Capítulo 4

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.1

1. Utilice las fórmulas de diferencias hacia adelante y de diferencias hacia atrás para determinar todas las entradas faltantes en las siguientes tablas.

a.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.5	0.4794	
0.6	0.5646	
0.7	0.6442	

b.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.0	0.00000	
0.2	0.74140	
0.4	1.3718	

2. Utilice las fórmulas de diferencias hacia adelante y de diferencias hacia atrás para determinar todas las entradas faltantes en las siguientes tablas.

a.

x	$f(x)$	$f'(x)$
−0.3	1.9507	
−0.1	2.0421	
−0.1	2.0601	

b.

x	$f(x)$	$f'(x)$
1.0	1.0000	
1.2	1.2625	
1.4	1.6595	

3. Los datos en el ejercicio 1 se tomaron de las siguientes funciones. Calcule los errores reales en el ejercicio 1 y encuentre cotas de error mediante las fórmulas de error.

a. $f(x) = \operatorname{sen} x$ **b.** $f(x) = e^x - 2x^2 + 3x - 1$

4. Los datos en el ejercicio 2 se tomaron de las siguientes funciones. Calcule los errores reales en el ejercicio 2 y encuentre cotas de error mediante las fórmulas de error.

a. $f(x) = 2\cos 2x - x$ **b.** $f(x) = x^2 \ln x + 1$

5. Utilice la fórmula de tres puntos más adecuada para determinar todas las entradas faltantes en las siguientes tablas.

a.

x	$f(x)$	$f'(x)$
1.1	9.025013	
1.2	11.02318	
1.3	13.46374	
1.4	16.44465	

b.

x	$f(x)$	$f'(x)$
8.1	16.94410	
8.3	17.56492	
8.5	18.19056	
8.7	18.82091	

c.

x	$f(x)$	$f'(x)$
2.9	−4.827866	
3.0	−4.240058	
3.1	−3.496909	
3.2	−2.596792	

d.

x	$f(x)$	$f'(x)$
2.0	3.6887983	
2.1	3.6905701	
2.2	3.6688192	
2.3	3.6245909	

6. Use la fórmula de tres puntos más adecuada para determinar todas las entradas faltantes en las siguientes tablas.

a.

x	$f(x)$	$f'(x)$
−0.3	−0.27652	
−0.2	−0.25074	
−0.1	−0.16134	
0	0	

b.

x	$f(x)$	$f'(x)$
7.4	−68.3193	
7.6	−71.6982	
7.8	−75.1576	
8.0	−78.6974	

c.

x	$f(x)$	$f'(x)$
1.1	1.52918	
1.2	1.64024	
1.3	1.70470	
1.4	1.71277	

d.

x	$f(x)$	$f'(x)$
−2.7	0.054797	
−2.5	0.11342	
−2.3	0.65536	
−2.1	0.98472	

7. Los datos en el ejercicio 5 se tomaron de las siguientes funciones. Calcule los errores reales en el ejercicio 5 y encuentre cotas de error mediante las fórmulas de error.

a. $f(x) = e^{2x}$ **b.** $f(x) = x \ln x$

c. $f(x) = x \cos x - x^2 \operatorname{sen} x$ **d.** $f(x) = 2(\ln x)^2 + 3 \operatorname{sen} x$

8. Los datos en el ejercicio 6 se tomaron de las siguientes funciones. Calcule los errores reales en el ejercicio 6 y encuentre cotas de error mediante las fórmulas de error.

a. $f(x) = e^{2x} - \cos 2x$ **b.** $f(x) = \ln(x+2) - (x+1)^2$

c. $f(x) = x \operatorname{sen} x + x^2 \cos x$ **d.** $f(x) = (\cos 3x)^2 - e^{2x}$

9. Use las fórmulas provistas en esta sección para determinar, con tanta precisión como sea posible, las aproximaciones para todas las entradas faltantes en las siguientes tablas.

a.

x	$f(x)$	$f'(x)$
2.1	−1.709847	
2.2	−1.373823	
2.3	−1.119214	
2.4	−0.9160143	
2.5	−0.7470223	
2.6	−0.6015966	

b.

x	$f(x)$	$f'(x)$
−3.0	9.367879	
−2.8	8.233241	
−2.6	7.180350	
−2.4	6.209329	
−2.2	5.320305	
−2.0	4.513417	

10. Use las fórmulas provistas en esta sección para determinar, con tanta precisión como sea posible, las aproximaciones para todas las entradas faltantes en las siguientes tablas.

a.

x	$f(x)$	$f'(x)$
1.05	−1.709847	
1.10	−1.373823	
1.15	−1.119214	
1.20	−0.9160143	
1.25	−0.7470223	
1.30	−0.6015966	

b.

x	$f(x)$	$f'(x)$
−3.0	16.08554	
−2.8	12.64465	
−2.6	9.863738	
−2.4	7.623176	
−2.2	5.825013	
−2.0	4.389056	

11. Los datos en el ejercicio 9 se tomaron de las siguientes funciones. Calcule los errores reales en el ejercicio 9 y encuentre cotas de error mediante las fórmulas de error.

a. $f(x) = \tan x$ **b.** $f(x) = e^{x/3} + x^2$

12. Los datos en el ejercicio 10 se tomaron de las siguientes funciones. Calcule los errores reales en el ejercicio 10 y encuentre cotas de error mediante las fórmulas de error.

a. $f(x) = \tan 2x$ **b.** $f(x) = e^{-x} - 1 + x$

13. Use los siguientes datos y el conocimiento de que las primeras cinco derivadas de f están acotadas en $[1, 5]$ por 2, 3, 6, 12 y 23, respectivamente, para aproximar $f'(3)$, con tanta precisión como sea posible. Encuentre una cota para el error.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2.4142	2.6734	2.8974	3.0976	3.2804

14. Repita el ejercicio 13, suponiendo, por el contrario, que la tercera derivada de f está acotada en $[1, 5]$ por 4.

15. Repita el ejercicio 1 mediante aritmética de redondeo de cuatro dígitos y compare los errores con los del ejercicio 3.

16. Repita el ejercicio 5 mediante aritmética de redondeo de cuatro dígitos y compare los errores con los del ejercicio 7.

17. Repita el ejercicio 9 mediante aritmética de redondeo de cuatro dígitos y compare los errores con los del ejercicio 11.

18. Considere la siguiente tabla de datos:

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	0.9798652	0.9177710	0.808038	0.6386093	0.3843735

a. Utilice todas las fórmulas apropiadas dadas en esta sección para aproximar $f'(0.4)$ y $f''(0.4)$.

b. Utilice todas las fórmulas apropiadas dadas en esta sección para aproximar $f'(0.6)$ y $f''(0.6)$.

19. Si $f(x) = \cos \pi x$. Utilice la ecuación (4.9) y los valores $f(x)$ para $x = 0.25, 0.5,$ y 0.75 para aproximar $f''(0.5)$. Compare este resultado con el valor exacto y con la aproximación encontrada en el ejercicio 15 de la sección 3.5. Explique por qué este método es especialmente preciso para este problema y encuentre una cota para el error.

20. Sea $f(x) = 3xe^x - \cos x$. Utilice los siguientes datos y la ecuación (4.9) para aproximar $f''(1.3)$ con $h = 0.1$ y con $h = 0.001$.

x	1.20	1.29	1.30	1.31	1.40
$f(x)$	11.59006	13.78176	14.04276	14.30741	16.86187

Compare sus resultados con $f''(1.3)$.

21. Considere la siguiente tabla de datos:

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	0.9798652	0.9177710	0.8080348	0.6386093	0.3843735

a. Use la ecuación (4.7) para aproximar $f'(0.2)$.

b. Use la eciación (4.7) para aproximar $f'(1.0)$.

c. Use la ecuación (4.6) para aproximar $f'(0.6)$.

EJERCICIOS APLICADOS

22. En un circuito con voltaje $\mathcal{E}(t)$ e inductancia L, la primera ley de Kirchhoff provee la relación

$$\mathcal{E}(t) = L\frac{di}{dt} + Ri,$$

donde R es la resistencia en el circuito e i es la corriente. Suponga que medimos la corriente para varios valores de t y obtenemos

t	1.00	1.01	1.02	1.03	1.0
i	3.10	3.12	3.14	3.18	3.24

donde t se mide en segundos, i está en amperes, la inductancia L es una constante de 0.98 henrios y la resistencia es 0.142 ohms. Aproxime el valor $\mathcal{E}(t)$ cuando $t = 1.00, 1.01, 1.02, 1.03,$ y 1.04.

23. En el ejercicio 9 de la sección 3.4, se proporcionaron datos que describen un automóvil que viaja por un camino recto. Ese problema pedía predecir la posición y la velocidad del automóvil cuando $t = 10$ segundos. Utilice los siguientes tiempos y posiciones para predecir la velocidad en cada tiempo listado.

Tiempo	0	3	5	8	10	13
Distancia	0	225	383	623	742	993

EJERCICIOS TEÓRICOS

24. Deduzca el error en una fórmula de cinco puntos $O(h^4)$ para aproximar $f'(x_0)$ que usa $f(x_0 - h)$, $f(x_0)$, $f(x_0 + h)$, $f(x_0 + 2h)$, y $f(x_0 + 3h)$. [*Sugerencia:* Considere la expresión $Af(x_0 - h) + Bf(x_0 + h) + Cf(x_0 + 2h) + Df(x_0 + 3h)$. Expanda f en el cuarto polinomio de Taylor y seleccione A, B, C y D adecuadamente.]

25. Use la fórmula derivada en el ejercicio 24 y los datos en el ejercicio 21 para aproximar $f'(0.4)$ y $f'(0.8)$.

26. **a.** Analice los errores de redondeo, como en el ejemplo 4, para la fórmula

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi_0).$$

b. Encuentre una $h > 0$ óptima para la función dada en el ejemplo 2.

27. Todos los estudiantes de cálculo saben que la derivada de una función f en x se puede definir como

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Seleccione su función f favorita, un número x diferente a cero y computador o calculadora. Genere aproximaciones $f_n'(x)$ para $f'(x)$ mediante

$$f_n'(x) = \frac{f(x+10^{-n}) - f(x)}{10^{-n}},$$

para $n = 1, 2, \ldots, 20,$ y describa lo que pasa.

28. Deduzca un método para aproximar $f'''(x_0)$ cuyo término de error sea del orden h^2 expandiendo la función f en un cuarto polinomio de Taylor alrededor de x_0 y evalúe en $x_0 \pm h$ y $x_0 \pm 2h$.

29. Considere la función

$$e(h) = \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6}M,$$

donde M es una cota para la tercera derivada de una función. Muestre que $e(h)$ tiene un mínimo en $\sqrt[3]{3\varepsilon/M}$.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. En esta sección, usted estudió una variedad de fórmulas para aproximar las derivadas. Compare y contraste estas fórmulas y su medida de error. ¿Cómo sabe cuál fórmula usar?

2. Deduzca un método para aproximar $f(x_0)$ cuyo término de error es del orden h^2 al expandir la función de f en el cuarto polinomio de Taylor alrededor de x_0 y evalúe en $x_0 + 2h$.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.2

1. Aplique el proceso de extrapolación descrito en el ejemplo 1 para determinar $N_3(h)$, una aproximación para $f'(x_0)$, para las funciones y los tamaños de paso siguientes.

a. $f(x) = \ln x, x_0 = 1.0, h = 0.4$

b. $f(x) = x + e^x, x_0 = 0.0, h = 0.4$

c. $f(x) = 2^x \operatorname{sen} x, x_0 = 1.05, h = 0.4$

d. $f(x) = x^3 \cos x, x_0 = 2.3, h = 0.4$

2. Añada otra línea a la tabla de extrapolación en el ejercicio 1 para obtener la aproximación $N_4(h)$.

3. Repita el ejercicio 1 mediante aritmética de redondeo de cuatro dígitos.

4. Repita el ejercicio 2 mediante aritmética de redondeo de cuatro dígitos.

5. Los siguientes datos dan aproximaciones para la integral

$$M = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx.$$

$$N_1(h) = 1.570796, \quad N_1\left(\frac{h}{2}\right) = 1.896119, \quad N_1\left(\frac{h}{4}\right) = 1.974232, \quad N_1\left(\frac{h}{8}\right) = 1.993570.$$

Al suponer que $M = N_1(h) + K_1h^2 + K_2h^4 + K_3h^6 + K_4h^8 + O(h^{10})$, construya una tabla de extrapolación para determinar $N_4(h)$.

6. Los siguientes datos se pueden usar para aproximar la integral

$$M = \int_0^{3\pi/2} \cos x \, dx.$$

$$N_1(h) = 2.356194, \qquad N_1\left(\frac{h}{2}\right) = -0.4879837,$$

$$N_1\left(\frac{h}{4}\right) = -0.8815732, \quad N_1\left(\frac{h}{8}\right) = -0.9709157.$$

Suponga que existe una fórmula del tipo dado en el ejercicio 5 y determine $N_4(h)$.

EJERCICIOS TEÓRICOS

7. Muestre que la fórmula de cinco puntos en la ecuación (4.6) aplicada para $f(x) = xe^x$ en $x_0 = 2.0$ da $N_2(0.2)$ en la tabla 4.6 cuando $h = 0.1$ y $N_2(0.1)$ cuando $h = 0.05$.
8. La fórmula de diferencias hacia adelante se puede expresar como

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}[f(x_0+h) - f(x_0)] - \frac{h}{2}f''(x_0) - \frac{h^2}{6}f'''(x_0) + O(h^3).$$

Utilice la extrapolación para derivar una fórmula $O(h^3)$ para $f'(x_0)$.
9. Suponga que $N(h)$ es una aproximación para M para cada $h > 0$ y que

$$M = N(h) + K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + \cdots,$$

para algunas constantes $K_1, K_2, K_3, \ldots$. Use los valores $N(h)$, $N\left(\frac{h}{3}\right)$, y $N\left(\frac{h}{9}\right)$ para producir una aproximación $O(h^3)$ para M.
10. Suponga que $N(h)$ es una aproximación para M para cada $h > 0$ y que

$$M = N(h) + K_1h^2 + K_2h^4 + K_3h^6 + \cdots,$$

para algunas constantes $K_1, K_2, K_3, \ldots$. Use los valores $N(h)$, $N\left(\frac{h}{3}\right)$, y $N\left(\frac{h}{9}\right)$ para producir una aproximación $O(h^6)$ para M.
11. En cálculo, aprendemos que $e = \text{lím}_{h\to 0}(1+h)^{1/h}$.
   a. Determine aproximaciones para e correspondientes a $h = 0.04, 0.02$, y 0.01.
   b. Use la extrapolación en las aproximaciones, suponiendo que las constantes $K_1, K_2, \ldots$, existen con $e = (1+h)^{1/h} + K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + \cdots$, para producir una aproximación $O(h^3)$ para e, donde $h = 0.04$.
   c. ¿Cree que la suposición en la parte b) es correcta?
12. **a.** Muestre que

$$\text{lím}_{h\to 0}\left(\frac{2+h}{2-h}\right)^{1/h} = e.$$

   b. Calcule aproximaciones para e mediante la fórmula $N(h) = \left(\frac{2+h}{2-h}\right)^{1/h}$, para $h = 0.04, 0.02$, y 0.01.
   c. Suponga que $e = N(h) + K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + \cdots$. Use la extrapolación por lo menos con 16 dígitos de precisión para calcular una aproximación $O(h^3)$ para e con $h = 0.04$. ¿Cree que la suposición es correcta?
   d. Muestre que $N(-h) = N(h)$.
   e. Use la parte d) para mostrar que $K_1 = K_3 = K_5 = \cdots = 0$ en la fórmula

$$e = N(h) + K_1h + K_2h^2 + K_3h^3K_4h^4 + K_5h^5 + \cdots$$

   de tal forma que la fórmula se reduce a

$$e = N(h) + K_2h^2 + K_4h^4 + K_6h^6 + \cdots.$$

   f. Use los resultados de la parte e) y la extrapolación para calcular una aproximación $O(h^6)$ para e con $h = 0.04$.
13. Suponga que la siguiente tabla de extrapolación se ha construido para aproximar el número M con $M = N_1(h) + K_1h^2 + K_2h^4 + K_3h^6$:

$N_1(h)$		
$N_1\left(\frac{h}{2}\right)$	$N_2(h)$	
$N_1\left(\frac{h}{4}\right)$	$N_2\left(\frac{h}{2}\right)$	$N_3(h)$

   a. Muestre que el polinomio de interpolación lineal $P_{0,1}(h)$ a través de $(h^2, N_1(h))$ y $(h^2/4, N_1(h/2))$ satisface $P_{0,1}(0) = N_2(h)$. De igual forma, muestre que $P_{1,2}(0) = N_2(h/2)$.
   b. Muestre que el polinomio de interpolación lineal $P_{0,2}(h)$ a través de $(h^4, N_2(h))$ y $(h^4/16, N_2(h/2))$ satisface $P_{0,2}(0) = N_3(h)$.

14. Suponga que $N_1(h)$ es una fórmula que produce aproximaciones $O(h)$ para un número M y que

$$M = N_1(h) + K_1 h + K_2 h^2 + \cdots,$$

para un conjunto de constantes positivas $K_1, K_2, \ldots$. Entonces $N_1(h), N_1((h/2), N_1((h/4), \ldots$ son todos cotas inferiores para M. ¿Qué se puede decir sobre las aproximaciones $N_2(h), N_3(h), \ldots$ extrapoladas?

15. Los semiperímetros de polígonos regulares con k lados que inscriben y circunscriben el círculo de unidad utilizado por Arquímedes antes de 200 a.C., para aproximar π, la circunferencia de un semicírculo. La geometría se puede utilizar para mostrar que la secuencia de semiperímetros inscritos y circunscritos $\{p_k\}$ y $\{P_k\}$, respectivamente, satisfacen

$$p_k = k \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{k}\right) \quad \text{y} \quad P_k = k \tan\left(\frac{\pi}{k}\right),$$

con $p_k < \pi < P_k$, siempre que $k \geq 4$.

a. Muestre que $p_4 = 2\sqrt{2}$ y $P_4 = 4$.

b. Muestre que para $k \geq 4$, las secuencias satisfacen las relaciones de recurrencia

$$P_{2k} = \frac{2 p_k P_k}{p_k + P_k} \quad \text{y} \quad p_{2k} = \sqrt{p_k P_{2k}}.$$

c. Aproxime π dentro de 10^{-4} al calcular p_k y P_k hasta que $P_k - p_k < 10^{-4}$.

d. Use la serie de Taylor para mostrar que

$$\pi = p_k + \frac{\pi^3}{3!}\left(\frac{1}{k}\right)^2 - \frac{\pi^5}{5!}\left(\frac{1}{k}\right)^4 + \cdots$$

y

$$\pi = P_k - \frac{\pi^3}{3}\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \frac{2\pi^5}{15}\left(\frac{1}{k}\right)^4 - \cdots.$$

e. Use la extrapolación con $h = 1/k$ para mejorar la aproximación de π.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. ¿Cómo se puede aplicar la extrapolación de Richardson a la integración? ¿Cómo afecta esta aplicación la medición del error?

2. Si la extrapolación de Richardson se aplica a un procedimiento inestable, tal como la diferenciación numérica, ¿la inestabilidad mostrada en la tabla de extrapolación se volverá más pequeña conforme h disminuye?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.3

1. Aproxime las siguientes integrales usando la regla trapezoidal.

a. $\displaystyle\int_{0.5}^{1} x^4\, dx$

b. $\displaystyle\int_{0}^{0.5} \frac{2}{x-4}\, dx$

c. $\displaystyle\int_{1}^{1.5} x^2 \ln x\, dx$

d. $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2 e^{-x}\, dx$

e. $\displaystyle\int_{1}^{1.6} \frac{2x}{x^2-4}\, dx$

f. $\displaystyle\int_{0}^{0.35} \frac{2}{x^2-4}\, dx$

g. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} x \operatorname{sen} x\, dx$

h. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} e^{3x} \operatorname{sen} 2x\, dx$

2. Aproxime las siguientes integrales con la regla trapezoidal.

a. $\int_{-0.25}^{0.25} (\cos x)^2 \, dx$ **b.** $\int_{-0.5}^{0} x \ln(x+1) \, dx$

c. $\int_{0.75}^{1.3} \left((\text{sen } x)^2 - 2x \text{ sen } x + 1\right) \, dx$ **d.** $\int_{e}^{e+1} \frac{1}{x \ln x} \, dx$

3. Encuentre una cota para el error en el ejercicio 1 con la fórmula de error y compárela con el error real.

4. Encuentre una cota para el error en el ejercicio 2 por medio de la fórmula de error y compárela con el error real.

5. Repita el ejercicio 1 con la regla de Simpson.

6. Repita el ejercicio 2 con la regla de Simpson.

7. Repita el ejercicio 3 con la regla de Simpson y los resultados del ejercicio 5.

8. Repita el ejercicio 4 con la regla de Simpson y los resultados del ejercicio 6.

9. Repita el ejercicio 1 con la regla del punto medio.

10. Repita el ejercicio 2 con la regla del punto medio.

11. Repita el ejercicio 3 con la regla del punto medio y los resultados del ejercicio 9.

12. Repita el ejercicio 4 con la regla del punto medio y los resultados del ejercicio 10.

13. La regla trapezoidal aplicada a $\int_0^2 f(x)\,dx$ da el valor de 4 y la regla de Simpson da el valor de 2. ¿Cuál es $f(1)$?

14. La regla trapezoidal aplicada a $\int_0^2 f(x)\,dx$ da el valor de 5, y la regla del punto medio da el valor de 4. ¿Qué valor da la regla de Simpson?

15. Aproxime las siguientes integrales con las fórmulas (4.25) a (4.32). ¿Las precisiones de las aproximaciones son consistentes con las fórmulas de error?

a. $\int_0^{0.1} \sqrt{1+x} \, dx$ **b.** $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 \, dx$

c. $\int_{1.1}^{1.5} e^x \, dx$ **d.** $\int_0^1 x^{1/3} \, dx$

16. Aproxime las siguientes integrales con las fórmulas (4.25) a (4.32). ¿Las precisiones de las aproximaciones son consistentes con las fórmulas de error? ¿Cuáles partes c) y d) dan la mejor aproximación?

a. $\int_2^{2.5} \frac{(\ln x)^3}{3x} \, dx$ **b.** $\int_{0.5}^{1} 5xe^{3x^2} \, dx$

c. $\int_1^{10} \frac{1}{x} \, dx$ **d.** $\int_1^{5.5} \frac{1}{x} \, dx + \int_{5.5}^{10} \frac{1}{x} \, dx$

17. Dada la función f en los siguientes valores,

x	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$f(x)$	3.12014	4.42569	6.04241	8.03014	10.46675

aproxime $\int_{1.8}^{2.6} f(x)\,dx$ usando todas las fórmulas adecuadas de cuadratura de esta sección.

18. Suponga que los datos del ejercicio 17 tienen errores de redondeo determinados por la siguiente tabla.

x	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
Error en $f(x)$	2×10^{-6}	-2×10^{-6}	-0.9×10^{-6}	-0.9×10^{-6}	2×10^{-6}

Calcule los errores debidos al redondeo en el ejercicio 17.

EJERCICIOS TEÓRICOS

19. Encuentre el grado de precisión de la fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

20. Sea $h = (b - a)/3$, $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, y $x_2 = b$. Encuentre el grado de precisión de la fórmula de cuadratura

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{9}{4}hf(x_1) + \frac{3}{4}hf(x_2).$$

21. La fórmula de cuadratura $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = c_0 f(-1) + c_1 f(0) + c_2 f(1)$ es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que dos. Determine c_0, c_1, y c_2.

22. La fórmula de cuadratura $\int_0^2 f(x)\,dx = c_0 f(0) + c_1 f(1) + c_2 f(2)$ es exacta para todos los polinomios de grado menor o igual que dos. Determine c_0, c_1, y c_2.

23. Encuentre las constantes c_0, c_1, y x_1 de tal forma que la fórmula de cuadratura

$$\int_0^1 f(x)\,dx = c_0 f(0) + c_1 f(x_1)$$

tenga el grado de precisión más alto posible.

24. Encuentre las constantes x_0, x_1, y c_1 de tal forma que la fórmula de cuadratura

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} f(x_0) + c_1 f(x_1)$$

tenga el grado de precisión lo más alto posible.

25. Pruebe la declaración que sigue a la definición 4.1; muestre que una fórmula de cuadratura tiene grado de precisión n si y sólo si el error $E(P(x)) = 0$ para todos los polinomios $P(x)$ de grado $k = 0, 1, \ldots, n$, pero $E(P(x)) \neq 0$ para algún polinomio $P(x)$ de grado $n + 1$.

26. Derive la regla de Simpson con el término de error por medio de

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + k f^{(4)}(\xi).$$

Encuentre a_0, a_1, y a_2 a partir del hecho de que la regla de Simpson es exacta para $f(x) = x^n$ cuando $n = 1, 2,$ y 3. A continuación, encuentre k al aplicar la fórmula de integración con $f(x) = x^4$.

27. Derive la regla abierta con $n = 1$ con término de error por medio del teorema 4.3

28. Derive la regla de tres octavos de Simpson (la regla cerrada con $n = 3$) con el término de error por medio del teorema 4.2.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. El método básico para aproximar una integral definida de una función que no tiene antiderivada explícita o cuya derivada no es fácil de obtener recibe el nombre de cuadratura numérica. Usted estudió una variedad de métodos de cuadratura en la sección 4.3, analícelos.

2. Analice el uso de fórmulas abiertas para integrar una función desde 0 hasta 1 que tiene una singularidad en 0. Por ejemplo, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

3. Seleccione una de las funciones en el ejemplo 1 de la sección 4.3 y cree una hoja de cálculo que aproximará la integral desde 0 hasta 2 con la regla trapezoidal. Compare su aproximación con el resultado obtenido en la tabla 4.7.

4. Seleccione una de las funciones en el ejemplo 1 de la sección 4.3 y cree una hoja de cálculo que aproximará la integral desde 0 hasta 2 con la regla de Simpson. Compare su aproximación con el resultado obtenido en la tabla 4.7.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.4

1. Utilice la regla compuesta trapezoidal con los valores indicados de n para aproximar las siguientes integrales.

a. $\int_1^2 x \ln x \, dx, \quad n = 4$

b. $\int_{-2}^2 x^3 e^x \, dx, \quad n = 4$

c. $\int_0^2 \frac{2}{x^2+4} \, dx, \quad n = 6$

d. $\int_0^\pi x^2 \cos x \, dx, \quad n = 6$

e. $\int_0^2 e^{2x} \operatorname{sen} 3x \, dx, \quad n = 8$

f. $\int_1^3 \frac{x}{x^2+4} \, dx, \quad n = 8$

g. $\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} \, dx, \quad n = 8$

h. $\int_0^{3\pi/8} \tan x \, dx, \quad n = 8$

2. Use la regla compuesta trapezoidal con los valores indicados de n para aproximar las siguientes integrales.

a. $\int_{-0.5}^{0.5} \cos^2 x \, dx, \quad n = 4$

b. $\int_{-0.5}^{0.5} x \ln(x+1) \, dx, \quad n = 6$

c. $\int_{.75}^{1.75} (\operatorname{sen}^2 x - 2x \operatorname{sen} x + 1) \, dx, \quad n = 8$

d. $\int_e^{e+2} \frac{1}{x \ln x} \, dx, \quad n = 8$

3. Use la regla compuesta de Simpson para aproximar las integrales en el ejercicio 1.

4. Use la regla compuesta de Simpson para aproximar las integrales en el ejercicio 2.

5. Use la regla compuesta de punto medio con $n+2$ subintervalos para aproximar las integrales en el ejercicio 1.

6. Use la regla compuesta de punto medio con $n+2$ subintervalos para aproximar las integrales en el ejercicio 2.

7. Aproxime $\int_0^2 x^2 \ln(x^2+1) \, dx$ por medio de $h = 0.25$. Utilice

a. Regla compuesta trapezoidal

b. Regla compuesta de Simpson

c. Regla compuesta de punto medio

8. Aproxime $\int_0^2 x^2 e^{-x^2} \, dx$ por medio de $h = 0.25$. Utilice

a. Regla compuesta trapezoidal

b. Regla compuesta de Simpson

c. Regla compuesta de punto medio

9. Suponga que $f(0) = 1$, $f(0.5) = 2.5$, $f(1) = 2$, y $f(0.25) = f(0.75) = \alpha$. Encuentre α si la regla compuesta trapezoidal con $n = 4$ da el valor de 1.75 para $\int_0^1 f(x) \, dx$.

10. La regla del punto medio para aproximar $\int_{-1}^1 f(x) \, dx$ da el valor 12, la regla compuesta de punto medio con $n = 2$ da 5 y la regla compuesta de Simpson da 6. Utilice el hecho de que $f(-1) = f(1)$ y $f(-0.5) = f(0.5) - 1$ para determinar $f(-1)$, $f(-0.5)$, $f(0)$, $f(0.5)$, y $f(1)$.

11. Determine los valores de n y h requeridos para aproximar

$$\int_0^2 e^{2x} \operatorname{sen} 3x \, dx$$

dentro de 10^{-4}. Use

a. Regla compuesta trapezoidal

b. Regla compuesta de Simpson

c. Regla compuesta de punto medio

12. Repita el ejercicio 11 para la integral $\int_0^\pi x^2 \cos x \, dx$.

13. Determine los valores de n y h requeridos para aproximar

$$\int_0^2 \frac{1}{x+4} \, dx$$

dentro de 10^{-5} y calcule la aproximación. Utilice

a. Regla compuesta trapezoidal

b. Regla compuesta de Simpson

c. Regla compuesta de punto medio

14. Repita el ejercicio 13 para la integral $\int_1^2 x \ln x \, dx$.

15. Si f está definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & 0 \le x \le 0.1, \\ 1.001 + 0.03(x - 0.1) + 0.3(x - 0.1)^2 + 2(x - 0.1)^3, & 0.1 \le x \le 0.2, \\ 1.009 + 0.15(x - 0.2) + 0.9(x - 0.2)^2 + 2(x - 0.2)^3, & 0.2 \le x \le 0.3. \end{cases}$$

a. Investigue la continuidad de las derivadas de f.

b. Use la regla compuesta trapezoidal con $n = 6$ para aproximar $\int_0^{0.3} f(x) \, dx$ y calcular el error por medio del límite de error.

c. Utilice la regla compuesta trapezoidal con $n = 6$ para aproximar $\int_0^{0.3} f(x) \, dx$. ¿Los resultados son más precisos que en la parte b)?

16. En cursos de cálculo multivariado y de estadística, se muestra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)(x/\sigma)^2} \, dx = 1,$$

para cualquier σ. La función

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)(x/\sigma)^2}$$

es la *función de densidad normal* con *media* $\mu = 0$ y *desviación estándar* σ. La probabilidad de que un valor seleccionado de manera aleatoria descrito por esta distribución se encuentre en $[a, b]$ está determinada por $\int_a^b f(x) \, dx$. Aproxime dentro de 10^{-5} la probabilidad de que un valor seleccionado de manera aleatoria descrito por esta distribución se encontrará en

a. $[-\sigma, \sigma]$ **b.** $[-2\sigma, 2\sigma]$ **c.** $[-3\sigma, 3\sigma]$

EJERCICIOS APLICADOS

17. Determine, dentro de 10^{-6}, la longitud de la gráfica de la elipse con la ecuación $4x^2 + 9y^2 = 36$.

18. Un automóvil completa una vuelta del circuito de carreras en 84 segundos. La velocidad de este automóvil en cada intervalo de 6 segundos se determina con una pistola radar y se da desde el principio de la vuelta, en pies por segundo, por las entradas en la siguiente tabla.

Tiempo	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84
Velocidad	124	134	148	156	147	133	121	109	99	85	78	89	104	116	123

¿Cuánto mide la pista?

19. Una partícula de masa m que se mueve hacia un fluido está sujeta a una resistencia viscosa R, la cual es una función de la velocidad v. La relación entre la resistencia R, velocidad v y el tiempo t está dada por la ecuación

$$t = \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{m}{R(u)} \, du.$$

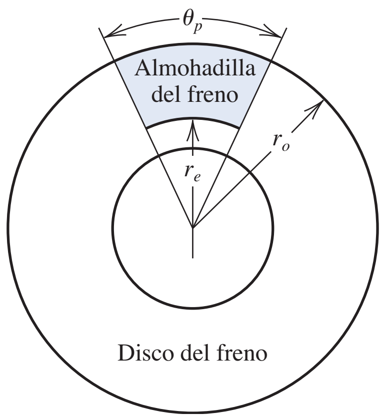
Suponga que $R(v) = -v\sqrt{v}$ para un fluido especial, en donde R está en Newtons y v en metros por segundo. Si $m = 10$ kg y $v(0) = 10$ m/s, aproxime el tiempo requerido para que la partícula reduzca su velocidad a $v = 5$ m/s.

20. Para simular las características térmicas de los frenos de disco (véase la siguiente figura), D. A. Secrist y R. W. Hornbeck [SH] necesitaron aproximar numéricamente el "aumento promedio de la temperatura del revestimiento" T, de la almohadilla del freno a partir de la ecuación

$$T = \frac{\int_{r_e}^{r_0} T(r) r \theta_p \, dr}{\int_{r_e}^{r_0} r \theta_p \, dr},$$

donde r_e representa el radio en el que comienza el contacto almohadilla-disco, r_0 representa el radio externo del contacto almohadilla-disco, θ_p representa el ángulo subtendido por las almohadillas del freno del sector y $T(r)$ es la temperatura en cada punto de la almohadilla, obtenido numéricamente a partir del análisis de la ecuación térmica (consulte la sección 12.2). Suponga que $r_e = 0.308$ pies, $r_0 = 0.478$ pies, y $\theta_p = 0.7051$ radianes y que las temperaturas provistas en la siguiente tabla se han calculado en los diferentes puntos del disco. Aproxime T.

r (pies)	$T(r)$ (°F)	r (pies)	$T(r)$ (°F)	r (pies)	$T(r)$ (°F)
0.308	640	0.376	1034	0.444	1204
0.325	794	0.393	1064	0.461	1222
0.342	885	0.410	1114	0.478	1239
0.359	943	0.427	1152		



21. Encuentre una aproximación dentro de 10^{-4} del valor de la integral en la aplicación con que inicia este capítulo:

$$\int_0^{48} \sqrt{1 + (\cos x)^2}\, dx.$$

22. La ecuación

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt = 0.45$$

se puede resolver para x a través del método de Newton con

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt - 0.45$$

y

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Para evaluar f en la aproximación p_k, necesitamos una fórmula de cuadratura para aproximar

$$\int_0^{p_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt.$$

a. Encuentre una solución para $f(x) = 0$ precisa dentro de 10^{-5} por medio del método de Newton con $p_0 = 0.5$ y la regla compuesta de Simpson.

b. Repita a) por medio de la regla compuesta trapezoidal en lugar de la regla compuesta de Simpson.

EJERCICIOS TEÓRICOS

23. Muestre que el error $E(f)$ para la regla compuesta de Simpson se puede aproximar por medio de

$$-\frac{h^4}{180}[f'''(b) - f'''(a)].$$

[*Sugerencia:* $\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_j)(2h)$ es la suma de Riemann para $\int_a^b f^{(4)}(x)\,dx$.]

24. **a.** Deduzca un estimado para $E(f)$ en la regla compuesta trapezoidal con el método en el ejercicio 23.

b. Repita la parte a) para la regla compuesta de punto medio.

25. Utilice los cálculos de error de los ejercicios 23 y 24 para calcular los errores en el ejercicio 12.

26. Utilice los cálculos de error de los ejercicios 23 y 24 para calcular los errores en el ejercicio 14.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Deduzca un método compuesto con base en la regla de los tres octavos de Simpson.

2. La regla de los tres octavos de Simpson es otro método para la integración numérica. ¿Cómo difiere este método del método de Simpson? ¿Vale la pena? ¿Por qué sí o por qué no?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.5

1. Utilice la integración de Romberg para calcular $R_{3,3}$ para las siguientes integrales.

a. $\displaystyle\int_1^{1.5} x^2 \ln x\,dx$

b. $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx$

c. $\displaystyle\int_0^{0.35} \frac{2}{x^2-4}\,dx$

d. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x^2 \operatorname{sen} x\,dx$

e. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} e^{3x} \operatorname{sen} 2x\,dx$

f. $\displaystyle\int_1^{1.6} \frac{2x}{x^2-4}\,dx$

g. $\displaystyle\int_3^{3.5} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$

h. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (\cos x)^2\,dx$

2. Utilice la integración de Romberg para calcular $R_{3,3}$ para las siguientes integrales.

a. $\displaystyle\int_{-1}^{1} (\cos x)^2\,dx$

b. $\displaystyle\int_{-0.75}^{0.75} x\ln(x+1)\,dx$

c. $\displaystyle\int_1^4 \left((\operatorname{sen} x)^2 - 2x\operatorname{sen} x + 1\right)\,dx$

d. $\displaystyle\int_e^{2e} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

3. Calcule $R_{4,4}$ para las integrales en el ejercicio 1.

4. Calcule $R_{4,4}$ para las integrales en el ejercicio 2.

5. Use la integración de Romberg para aproximar las integrales en el ejercicio 1 dentro de 10^{-6}. Calcule la tabla de Romberg hasta que $|R_{n-1,n-1} - R_{n,n}| < 10^{-6}$ o $n = 10$. Compare sus resultados con los valores exactos de las integrales.

6. Use la integración de Romberg para aproximar las integrales en el ejercicio 2 dentro de 10^{-6}. Calcule la tabla de Romberg hasta que $|R_{n-1,n-1} - R_{n,n}| < 10^{-6}$ o $n = 10$. Compare sus resultados con los valores exactos de las integrales.

7. Use los siguientes datos para aproximar $\int_1^5 f(x)\,dx$ con tanta precisión como sea posible.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2.4142	2.6734	2.8974	3.0976	3.2804

8. Use los siguientes datos para aproximar $\int_0^6 f(x)\,dx$ con tanta precisión como sea posible.

x	0	0.75	1.5	2.25	3	3.75	4.5	5.25	6
$f(x)$	0	0.866025	1.22474	1.5	1.7321	1.9365	2.1213	2.2913	2.4495

9. La integración de Romberg se utiliza para aproximar

$$\int_2^3 f(x)\,dx.$$

Si $f(2) = 0.51342$, $f(3) = 0.36788$, $R_{31} = 0.43687$, y $R_{33} = 0.43662$, encuentre $f(2.5)$.

10. La integración de Romberg se usa para aproximar

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}\,dx.$$

Si $R_{11} = 0.250$ y $R_{22} = 0.2315$, ¿cuál es R_{21}?

11. La integración de Romberg para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ da $R_{11} = 8$, $R_{22} = 16/3$, y $R_{33} = 208/45$. Encuentre R_{31}.

12. La integración de Romberg para aproximar $\int_0^1 f(x)\,dx$ da $R_{11} = 4$ y $R_{22} = 5$. Encuentre $f(1/2)$.

13. Use la integración de Romberg para calcular las siguientes aproximaciones para

$$\int_0^{48} \sqrt{1+(\cos x)^2}\,dx.$$

[*Nota*: Los resultados en este ejercicio son más interesantes si usted usa un dispositivo con aritmética entre siete y nueve dígitos.]

a. Determine $R_{1,1}$, $R_{2,1}$, $R_{3,1}$, $R_{4,1}$ y $R_{5,1}$, y utilice estas aproximaciones para predecir el valor de la integral.

b. Determine $R_{2,2}$, $R_{3,3}$, $R_{4,4}$, y $R_{5,5}$, y modifique su predicción.

c. Determine $R_{6,1}$, $R_{6,2}$, $R_{6,3}$, $R_{6,4}$, $R_{6,5}$, y $R_{6,6}$, y modifique su predicción.

d. Determine $R_{7,7}$, $R_{8,8}$, $R_{9,9}$, y $R_{10,10}$, y realice su predicción final.

e. Explique porqué esta integral causa dificultad con la integración de Romberg y cómo se puede reformular para determinar con mayor facilidad una aproximación precisa.

14. En el ejercicio 24 de la sección 1.1 se integró una serie de Maclaurin para aproximar erf(1), donde erf(x) es la función de error de distribución normal definida por

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

Aproxime erf(1) dentro de 10^{-7}.

EJERCICIOS APLICADOS

15. Encuentre una aproximación dentro de 10^{-4} del valor de la integral considerada en la aplicación de apertura de este capítulo:

$$\int_0^{48} \sqrt{1+(\cos x)^2}\,dx.$$

16. En la sección 4.4, ejercicio 19. El método compuesto de Simpson se utilizó para aproximar el tiempo requerido para que una partícula disminuya su velocidad a 5 metros por segundo. La partícula tiene una masa $m = 10$ kg y se mueve a través de fluido. Está sujeta a una resistencia viscosa $R = -v\sqrt{v}$ donde v es su velocidad en metros por segundo.

La relación entre R, v y el tiempo t está dada por

$$t = \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{m}{R(u)}du$$

Suponiendo $v(0) = 10$ metros por segundo, utilice la integración de Romberg con $n = 4$ para obtener la aproximación.

EJERCICIOS TEÓRICOS

17. Muestre que la aproximación obtenida a partir de $R_{k,2}$ es la misma que la provista por la regla compuesta de Simpson descrita en el teorema 4.4 con $h = h_k$.
18. Muestre que, para cualquier k,

$$\sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f\left(a + \frac{i}{2}h_{k-1}\right) = \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h_{k-1}\right) + \sum_{i=1}^{2^{k-2}-1} f(a + ih_{k-1}).$$

19. Utilice el resultado del ejercicio 18 para verificar la ecuación (4.34); es decir, muestre que para todas las k,

$$R_{k,1} = \frac{1}{2}\left[R_{k-1,1} + h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h_{k-1}\right)\right].$$

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Una modificación de la integración de Romberg es construir $R_k(h)$ al duplicar el tamaño de paso h, y la otra es construir $R_k(h)$ al reducir a la mitad el tamaño de paso h. Analice la utilidad de ambas modificaciones si un número limitado de valores de datos (t_k, I_k) se determina como entrada.
2. Recree la tabla 4.9 al crear una hoja de cálculo que aproximará la integral. Compare su aproximación con el resultado obtenido en la tabla 4.9. Describa las similitudes y diferencias en las tablas.
3. El valor promedio de una función está definido por $\int_a^b \frac{f(x)}{(b-a)}dx$ usando la función $T(x) = 0.001t^4 - 0.280t^2 + 25$, donde t es el número de horas desde el mediodía $(-12 < t < 12)$. ¿La extrapolación de Richardson se puede usar para encontrar el valor promedio? En este caso, ¿qué modificaciones, si hay alguna, se deben hacer?
4. Si se elige usar la regla compuesta de Simpson en lugar de la regla trapezoidal como la primera columna en una tabla de Romberg, ¿las columnas a la derecha serán diferentes a aquellas en la tabla original de Romberg?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.6

1. Calcule las aproximaciones de la regla de Simpson $S(a, b)$, $S(a, (a + b)/2)$, y $S((a + b)/2, b)$ para las siguientes integrales y verifique el cálculo determinado en la fórmula de aproximación.

   a. $\int_1^{1.5} x^2 \ln x \, dx$ **b.** $\int_0^1 x^2 e^{-x} \, dx$

   c. $\int_0^{0.35} \frac{2}{x^2 - 4} \, dx$ **d.** $\int_0^{\pi/4} x^2 \operatorname{sen} x \, dx$

2. Calcule las aproximaciones de la regla de Simpson $S(a, b)$, $S(a, (a + b)/2)$, y $S((a + b)/2, b)$ para las siguientes integrales y verifique el cálculo determinado para la fórmula de aproximación.

   a. $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \operatorname{sen} 2x \, dx$ **b.** $\int_1^{1.6} \frac{2x}{x^2 - 4} \, dx$

   c. $\int_3^{3.5} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} \, dx$ **d.** $\int_0^{\pi/4} (\cos x)^2 \, dx$

3. Utilice la cuadratura adaptable para encontrar aproximaciones dentro de 10^{-3} para las integrales en el ejercicio 1. No use un programa de computadora para generar estos resultados.

4. Utilice la cuadratura adaptable para encontrar aproximaciones dentro de 10^{-3} para las integrales en el ejercicio 2. No use un programa de computadora para generar estos resultados.

5. Utilice la cuadratura adaptable para aproximar las siguientes integrales dentro de 10^{-5}.

a. $\displaystyle\int_1^3 e^{2x} \operatorname{sen} 3x\, dx$ **b.** $\displaystyle\int_1^3 e^{3x} \operatorname{sen} 2x\, dx$

c. $\displaystyle\int_0^5 \left(2x\cos(2x) - (x-2)^2\right)\, dx$ **d.** $\displaystyle\int_0^5 \left(4x\cos(2x) - (x-2)^2\right)\, dx$

6. Utilice la cuadratura adaptable para aproximar las siguientes integrales dentro de 10^{-5}.

a. $\displaystyle\int_0^{\pi} (\operatorname{sen} x + \cos x)\, dx$ **b.** $\displaystyle\int_1^2 (x + \operatorname{sen} 4x)\, dx$

c. $\displaystyle\int_{-1}^1 x \operatorname{sen} 4x\, dx$ **d.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (6\cos 4x + 4\operatorname{sen} 6x)e^x\, dx$

7. Utilice la regla compuesta de Simpson con $n = 4, 6, 8, \ldots$, hasta que las aproximaciones sucesivas para las siguientes integrales concuerden dentro de 10^{-6}. Determine el número de nodos requerido. Use el algoritmo de cuadratura adaptable para aproximar la integral dentro de 10^{-6}, y cuente el número de nodos. ¿El procedimiento de cuadratura adaptable produjo alguna mejora?

a. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x^2\, dx$ **b.** $\displaystyle\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x^2\, dx$

8. Utilice la regla compuesta de Simpson con $n = 4, 6, 8, \ldots$, hasta que las aproximaciones sucesivas para las siguientes integrales concuerden dentro de 10^{-6}. Determine el número de nodos requerido. Use el algoritmo de cuadratura adaptable para aproximar la integral dentro de 10^{-6}, y cuente el número de nodos. ¿El procedimiento de cuadratura adaptable produjo alguna mejora?

a. $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\cos x\, dx$ **b.** $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x\, dx$

9. Bosqueje las gráficas de sen $(1/x)$ y cos $(1/x)$ en $[0.1, 2]$. Utilice cuadratura adaptable para aproximar las siguientes integrales dentro de 10^{-3}.

a. $\displaystyle\int_{0.1}^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}\, dx$ **b.** $\displaystyle\int_{0.1}^2 \cos\frac{1}{x}\, dx$

EJERCICIOS APLICADOS

10. El estudio de difracción de la luz en una apertura rectangular implica las integrales de Fresnel

$$c(t) = \int_0^t \cos\frac{\pi}{2}w^2\, dw \quad \text{y} \quad s(t) = \int_0^t \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}w^2\, dw.$$

Construya una tabla de valores para $c(t)$ y $s(t)$ que sea precisa dentro de 10^{-4} para valores de $t = 0.1, 0.2, \ldots, 1.0$.

11. La ecuación diferencial

$$mu''(t) + ku(t) = F_0\cos\omega t$$

describe un sistema masa-resorte con una masa m, una constante de resorte k y sin amortiguamiento aplicado. El término $F_0\cos\omega t$ describe una fuerza externa periódica aplicada al sistema. La solución a la ecuación cuando inicialmente el sistema está en reposo $(u'(0) = u(0) = 0)$ es

$$u(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}(\cos\omega t - \cos\omega_0 t), \quad \text{en donde} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \neq \omega.$$

Bosqueje la gráfica de u cuando $m = 1, k = 9, F_0 = 1, \omega = 2$, y $t \in [0, 2\pi]$. Aproxime $\int_0^{2\pi} u(t)\, dt$ dentro de 10^{-4}.

12. Si el término $cu'(t)$ se añade al lado izquierdo de la ecuación de movimiento en el ejercicio 7, la ecuación diferencial resultante describe un sistema masa-resorte amortiguado con una constante de amortiguamiento $c \neq 0$. La solución a esta ecuación cuando el sistema está inicialmente en reposo es

$$u(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \frac{F_0}{c^2\omega^2 + m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2}\left(c\omega \operatorname{sen} \omega t + m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos \omega t\right),$$

Donde

$$r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4\omega_0^2 m^2}}{2m} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4\omega_0^2 m^2}}{2m}.$$

a. Si $m = 1$, $k = 9$, $F_0 = 1$, $c = 10$, y $\omega = 2$. Encuentre los valores de c_1 y c_2 de tal forma que $u(0) = u'(0) = 0$.

b. Bosqueje la gráfica de $u(t)$ para $t \in [0, 2\pi]$ y aproxime $\int_0^{2\pi} u(t)\, dt$ dentro de 10^{-4}.

EJERCICIOS TEÓRICOS

13. Sean $T(a, b)$ y $T(a, \frac{a+b}{2}) + T(\frac{a+b}{2}, b)$ las aplicaciones sencilla y doble de la regla trapezoidal para $\int_a^b f(x)\, dx$. Obtenga la relación entre

$$\left| T(a, b) - T\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - T\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right|$$

y

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - T\left(a, \frac{a+b}{2}\right) - T\left(\frac{a+b}{2}, b\right) \right|.$$

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. ¿La integración de Romberg reemplazará la regla de Simpson en cuadratura adaptable? En este caso, ¿se determinaría n?

2. La eficiencia de la cuadratura adaptable disminuye considerablemente si la función tiene singularidades integrables en los extremos del intervalo. Esta situación podría requerir miles de iteraciones para disminuir el error de integración a un nivel que sea aceptable. Analice cómo se puede evitar esto.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.7

1. Aproxime las siguientes integrales por medio de cuadratura gaussiana con $n = 2$ y compare sus resultados para los valores exactos de las integrales.

a. $\int_1^{1.5} x^2 \ln x\, dx$ **b.** $\int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx$

c. $\int_0^{0.35} \frac{2}{x^2 - 4}\, dx$ **d.** $\int_0^{\pi/4} x^2 \operatorname{sen} x\, dx$

2. Aproxime las siguientes integrales por medio de cuadratura gaussiana con $n = 2$ y compare sus resultados para los valores exactos de las integrales.

a. $\int_0^{\pi/4} e^{3x} \operatorname{sen} 2x\, dx$ **b.** $\int_1^{1.6} \frac{2x}{x^2 - 4}\, dx$

c. $\int_3^{3.5} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}\, dx$ **d.** $\int_0^{\pi/4} (\cos x)^2\, dx$

3. Repita el ejercicio 1 con $n = 3$.
4. Repita el ejercicio 2 con $n = 3$.
5. Repita el ejercicio 1 con $n = 4$.
6. Repita el ejercicio 2 con $n = 4$.
7. Repita el ejercicio 1 con $n = 5$.
8. Repita el ejercicio 2 con $n = 5$.

EJERCICIOS APLICADOS

9. Aproxime la longitud de la gráfica de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ en el primer cuadrante mediante cuadratura gaussiana con $n = 5$. Determine el error en la aproximación dado que la longitud real es 3.7437137.
10. Utilice la cuadratura gaussiana para aproximar la integral

$$\int_0^{48} \sqrt{1 + (\cos x)^2}\, dx,$$

considerada en la aplicación con que se inicio este capítulo. Para la aproximación, divida el intervalo $[0, 48]$ en 16 subintervalos y sume las aproximaciones obtenidas a través de la cuadratura gaussiana con $n = 5$ para cada uno de los subintervalos. ¿Cómo se compara la aproximación con el valor real de la integral?

EJERCICIOS TEÓRICOS

11. Determine las constantes a, b, c y d que producirá una fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = af(-1) + bf(1) + cf'(-1) + df'(1)$$

que tiene un grado de precisión de tres.

12. Determine las constantes a, b, c y d que producirán una fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = af(-1) + bf(0) + cf(1) + df'(-1) + ef'(1)$$

que tiene grado de precisión cuatro.

13. Verifique las entradas para los valores de $n = 2$ y 3 en la tabla 4.12 en la página 172 al encontrar las raíces de los polinomios de Legendre respectivos y utilice las ecuaciones anteriores a esta tabla para encontrar los coeficientes relacionados con los valores.

14. Muestre que la fórmula $Q(P) = \sum_{i=1}^{n} c_i P(x_i)$ no tiene grado de precisión superior a $2n - 1$, independientemente de la elección de $c_1, \ldots, c_n$ y $x_1, \ldots, x_n$. [. [*Sugerencia:* Construya un polinomio que tenga una raíz doble en cada una de las x_i].

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Describa las diferencias y similitudes entre la cuadratura gaussiana y el método de cuadratura gaussiana adaptable conocido como cuadratura de Gauss-Kronrod.

2 Describa las diferencias y similitudes entre la cuadratura de Hermite-Gauss y la cuadratura gaussiana.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.8

1. Utilice el algoritmo 4.4 con $n = m = 4$ para aproximar las siguientes integrales dobles y compare los resultados con las respuestas exactas.

a. $\int_{2.1}^{2.5} \int_{1.2}^{1.4} xy^2 \, dy \, dx$ **b.** $\int_{0}^{0.5} \int_{0}^{0.5} e^{y-x} \, dy \, dx$

c. $\int_{2}^{2.2} \int_{x}^{2x} (x^2 + y^3) \, dy \, dx$ **d.** $\int_{1}^{1.5} \int_{0}^{x} (x^2 + \sqrt{y}) \, dy \, dx$

2. Encuentre los valores más pequeños para $n = m$ de tal forma que se pueda utilizar el algoritmo 4.4 para aproximar las integrales en el ejercicio 1 dentro de 10^{-6} del valor real.

3. Utilice el algoritmo 4.5 con $n = m = 2$ para aproximar las integrales en el ejercicio 1 y compare los resultados con los obtenidos en el ejercicio 1.

4. Encuentre los valores más pequeños para $n = m$ de tal forma que se pueda utilizar el algoritmo 4.5 para aproximar las integrales en el ejercicio 1 dentro de 10^{-6} del valor real. No continúe más allá de $n = m = 5$. Compare el número de evaluaciones funcionales requeridas con el número requerido en el ejercicio 2.

5. Utilice el algoritmo 4.4 con (i) $n = 4, m = 8$, (ii) $n = 8, m = 4$, y (iii) $n = m = 6$ para aproximar las siguientes integrales dobles y compare los resultados con las respuestas exactas.

a. $\int_{0}^{\pi/4} \int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} (2y \operatorname{sen} x + \cos^2 x) \, dy \, dx$ **b.** $\int_{1}^{e} \int_{1}^{x} \ln xy \, dy \, dx$

c. $\int_{0}^{1} \int_{x}^{2x} (x^2 + y^3) \, dy \, dx$ **d.** $\int_{0}^{1} \int_{x}^{2x} (y^2 + x^3) \, dy \, dx$

e. $\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{x} \cos x \, dy \, dx$ **f.** $\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{x} \cos y \, dy \, dx$

g. $\int_{0}^{\pi/4} \int_{0}^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \, dy \, dx$ **h.** $\int_{-\pi}^{3\pi/2} \int_{0}^{2\pi} (y \operatorname{sen} x + x \cos y) \, dy \, dx$

6. Encuentre los valores más pequeños para $n = m$ de tal forma que se pueda utilizar el algoritmo 4.4 para aproximar las integrales en el ejercicio 5 dentro de 10^{-6} del valor real.

7. Utilice el algoritmo 4.5 con (i) $n = m = 3$, (ii) $n = 3, m = 4$, (iii) $n = 4, m = 3$, y (iv) $n = m = 4$ para aproximar las integrales en el ejercicio 5.

8. Utilice el algoritmo 4.5 con $n = m = 5$ para aproximar las integrales en el ejercicio 5. Compare el número de evaluaciones funcionales requeridas con el número requerido en el ejercicio 6.

9. Utilice el algoritmo 4.4 con $n = m = 14$ y el algoritmo 4.5 con $n = m = 4$ para aproximar

$$\iint_R e^{-(x+y)} \, dA$$

para la región R en el plano limitado por las curvas $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$.

10. Utilice el algoritmo 4.4 para aproximar

$$\iint_R \sqrt{xy + y^2} \, dA,$$

donde R es la región en el plano limitada por las rectas $x + y = 6$, $3y - x = 2$, y $3x - y = 2$. Primero subdivida R en dos regiones R_1 y R_2 en donde se pueda aplicar el algoritmo 4.4. Utilice $n = m = 6$ tanto en R_1 y R_2.

11. Utilice el algoritmo 4.6 con $n = m = p = 2$ para aproximar las siguientes integrales triples y compare los resultados con las respuestas exactas.

a. $\int_{0}^{1} \int_{1}^{2} \int_{0}^{0.5} e^{x+y+z} \, dz \, dy \, dx$ **b.** $\int_{0}^{1} \int_{x}^{1} \int_{0}^{y} y^2 z \, dz \, dy \, dx$

c. $\int_{0}^{1} \int_{x^2}^{x} \int_{x-y}^{x+y} y \, dz \, dy \, dx$ **d.** $\int_{0}^{1} \int_{x^2}^{x} \int_{x-y}^{x+y} z \, dz \, dy \, dx$

e. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{x}\int_0^{xy}\frac{1}{y}\operatorname{sen}\frac{z}{y}\,dz\,dy\,dx$ **f.** $\displaystyle\int_0^{1}\int_0^{1}\int_{-xy}^{xy}e^{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$

12. Repita el ejercicio 11 con $n = m = p = 3$.
13. Repita el ejercicio 11 con $n = m = p = 4$.
14. Repita el ejercicio 11 con $n = m = p = 5$.
15. Utilice el algoritmo 4.6 con $n = m = p = 5$ para aproximar

$$\iiint_S \sqrt{xyz}\,dV,$$

donde S es la región en el primer octante limitado por el cilindro $x^2+y^2 = 4$, la esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$, y el plano $x + y + z = 8$. ¿Cuántas evaluaciones funcionales se requieren para la aproximación?
16. Utilice el algoritmo 4.6 con $n = m = p = 4$ para aproximar

$$\iiint_S xy\operatorname{sen}(yz)\,dV,$$

donde S es el sólido limitado por los planos coordenados y los planos $x = \pi$, $y = \pi/2$ y $z = \pi/3$. Compare esta aproximación con el resultado exacto.

EJERCICIOS APLICADOS

17. Una lámina plana es una hoja delgada de masa distribuida de manera continua. Si σ es una función que describe la densidad de una lámina que tiene la forma de una región R en el plano xy, entonces, el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ de la lámina es

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x\sigma(x, y)\,dA}{\iint_R \sigma(x, y)\,dA}, \qquad \bar{y} = \frac{\iint_R y\sigma(x, y)\,dA}{\iint_R \sigma(x, y)\,dA}.$$

Utilice el algoritmo 4.4 con $n = m = 14$ para encontrar el centro de masa de la lámina descrita mediante $R = \{\,(x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\,\}$ con función de densidad $\sigma(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$. Compare la aproximación con el resultado exacto.
18. Repita el ejercicio 17 utilizando el algoritmo 4.5 con $n = m = 5$.
19. El área de la superficie descrita mediante $z = f(x, y)$ para (x, y) en R está dada por

$$\iint_R \sqrt{[f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 + 1}\,dA.$$

Utilice el elgoritmo 4.4 con $n = m = 8$ para encontrar una aproximación del área de la superficie en el hemisferio $x^2+y^2+z^2 = 9, z \ge 0$ que se encuentra arriba de la región en el plano descrito por $R = \{\,(x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\,\}$.
20. Repita el ejercicio 19 usando el algoritmo 4.5 con $n = m = 4$.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Los métodos Monte Carlo son fáciles de aplicar a los métodos de integración multidimensional. Estos métodos pueden producir mayor precisión que los métodos analizados en esta sección. Uno de éstos es el algoritmo Metropolios-Hastings. Compare y contraste este método con el método de integral doble de Simpson.
2. Los métodos Monte Carlo son fáciles de aplicar a los métodos de integración multidimensional. Estos métodos pueden producir mejor precisión que los analizados en esta sección. Uno de ellos es el algoritmo Metropolios-Hastings. Compare y contraste este método con el método de integral triple de Simpson.
3. Los métodos Monte Carlo son fáciles de aplicar a los métodos de integración multidimensional. Estos métodos pueden producir mejor precisión que los métodos analizados en esta sección. Uno de estos métodos es el algoritmo de muestreo de Gibb. Compare y contraste este método con el método de integral doble de Simpson.

4. Los métodos Monte Carlo son fáciles de aplicar a los métodos de integración multidimensional. Pueden producir mayor precisión que los métodos analizados en esta sección. Uno de ellos es el algoritmo de muestreo de Gibb. Compare y contraste este método con el método de integral triple de Simpson.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 4.9

1. Utilice la regla compuesta de Simpson y los valores dados de n para aproximar las siguientes integrales impropias.

a. $\displaystyle\int_0^1 x^{-1/4} \operatorname{sen} x \, dx, \quad n = 4$ **b.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt[5]{x^2}} \, dx, \quad n = 6$

c. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{(x-1)^{1/5}} \, dx, \quad n = 8$ **d.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos 2x}{x^{1/3}} \, dx, \quad n = 6$

2. Utilice la regla compuesta de Simpson y los valores dados de n para aproximar las siguientes integrales impropias.

a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x}} \, dx, \quad n = 6$ **b.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{xe^x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} \, dx, \quad n = 8$

3. Utilice la transformación $t = x^{-1}$ y, a continuación, la regla compuesta de Simpson y los valores dados de n para aproximar las siguientes integrales impropias.

a. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2+9} \, dx, \quad n = 4$ **b.** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{1+x^4} \, dx, \quad n = 4$

c. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^3} \, dx, \quad n = 6$ **d.** $\displaystyle\int_1^\infty x^{-4} \operatorname{sen} x \, dx, \quad n = 6$

4. La integral impropia $\int_0^\infty f(x) \; dx$ no se puede convertir en una integral con límites finitos mediante la sustitución $t = 1/x$ porque el límite en cero se vuelve infinito. El problema se resuelve al escribir primero $\int_0^\infty f(x) \, dx = \int_0^1 f(x) \, dx + \int_1^\infty f(x) \, dx$. Aplique esta técnica para aproximar las siguientes integrales impropias con una precisión de 10^{-6}.

a. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4} \, dx$ **b.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^3} \, dx$

EJERCICIOS APLICADOS

5. Suponga que un cuerpo de masa m viaja verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra. Si se omite toda la resistencia excepto la gravedad, la velocidad de escape v está determinada por

$$v^2 = 2gR \int_1^\infty z^{-2} \, dz, \quad \text{donde } z = \frac{x}{R},$$

$R = 3\,960$ millas es el radio de la Tierra y $g = 0.00609$ mi/s^2 es la fuerza de gravedad en la superficie de la Tierra. Aproxime la velocidad de escape v.

EJERCICIOS TEÓRICOS

6. Los polinomios de Laguerre $\{L_0(x), L_1(x) \ldots\}$ forman un conjunto ortogonal en $[0, \infty)$ y satisfacen $\int_0^\infty e^{-x} L_i(x) L_j(x) \; dx = 0$, para $i \neq j$. (Consulte la sección 8.2.) El polinomio $L_n(x)$ tiene n ceros diferentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en $[0, \infty)$. Si

$$c_{n,i} = \int_0^\infty e^{-x} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \, dx.$$

Muestre que la fórmula de cuadratura

$$\int_0^{\infty} f(x)e^{-x}\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_{n,i}\,f(x_i)$$

tiene un grado de precisión $2n-1$. [*Sugerencia:* Siga los pasos en la demostración del teorema 4.7.]

7. Los polinomios de Laguerre $L_0(x)=1$, $L_1(x)=1-x$, $L_2(x)=x^2-4x+2$, y $L_3(x)=-x^3+9x^2-18x+6$ se deducen en el ejercicio 11 de la sección 8.2. Como se muestra en el ejercicio 6, estos polinomios son útiles para aproximar las integrales de la forma

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x)\,dx = 0.$$

a. Deduzca la fórmula de cuadratura mediante $n=2$ y los ceros de $L_2(x)$.

b. Deduzca la fórmula de cuadratura mediante $n=3$ y los ceros de $L_3(x)$.

8. Utilice las fórmulas de cuadratura derivadas en el ejercicio 7 para aproximar la integral

$$\int_0^{\infty} \sqrt{x}e^{-x}\,dx.$$

9. Utilice las fórmulas de cuadratura derivadas en el ejercicio 7 para aproximar la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Describa la forma en la que se manejan las singularidades al aproximar las integrales impropias.

2. La eficiencia de la cuadratura adaptable disminuye considerablemente si la función tiene singularidades integrables en los extremos del intervalo. Esta situación puede requerir miles de iteraciones para disminuir el error de integración a un nivel aceptable. Analice la forma en la que la subrutina AutoGKSingular resuelve este problema.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS (FINAL DEL CAPÍTULO)

1. Proporcione una descripción general de la subrutina AutoGKSmooth encontrada en el paquete de software numérico ALGLIB.
2. Proporcione una descripción general de la subrutina AutoGKSmoothW encontrada en el paquete de software numérico ALGLIB.
3. Analice la forma en la que se manejan integrales múltiples en MAPLE. ¿Existen situaciones que podrían crear un problema al utilizar MAPLE?
4. Analice la forma en la que se manejan integrales múltiples en MATLAB. ¿Existen situaciones que podrían crear un problema al utilizar MATLAB?
5. Analice la forma en la que se manejan integrales múltiples en Mathematica. ¿Existen situaciones que podrían crear un problema al utilizar Mathematica?

CONCEPTOS CLAVE

Cuadratura gaussiana
Cuadratura numérica
Diferenciación numérica
Error de redondeo
Extrapolación de Richardson
Fórmulas abiertas de Newton-Cotes
Fórmulas cerradas de Newton-Cotes
Fórmulas de diferencia
Grado de precisión
Integración de Romberg
Integración numérica
Integrales impropias
Medición de precisión
Métodos de cuadratura adaptable
Métodos de integral múltiple
Polinomios de Legendre
Regla compuesta de Simpson
Regla de Simpson
Regla trapezoidal
Regla trapezoidal compuesta
Singularidad

REVISIÓN DEL CAPÍTULO

En este capítulo consideramos integrales de aproximación de funciones de una, dos o tres variables y la aproximación de las derivadas de una función de una sola variable real.

Se estudió la regla de punto medio, la regla trapezoidal y la regla de Simpson para introducir las técnicas y el análisis de error de los métodos de cuadratura. Descubrimos que la regla compuesta de Simpson era fácil de utilizar y que produce aproximaciones precisas a menos que la función oscile en un subintervalo del intervalo de integración. Descubrimos que es posible usar la cuadratura adaptable si se sospecha que la función tiene una conducta oscilatoria. También observamos que mediante la cuadratura gaussiana podemos obtener la capacidad de minimizar el número de nodos mientras mantenemos la precisión. La integración de Romberg se introdujo para aprovechar la aplicación fácil de la regla compuesta trapezoidal y la extrapolación.

Para leer más sobre integración numérica, recomendamos los libros de Engels [E] y de Davis y Rabinowitz [DR]. Para más información sobre cuadratura gaussiana, consulte Stroud y Secrest [StS]. Los libros sobre integrales múltiples incluyen los de Stroud [Stro] y de Sloan y Joe [SJ].