. Para modificar el algoritmo 12.2, modifique lo siguiente:

Paso 7 Determine

$$t = jk;$$

$$z_1 = (w_1 + kF(h))/l_1.$$

Paso 8 Para $i = 2, \dots, m - 1$ determine

$$z_i = (w_i + kF(ih) + \lambda z_{i-1})/l_i.$$

Para modificar el algoritmo 12.3, modifique lo siguiente:

Paso 7 Determine

$$t = jk;$$

$$z_1 = \left[(1 - \lambda)w_1 + \frac{\lambda}{2}w_2 + kF(h) \right] / l_1.$$

Paso 8 Para $i = 2, \dots, m - 1$ Determine

$$z_i = \left[(1 - \lambda)w_i + \frac{\lambda}{2}(w_{i+1} + w_{i-1} + z_{i-1}) + kF(ih) \right] / l_i.$$

19. Para modificar el algoritmo 12.2, modifique lo siguiente:

Paso 7 Determine

$$t = jk;$$

$$w_0 = \phi(t);$$

$$z_1 = (w_1 + \lambda w_0)/l_1.$$

$$w_m = \psi(t).$$

Paso 8 Para $i = 2, \dots, m - 2$ determine

$$z_i = (w_i + \lambda z_{i-1})/l_i;$$

Determine

$$z_{m-1} = (w_{m-1} + \lambda w_m + \lambda z_{m-2})/l_{m-1}.$$

Paso 11 SALIDA (t) ;

Para $i = 0, \dots, m$ determine $x = ih$;

SALIDA (x, w_i) .

Para modificar el algoritmo 12.3, modifique lo siguiente:

Paso 1 Determine

$$h = l/m;$$

$$k = T/N;$$

$$\lambda = \alpha^2 k / h^2;$$

$$w_m = \psi(0);$$

$$w_0 = \phi(0).$$

Paso 7 Determine

$$t = jk;$$

$$z_1 = \left[(1 - \lambda)w_1 + \frac{\lambda}{2}w_2 + \frac{\lambda}{2}w_0 + \frac{\lambda}{2}\phi(t) \right] / l_1;$$

$$w_0 = \phi(t).$$

Paso 8 Para $i = 2, \dots, m - 2$ determine

$$z_i = \left[(1 - \lambda)w_i + \frac{\lambda}{2}(w_{i+1} + w_{i-1} + z_{i-1}) \right] / l_i;$$

Determine

$$z_{m-1} = \left[(1 - \lambda)w_{m-1} + \frac{\lambda}{2}(w_m + w_{m-2} + z_{m-2} + \psi(t)) \right] / l_{m-1};$$

$$w_m = \psi(t).$$

Paso 11 SALIDA (t) ;
 Para $i = 0, \dots, m$ determine $x = ih$;
 SALIDA (x, w_i) .

Conjunto de ejercicios 12.3

1. El algoritmo de diferencias finitas de la ecuación de onda provee los siguientes resultados.

i	j	x_i	t_j	w_{ij}	$u(x_i, t_j)$
2	4	0.25	1.0	-0.7071068	-0.7071068
3	4	0.50	1.0	-1.0000000	-1.0000000
4	4	0.75	1.0	-0.7071068	-0.7071068

3. El algoritmo de diferencias finitas de la ecuación de onda con $h = \frac{\pi}{10}$ y $k = 0.05$ provee los siguientes resultados.

i	j	x_i	t_j	w_{ij}	$u(x_i, t_j)$
2	10	$\frac{\pi}{5}$	0.5	0.5163933	0.5158301
5	10	$\frac{\pi}{2}$	0.5	0.8785407	0.8775826
8	10	$\frac{4\pi}{5}$	0.5	0.5163933	0.5158301

El algoritmo de diferencias finitas de la ecuación de onda con $h = \frac{\pi}{20}$ y $k = 0.1$ provee los siguientes resultados.

i	j	x_i	t_j	w_{ij}
4	5	$\frac{\pi}{5}$	0.5	0.5159163
10	5	$\frac{\pi}{2}$	0.5	0.8777292
16	5	$\frac{4\pi}{5}$	0.5	0.5159163

El algoritmo de diferencias finitas de la ecuación de onda con $h = \frac{\pi}{20}$ y $k = 0.05$ provee los siguientes resultados.

i	j	x_i	t_j	w_{ij}
4	10	$\frac{\pi}{5}$	0.5	0.5159602
10	10	$\frac{\pi}{2}$	0.5	0.8778039
16	10	$\frac{4\pi}{5}$	0.5	0.5159602

5. El algoritmo de diferencias finitas de la ecuación de onda provee los siguientes resultados.

i	j	x_i	t_j	w_{ij}	$u(x_i, t_j)$
2	3	0.2	0.3	0.6729902	0.61061587
5	3	0.5	0.3	0	0
8	3	0.8	0.3	-0.6729902	-0.61061587

7. a. La presión del aire para la tubería abierta es $p(0.5, 0.5) \approx 0.9$ y $p(0.5, 1.0) \approx 2.7$.
 b. La presión del aire para la tubería cerrada es $p(0.5, 0.5) \approx 0.9$ y $p(0.5, 1.0) \approx 0.9187927$.

Conjunto de ejercicios 12.4

1. Con $E_1 = (0.25, 0.75)$, $E_2 = (0, 1)$, $E_3 = (0.5, 0.5)$, y $E_4 = (0, 0.5)$, las funciones de base son

$$\phi_1(x, y) = \begin{cases} 4x & \text{en } T_1 \\ -2 + 4y & \text{en } T_2, \end{cases}$$

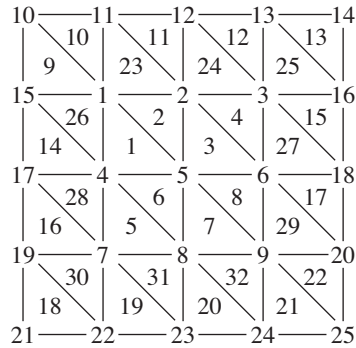
$$\phi_2(x, y) = \begin{cases} -1 - 2x + 2y & \text{en } T_1 \\ 0 & \text{en } T_2, \end{cases}$$

$$\phi_3(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{en } T_1 \\ 1 + 2x - 2y & \text{en } T_2, \end{cases}$$

$$\phi_4(x, y) = \begin{cases} 2 - 2x - 2y & \text{en } T_1 \\ 2 - 2x - 2y & \text{en } T_2, \end{cases}$$

y $\gamma_1 = 0.323825$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1.0000$, y $\gamma_4 = 0$.

3. El algoritmo de elementos finitos con $K = 8$, $N = 8$, $M = 32$, $n = 9$, $m = 25$, y $NL = 0$ provee los siguientes resultados, donde el etiquetado se muestra en el siguiente diagrama.



$$\gamma_1 = 0.511023$$

$$\gamma_2 = 0.720476$$

$$\gamma_3 = 0.507899$$

$$\gamma_4 = 0.720476$$

$$\gamma_5 = 1.01885$$

$$\gamma_6 = 0.720476$$

$$\gamma_7 = 0.507896$$

$$\gamma_8 = 0.720476$$

$$\gamma_9 = 0.511023$$

$$\gamma_i = 0 \quad 10 \leq i \leq 25$$

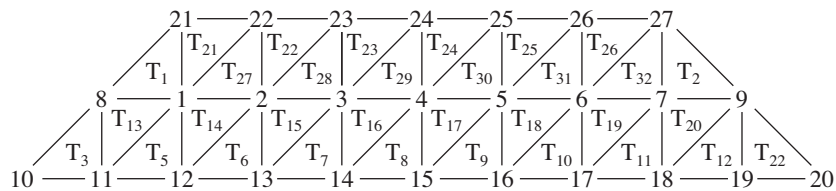
$$u(0.125, 0.125) \approx 0.614187$$

$$u(0.125, 0.25) \approx 0.690343$$

$$u(0.25, 0.125) \approx 0.690343$$

$$u(0.25, 0.25) \approx 0.720476$$

5. El algoritmo de elementos finitos con $K = 0$, $N = 12$, $M = 32$, $n = 20$, $m = 27$, y $NL = 14$ provee los siguientes resultados, donde el etiquetado se muestra en el diagrama.



$\gamma_1 = 21.40335$	$\gamma_8 = 24.19855$	$\gamma_{15} = 20.23334$	$\gamma_{22} = 15$
$\gamma_2 = 19.87372$	$\gamma_9 = 24.16799$	$\gamma_{16} = 20.50056$	$\gamma_{23} = 15$
$\gamma_3 = 19.10019$	$\gamma_{10} = 27.55237$	$\gamma_{17} = 21.35070$	$\gamma_{24} = 15$
$\gamma_4 = 18.85895$	$\gamma_{11} = 25.11508$	$\gamma_{18} = 22.84663$	$\gamma_{25} = 15$
$\gamma_5 = 19.08533$	$\gamma_{12} = 22.92824$	$\gamma_{19} = 24.98178$	$\gamma_{26} = 15$
$\gamma_6 = 19.84115$	$\gamma_{13} = 21.39741$	$\gamma_{20} = 27.41907$	$\gamma_{27} = 15$
$\gamma_7 = 21.34694$	$\gamma_{14} = 20.52179$	$\gamma_{21} = 15$	

$$u(1, 0) \approx 22.92824$$

$$u(4, 0) \approx 22.84663$$

$$u\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 18.85895$$