Capítulo 1

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1.1

1. Muestre que las siguientes ecuaciones tienen por lo menos una solución en los intervalos dados.

a. $x\cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$, $[0.2, 0.3]$ y $[1.2, 1.3]$

b. $(x-2)^2 - \ln x = 0$, $[1, 2]$ y $[e, 4]$

c. $2x\cos(2x) - (x-2)^2 = 0$, $[2, 3]$ y $[3, 4]$

d. $x - (\ln x)^x = 0$, $[4, 5]$

2. Muestre que las siguientes ecuaciones tienen por lo menos una solución en los intervalos dados.

a. $\sqrt{x} - \cos x = 0$, $[0, 1]$

b. $e^x - x^2 + 3x - 2 = 0$, $[0, 1]$

c. $-3\tan(2x) + x = 0$, $[0, 1]$

d. $\ln x - x^2 + \frac{5}{2}x - 1 = 0$, $[\frac{1}{2}, 1]$

3. Encuentre los intervalos que contienen soluciones para las siguientes dados.

a. $x - 2^{-x} = 0$

b. $2x\cos(2x) - (x+1)^2 = 0$

c. $3x - e^x = 0$

d. $x + 1 - 2\,\text{sen}(\pi x) = 0$

4. Encuentre los intervalos que contienen soluciones para las siguientes ecuaciones.

a. $x - 3^{-x} = 0$

b. $4x^2 - e^x = 0$

c. $x^3 - 2x^2 - 4x + 2 = 0$

d. $x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101 = 0$

5. Encuentre $\text{máx}_{a \le x \le b} |f(x)|$ para las siguientes funciones e intervalos.

a. $f(x) = (2 - e^x + 2x)/3$, $[0, 1]$

b. $f(x) = (4x - 3)/(x^2 - 2x)$, $[0.5, 1]$

c. $f(x) = 2x\cos(2x) - (x-2)^2$, $[2, 4]$

d. $f(x) = 1 + e^{-\cos(x-1)}$, $[1, 2]$

6. Encuentre $\text{máx}_{a \le x \le b} |f(x)|$ para las siguientes funciones e intervalos.

a. $f(x) = 2x/(x^2 + 1)$, $[0, 2]$

b. $f(x) = x^2\sqrt{(4 - x)}$, $[0, 4]$

c. $f(x) = x^3 - 4x + 2$, $[1, 2]$

d. $f(x) = x\sqrt{(3 - x^2)}$, $[0, 1]$

7. Muestre que $f'(x)$ es 0 en por lo menos uno de los intervalos dados.

a. $f(x) = 1 - e^x + (e - 1)\,\text{sen}((\pi/2)x)$, $[0, 1]$

b. $f(x) = (x - 1)\tan x + x\,\text{sen}\,\pi x$, $[0, 1]$

c. $f(x) = x\,\text{sen}\,\pi x - (x - 2)\ln x$, $[1, 2]$

d. $f(x) = (x - 2)\,\text{sen}\,x\ln(x + 2)$, $[-1, 3]$

8. Suponga que $f \in C[a, b]$ y $f'(x)$ existe en (a, b). Muestre que si $f'(x) \neq 0$ para todas las x en (a, b), entonces puede existir p en $[a, b]$ con $f(p) = 0$.

9. Si $f(x) = x^3$.

a. Encuentre el segundo polinomio de Taylor $P_2(x)$ alrededor de $x_0 = 0$.

b. Encuentre $R_2(0.5)$ y el error real al utilizar $P_2(0.5)$ para aproximar $f(0.5)$.

c. Repita la parte a) usando $x_0 = 1$.

d. Repita la parte b) usando el polinomio de la parte c).

10. Encuentre el tercer polinomio de Taylor $P_3(x)$ para la función $f(x) = \sqrt{x+1}$ alrededor de $x_0 = 0$. Aproxime $\sqrt{0.5}$, $\sqrt{0.75}$, $\sqrt{1.25}$, y $\sqrt{1.5}$ mediante $P_3(x)$ y encuentre los errores reales.

11. Encuentre el segundo polinomio de Taylor $P_2(x)$ para la función $f(x) = e^x \cos x$ alrededor de $x_0 = 0$.

a. Use $P_2(0.5)$ para aproximar $f(0.5)$. Encuentre un límite superior para el error $|f(0.5) - P_2(0.5)|$ por medio de la fórmula de error y compárela con el error real.

b. Encuentre una cota para el error $|f(x) - P_2(x)|$ al usar $P_2(x)$ para aproximar $f(x)$ en el intervalo $[0, 1]$.

c. Aproxime $\int_0^1 f(x)\,dx$ por medio de $\int_0^1 P_2(x)\,dx$.

d. Encuentre una cota superior para el error en c) usando $\int_0^1 |R_2(x)\,dx|$ y compárela con el error real.

12. Repita el ejercicio 11 usando $x_0 = \pi/6$.

13. Encuentre el tercer polinomio de Taylor $P_3(x)$ para la función $f(x) = (x-1)\ln x$ alrededor de $x_0 = 1$.

a. Use $P_3(0.5)$ para aproximar $f(0.5)$. Encuentre una cota superior para el error $|f(0.5) - P_3(0.5)|$ por medio de la fórmula de error y compárela con el error real.

b. Encuentre una cota para el error $|f(x) - P_3(x)|$ al utilizar $P_3(x)$ para aproximar $f(x)$ en el intervalo $[0.5, 1.5]$.

c. Aproxime $\int_{0.5}^{1.5} f(x)\,dx$ por medio de $\int_{0.5}^{1.5} P_3(x)\,dx$.

d. Encuentre una cota superior para el error en (c) a través de $\int_{0.5}^{1.5} |R_3(x)\,dx|$ y compárela con el error real.

14. Si $f(x) = 2x\cos(2x) - (x-2)^2$ y $x_0 = 0$.

a. Encuentre el tercer polinomio de Taylor $P_3(x)$ y utilícelo para aproximar $f(0.4)$.

b. Use la fórmula de error en el teorema de Taylor para encontrar una cota superior para el error $|f(0.4) - P_3(0.4)|$. Calcule el error real.

c. Encuentre el cuarto polinomio de Taylor $P_4(x)$ y úselo para aproximar $f(0.4)$.

d. Utilice la fórmula de error en el teorema de Taylor para encontrar un límite superior para el error $|f(0.4) - P_4(0.4)|$. Calcule el error real.

15. Encuentre el cuarto polinomio de Taylor $P_4(x)$ para la función $f(x) = xe^{x^2}$ alrededor de $x_0 = 0$.

a. Encuentre una cota superior para $|f(x) - P_4(x)|$, para $0 \le x \le 0.4$.

b. Aproxime $\int_0^{0.4} f(x)\,dx$ por medio de $\int_0^{0.4} P_4(x)\,dx$.

c. Encuentre una cota superior para el error en b) usando $\int_0^{0.4} P_4(x)\,dx$.

d. Aproxime $f'(0.2)$ usando $P_4'(0.2)$ y encuentre el error.

16. Utilice el término error de un polinomio de Taylor para calcular el error implicado al usar sen $x \approx x$ para aproximar sen $1°$.

17. Utilice un polinomio de Taylor alrededor de $\pi/4$ para aproximar cos $42°$ con una precisión de 10^{-6}.

18. Si $f(x) = (1-x)^{-1}$ y $x_0 = 0$. Encuentre el n-ésimo polinomio de Taylor $P_n(x)$ para $f(x)$ alrededor de x_0. Encuentre un valor de n necesario para $P_n(x)$ para aproximar $f(x)$ dentro de 10^{-6} en $[0, 0.5]$.

19. Si $f(x) = e^x$ y $x_0 = 0$. Encuentre el n-ésimo polinomio de Taylor $P_n(x)$ para $f(x)$ alrededor de x_0. Encuentre un valor de n necesario para que $P_n(x)$ aproxime a $f(x)$ con una precisión de 10^{-6} en $[0,0.5]$.

20. Encuentre el n-ésimo polinomio de Maclaurin $P_n(x)$ para $f(x) = \arctan x$.

21. El polinomio $P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$ se utilizará para aproximar $f(x) = \cos x$ en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Encuentre una cota para el error máximo.

22. Use el teorema del valor intermedio 1.11 y el teorema de Rolle 1.7 para mostrar que la gráfica de $f(x) = x^3 + 2x + k$ corta al eje x exactamente una vez, independientemente del valor de la constante k.

23. Un polinomio de Maclaurin para e^x se utiliza para obtener la aproximación 2.5 para e. La cota del error en esta aproximación se establece como $E = \frac{1}{6}$. Encuentre una cota para el error en E.

24. La *función de error* definida por

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

da la probabilidad de que cualquiera de una serie de pruebas se encontrará dentro de las unidades x de la media, suponiendo que las pruebas tienen una distribución normal con una media de 0 y una desviación estándar de $\sqrt{2}/2$. Esta integral no se puede evaluar en términos de funciones elementales, por lo que es preciso usar una técnica de aproximación.

a. Integre la serie de Maclaurin para e^{-x^2} para mostrar que

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)k!}.$$

b. La función de error también se puede expresar en forma

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x^{2k+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)}.$$

c. Verifique que las dos series concuerdan en $k = 1, 2, 3$ y 4. [*Sugerencia:* Use la serie de Maclaurin para e^{-x^2}.]

d. Use la serie en la parte a) para aproximar erf(1) con una precisión de 10^{-7}.

e. Use el mismo número de términos que se utilizaron en la parte c) para aproximar erf(1) con la serie en la parte b).

f. Explique por qué se presentan dificultades al usar la serie en la parte b) para aproximar erf(x).

EJERCICIOS TEÓRICOS

25. El n-ésimo polinomio de Taylor para una función f en x_0 algunas veces recibe el nombre de polinomio de grado a los más n que se aproxima "mejor" a f cerca de x_0.

a. Explique porqué esta descripción es precisa.

b. Encuentre el polinomio cuadrático que se aproxima mejor a la función f cerca de $x_0 = 1$ si la recta tangente en $x_0 = 1$ tiene la ecuación $y = 4x - 1$ y si $f''(1) = 6$.

26. Pruebe el teorema generalizado de Rolle, teorema 1.10, al verificar lo siguiente.

a. Use el teorema de Rolle para mostrar que $f'(z_i) = 0$ para $n - 1$ números en $[a, b]$ con $a < z_1 < z_2 < \ldots < z_{n-1} < b$.

b. Use el teorema de Rolle para mostrar que $f''(w_i) = 0$ para $n - 2$ números en $[a, b]$ con $z_1 < w_1 < z_2 < w_2 \ldots w_{n-2} < z_{n-1} < b$.

c. Continúe los argumentos en las partes a) y b) para mostrar que para cada $j = 1, 2, \ldots, n - 1$, existen $n - j$ números distintos en $[a, b]$, en donde $f^{(j)}$ es 0.

d. Muestre que la parte c) implica la conclusión del teorema.

27. El ejemplo 3 establecía que para todas las x tenemos $|\operatorname{sen} x| \le |x|$. Utilice lo siguiente para verificar esta declaración.

a. Muestre que para todas las $x \ge 0$, $f(x) = x - \operatorname{sen} x$ no disminuye, lo que implica que $\operatorname{sen} x \le x$ con igualdad, sólo cuando $x = 0$.

b. Use el hecho de que la función seno es impar para obtener la conclusión.

28. Una función $f:[a, b] \to \mathbb{R}$ se dice que satisface una *condición de Lipschitz* con constante de Lipschitz L en $[a, b]$ si, para cada $x, y \in [a, b]$, tenemos $|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$.

a. Muestre que si f satisface una *condición de Lipschitz* con constante de Lipschitz L en un intervalo $[a, b]$, entonces $f \in C[a, b]$.

b. Muestre que si f tiene una derivada limitada en $[a, b]$ por L, entonces f satisface una condición de Lipschitz con constante de Lipschitz L en $[a, b]$.

c. Proporcione un ejemplo de una función continua en un intervalo cerrado, pero que no satisface una condición de Lipschitz en el intervalo.

29. Suponga que $f \in C[a, b]$ y x_1 y x_2 se encuentran en $[a, b]$.

a. Muestre que existe un número ξ entre x_1 y x_2 con

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{1}{2} f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_2).$$

b. Suponga que c_1 y c_2 son constantes positivas. Muestre que existe un número entre x_1 y x_2 con

$$f(\xi) = \frac{c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)}{c_1 + c_2}.$$

c. Proporcione un ejemplo para mostrar que el resultado en la parte b) no necesariamente se mantiene cuando c_1 y c_2 tienen signos opuestos con $c_1 \neq -c_2$.

30. Sea $f \in C[a, b]$ y sea p en el intervalo abierto (a, b).

a. Suponga que $f(p) \neq 0$. Muestre que existe un $\delta > 0$ tal que para todas las x en $[p - \delta, p + \delta]$, $f(x) \neq 0$, con $[p - \delta, p + \delta]$ es subconjunto de $[a, b]$.

b. Suponga que $f(p) = 0$ y $k > 0$ es dada. Muestre que existe un $\delta > 0$ tal que para toda x en $|f(x)| \leq k$, $[p - \delta, p + \delta]$, con $[p - \delta, p + \delta]$ es un subconjunto de $[a, b]$.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Con palabras propias, describa la condición de Lipschitz. Proporcione varios ejemplos de funciones que satisfacen esta condición o de funciones que no la satisfacen.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1.2

1. Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de p por p^*.

a. $p = \pi$, $p^* = 22/7$ **b.** $p = \pi$, $p^* = 3.1416$
c. $p = e$, $p^* = 2.718$ **d.** $p = \sqrt{2}$, $p^* = 1.414$

2. Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de p por p^*.

a. $p = e^{10}$, $p^* = 22000$ **b.** $p = 10^{\pi}$, $p^* = 1400$
c. $p = 8!$, $p^* = 39900$ **d.** $p = 9!$, $p^* = \sqrt{18\pi}(9/e)^9$

3. Suponga que p^* se debe aproximar a p con error relativo máximo de 10^{-3}. Encuentre el intervalo más largo en el que se debe encontrar p^* para cada valor de p.

a. 150 **b.** 900
c. 1500 **d.** 90

4. Encuentre el intervalo más largo en el que se debe encontrar p^* para aproximarse a p con error relativo máximo de 10^{-4} para cada valor de p.

a. π **b.** e
c. $\sqrt{2}$ **d.** $\sqrt[3]{7}$

5. Realice los siguientes cálculos i) de forma exacta, ii) con aritmética de corte de tres dígitos y iii) con aritmética de redondeo de tres dígitos. iv) Calcule los errores relativos en las partes ii) y iii).

a. $\frac{4}{5} + \frac{1}{3}$ **b.** $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}$
c. $\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{11}\right) + \frac{3}{20}$ **d.** $\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{11}\right) - \frac{3}{20}$

6. Utilice la aritmética de redondeo de tres dígitos para realizar lo siguiente. Calcule los errores absoluto y relativo con el valor exacto determinado para por lo menos cinco dígitos.

a. $133 + 0.921$ **b.** $133 - 0.499$
c. $(121 - 0.327) - 119$ **d.** $(121 - 119) - 0.327$

7. Use la aritmética de redondeo de tres dígitos para realizar lo siguiente. Calcule los errores absoluto y relativo con el valor exacto determinado para por lo menos cinco dígitos.

a. $\dfrac{\frac{13}{14} - \frac{6}{7}}{2e - 5.4}$ **b.** $-10\pi + 6e - \frac{3}{62}$
c. $\left(\frac{2}{9}\right) \cdot \left(\frac{9}{7}\right)$ **d.** $\dfrac{\sqrt{13} + \sqrt{11}}{\sqrt{13} - \sqrt{11}}$

8. Repita el ejercicio 7 mediante aritmética de redondeo de cuatro dígitos.

9. Repita el ejercicio 7 mediante aritmética de redondeo de tres dígitos.

10. Repita el ejercicio 7 mediante aritmética de redondeo de cuatro dígitos.

11. Los primeros tres términos diferentes a cero de la serie de Maclaurin para la función arcotangente son $x - (1/3)x^3 + (1/5)x^5$. Calcule los errores absoluto y relativo en las siguientes aproximaciones de π mediante el polinomio en lugar del arcotangente:

a. $4\left[\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right]$

b. $16 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4 \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$

12. El número e se puede definir por medio de $e = \sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)$, donde $n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$ para $n \neq 0$ y $0! = 1$. Calcule los errores absoluto y relativo en la siguiente aproximación de e:

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n!}$ **b.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{10} \frac{1}{n!}$

13. Si

$$f(x) = \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}.$$

a. Encuentre $\lim_{x\to 0} f(x)$.
b. Utilice aritmética de redondeo de cuatro dígitos para evaluar $f(0.1)$.
c. Reemplace cada función exponencial con su tercer polinomio de Maclaurin y repita la parte b).
d. El valor real es $f(0.1) = -1.99899998$. Encuentre el error relativo para los valores obtenidos en las partes b) y c).

14. Si

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}.$$

a. Encuentre $\lim_{x\to 0}(e^x - e^{-x})/x$.
b. Use la aritmética de redondeo de tres dígitos para evaluar $f(0.1)$.
c. Reemplace cada función exponencial con su tercer polinomio de Maclaurin y repita la parte b).
d. El valor real es $f(0.1) = 2.003335000$. Encuentre el error relativo para los valores obtenidos en las partes b) y c).

15. Use la aritmética de redondeo de cuatro dígitos y las fórmulas (1.1), (1.2) y (1.3) para encontrar las aproximaciones más precisas para las raíces de las siguientes ecuaciones cuadráticas. Calcule los errores absoluto y relativo.

a. $\frac{1}{3}x^2 - \frac{123}{4}x + \frac{1}{6} = 0$
b. $\frac{1}{3}x^2 + \frac{123}{4}x - \frac{1}{6} = 0$
c. $1.002x^2 - 11.01x + 0.01265 = 0$
d. $1.002x^2 + 11.01x + 0.01265 = 0$

16. Use la aritmética de redondeo de cuatro dígitos y las fórmulas (1.1), (1.2) y (1.3) para encontrar las aproximaciones más precisas para las raíces de las siguientes ecuaciones cuadráticas. Calcule los errores absoluto y relativo.

a. $x^2 - \sqrt{7}x + \sqrt{2} = 0$
b. $\pi x^2 + 13x + 1 = 0$
c. $x^2 + x - e = 0$
d. $x^2 - \sqrt{35}x - 2 = 0$

17. Repita el ejercicio 15 mediante aritmética de corte de cuatro dígitos.

18. Repita el ejercicio 16 con aritmética de corte de cuatro dígitos.

19. Use el formato real de 64 bits de longitud para encontrar el equivalente decimal de los siguientes números de máquina de punto flotante.

a. 0 10000001010 1001001100000000000000000000000000000000000000000000
b. 1 10000001010 1001001100000000000000000000000000000000000000000000
c. 0 01111111111 0101001100000000000000000000000000000000000000000000
d. 0 01111111111 0101001100000000000000000000000000000000000000000001

20. Encuentre los siguientes números de máquina más grande y más pequeño en formato decimal para los números proporcionados en el ejercicio 19.

21. Suponga que dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) se encuentran en línea recta con $y_1 \neq y_0$. Existen dos fórmulas para encontrar la intersección x de la línea:

$$x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0} \quad \text{y} \quad x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0) y_0}{y_1 - y_0}.$$

a. Muestre que ambas fórmulas son algebraicamente correctas.

b. Use los datos $(x_0, y_0) = (1.31, 3.24)$ y $(x_1, y_1) = (1.93, 4.76)$ y la aritmética de redondeo de tres dígitos para calcular la intersección con x de ambas maneras. ¿Cuál método es mejor y por qué?

22. El polinomio de Taylor de grado n para $f(x) = e^x$ es $\sum_{i=0}^{n}(x^i/i!)$. Use el polinomio de Taylor de grado nueve y aritmética de corte de tres dígitos para encontrar una aproximación para e^{-5} con cada uno de los siguientes métodos.

a. $e^{-5} \approx \sum_{i=0}^{9} \frac{(-5)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{9} \frac{(-1)^i 5^i}{i!}$

b. $e^{-5} = \frac{1}{e^5} \approx \frac{1}{\sum_{i=0}^{9} \frac{5^i}{i!}}$.

c) Un valor aproximado de e^{-5} correcto para tres dígitos es 6.74×10^{-3}. ¿Qué fórmula, a) o b), es más precisa y por qué?

23. El sistema lineal dos por dos

$$ax + by = e,$$
$$cx + dy = f,$$

donde a, b, c, d, e, f están dadas, se puede resolver para x y y como sigue:

$$\text{determine } m = \frac{c}{a}, \quad \text{siempre que } a \neq 0;$$
$$d_1 = d - mb;$$
$$f_1 = f - me;$$
$$y = \frac{f_1}{d_1};$$
$$x = \frac{(e - by)}{a}.$$

Resuelva los siguientes sistemas lineales con aritmética de redondeo de cuatro dígitos.

a. $1.130x - 6.990y = 14.20$
$1.013x - 6.099y = 14.22$

b. $8.110x + 12.20y = -0.1370$
$-18.11x + 112.2y = -0.1376$

24. Repita el ejercicio 23 con aritmética de corte de cuatro dígitos.

25. **a.** Muestre que la técnica anidada polinomial descrita en el ejemplo 6 también se puede aplicar a la evaluación de

$$f(x) = 1.01e^{4x} - 4.62e^{3x} - 3.11e^{2x} + 12.2e^x - 1.99.$$

b. Use la aritmética de redondeo de tres dígitos y la suposición de que $e^{1.53} = 4.62$ y el hecho de que $e^{nx} = (e^x)^n$ para evaluar $f(1.53)$ como se establece en la parte a).

c. Haga nuevamente el cálculo en la parte b) al anidar primero los cálculos.

d. Compare las aproximaciones en las partes b) y c) con el resultado verdadero de tres dígitos $f(1.53) = -7.61$.

EJERCICIOS APLICADOS

26. El ejemplo de apertura para este capítulo describía un experimento físico que involucra la temperatura de un gas bajo presión. En esta aplicación se nos proporcionaba $P = 1.00$ atm, $V = 0.100$ m^3, $N = 0.00420$ mol y $R = 0.08206$. Al resolver para T en la ley de gas ideal obtenemos

$$T = \frac{PV}{NR} = \frac{(1.00)(0.100)}{(0.00420)(0.08206)} = 290.15 \text{ K} = 17°\text{C}.$$

En el laboratorio, se encontró que T era 15°C en estas condiciones y, cuando al duplicar la presión y reducir a la mitad el volumen, T era 19°C. Suponga que los datos son valores redondeados exactos para los lugares determinados y muestre que ambas cifras de laboratorio se encuentran dentro de los límites de precisión para la ley de gas ideal.

EJERCICIOS TEÓRICOS

27. El coeficiente binomial

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}$$

describe el número de formas de seleccionar un subconjunto de k objetos a partir de un conjunto de m elementos.

a. Suponga números máquina decimales de la forma

$$\pm 0.d_1d_2d_3d_4 \times 10^n, \quad \text{con } 1 \leq d_1 \leq 9, \; 0 \leq d_i \leq 9,$$

$$\text{sí } i = 2, 3, 4 \quad \text{y} \quad |n| \leq 15.$$

¿Cuál es el valor más grande de m para el que el coeficiente binomial $\binom{m}{k}$ se puede calcular para todas las k por medio de la definición sin causar desbordamiento (sobreflujo)?

b. Muestre que $\binom{m}{k}$ también se puede calcular a través de

$$\binom{m}{k} = \left(\frac{m}{k}\right)\left(\frac{m-1}{k-1}\right)\cdots\left(\frac{m-k+1}{1}\right).$$

c. ¿Cuál es el valor más grande de m para el que el coeficiente binomial $\binom{m}{3}$ se puede calcular con la fórmula en la parte b) sin causar desbordamiento?

d. Use la ecuación en b) y la aritmética de corte de cuatro dígitos para calcular el número de juegos de cinco cartas posible en una baraja de 52 cartas. Calcule los errores real y relativo.

28. Suponga que $fl(y)$ es una aproximación de redondeo de k dígitos para y. Muestre que

$$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right| \leq 0.5 \times 10^{-k+1}.$$

[*Sugerencia:* Si $d_{k+1} < 5$, entonces $fl(y) = 0.d_1d_2 \ldots d_k \times 10^n$. Si $d_{k+1} \geq 5$, entonces $fl(y) = 0.d_1d_2 \ldots d_k \times 10^n + 10^{n-k}$.]

29. Si $f \in C[a, b]$ es una función cuya derivada existe en (a, b). Suponga que f se va a evaluar en x_0 dentro de (a, b), pero en lugar de calcular el valor real $f(x_0)$, el valor aproximado, $\tilde{f}(x_0)$, es el valor real de f en $x_0 + \epsilon$; es decir, $\tilde{f}(x_0) = f(x_0 + \epsilon)$.

a. Utilice el teorema del valor medio 1.8 para calcular el error absoluto $|f(x_0) - \tilde{f}(x_0)|$ y el error relativo $|f(x_0) - \tilde{f}(x_0)|/|f(x_0)|$, al suponer que $f(x_0) \neq 0$.

b. Si $\epsilon = 5 \times 10^{-6}$ y $x_0 = 1$, encuentre límites para los errores absoluto y relativo para

i. $f(x) = e^x$

ii. $f(x) = \text{sen } x$

c. Repita la parte b) con $\epsilon = (5 \times 10^{-6})x_0$ y $x_0 = 10$.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Analice la diferencia entre la aritmética realizada por computadora y la aritmética tradicional. ¿Por qué es tan importante reconocer la diferencia?
2. Proporcione diferentes ejemplos de la vida real acerca de errores catastróficos que se han presentado a partir del uso de la aritmética digital finita y explique lo que salió mal.
3. Analice las múltiples formas de redondear números.
4. Analice la diferencia entre un número escrito en notación estándar y uno que está escrito en formato de punto flotante decimal, normalizado. Proporcione varios ejemplos.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 1.3

1. Utilice aritmética de corte de tres dígitos para calcular las siguientes sumas. Para cada parte, ¿qué método es más preciso y por qué?

   a. $\sum_{i=1}^{10}(1/i^2)$ primero por $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{100}$ y luego por $\frac{1}{100}+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{1}$.

   b. $\sum_{i=1}^{10}(1/i^3)$ primero por $\frac{1}{1}+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{1000}$ y luego por $\frac{1}{1000}+\frac{1}{729}+\cdots+\frac{1}{1}$.

2. El número e se define mediante $e=\sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)$, donde $n!=n(n-1)\cdots 2\cdot 1$ para $n\neq 0$ y $0!=1$. Utilice aritmética de corte de cuatro dígitos para calcular las siguientes aproximaciones para e y determine los errores absoluto y relativo.

   a. $e\approx\displaystyle\sum_{n=0}^{5}\frac{1}{n!}$

   b. $e\approx\displaystyle\sum_{j=0}^{5}\frac{1}{(5-j)!}$

   c. $e\approx\displaystyle\sum_{n=0}^{10}\frac{1}{n!}$

   d. $e\approx\displaystyle\sum_{j=0}^{10}\frac{1}{(10-j)!}$

3. La serie de Maclaurin para la función arcotangente converge para $-1<x\leq 1$ y está dada por

$$\arctan x=\lim_{n\to\infty}P_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{x^{2i-1}}{2i-1}.$$

   a. Utilice el hecho de que $\tan\pi/4=1$ para determinar el número n de términos de la serie que se necesita sumar para garantizar que $|4P_n(1)-\pi|<10^{-3}$.

   b. El lenguaje de programación C++ requiere que el valor de π se encuentre dentro de 10^{-10}. ¿Cuántos términos de la serie se necesitarían sumar para obtener este grado de precisión?

4. El ejercicio 3 describe con detalle un método bastante ineficiente para obtener una aproximación para π. El método puede mejorar considerablemente al observar que $\pi/4=$ arcotangente $\frac{1}{2}$ + arcotangente $\frac{1}{3}$ y evaluar la serie para la arcotangente en $\frac{1}{2}$ y en $\frac{1}{3}$. Determine el número de términos que deben sumarse para garantizar una aproximación para π dentro de 10^{-3}.
5. Otra fórmula para calcular π se puede deducir a partir de la identidad $\pi/4=4$ arcotangente $\frac{1}{5}-$ arcotangente $\frac{1}{239}$. Determine el número de términos que se deben sumar para garantizar una aproximación π dentro de 10^{-3}.
6. Encuentre la rapidez de convergencia de las siguientes sucesiones conforme $n\to\infty$.

   a. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\operatorname{sen}\frac{1}{n}=0$

   b. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\operatorname{sen}\frac{1}{n^2}=0$

   c. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)^2=0$

   d. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}[\ln(n+1)-\ln(n)]=0$

7. Encuentre la rapidez de convergencia de las siguientes funciones como $h\to 0$.

   a. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}h}{h}=1$

   b. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}=0$

   c. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}h-h\cos h}{h}=0$

   d. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1-e^h}{h}=-1$

EJERCICIOS TEÓRICOS

8. Suponga que $0 < q < p$ y que $\alpha_n = \alpha + O\left(n^{-p}\right)$.

a. Muestre que $\alpha_n = \alpha + O\left(n^{-q}\right)$.

b. Haga una tabla donde enumere $1/n$, $1/n^2$, $1/n^3$, y $1/n^4$ para $n = 5, 10, 100$, y 1000, y analice la rapidez de variación de convergencia de estas sucesiones conforme n se vuelve más grande.

9. Suponga que $0 < q < p$ y que $F(h) = L + O\left(h^p\right)$.

a. Muestre que $F(h) = L + O\left(h^q\right)$.

b. Haga una tabla en donde enumere h, h^2, h^3 y h^4 para $h = 0.5, 0.1, 0.01$ y 0.001 y analice la rapidez de convergencia de estas potencias de h conforme h se aproxima a cero.

10. Suponga que cuando x se aproxima a cero,

$$F_1(x) = L_1 + O(x^\alpha) \quad \text{y} \quad F_2(x) = L_2 + O(x^\beta).$$

Si c_1 y c_2 son constantes diferentes a cero y definen

$$F(x) = c_1F_1(x) + c_2F_2(x) \quad \text{y} \quad G(x) = F_1(c_1x) + F_2(c_2x).$$

Muestre que si $\gamma =$ mínimo $\{\alpha, \beta\}$, entonces, conforme x se aproxima a cero,

a. $F(x) = c_1L_1 + c_2L_2 + O(x^\gamma)$

b. $G(x) = L_1 + L_2 + O(x^\gamma)$.

11. La sucesión $\{F_n\}$ descrita por $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, y $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, si $n \geq 0$, recibe el nombre de *sucesión de Fibonacci*. Sus términos se presentan de manera natural en muchas especies botánicas, en especial aquellas con pétalos o escalas ordenadas en forma de espiral logarítmica. Considere la sucesión $\{x_n\}$, donde $x_n = F_{n+1}/F_n$. Suponga que existe $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, muestre que $x = (1 + \sqrt{5})/2$. Este número recibe el nombre de *número áureo*.

12. Muestre que la sucesión de Fibonacci también satisface la ecuación

$$F_n \equiv \tilde{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

13. Describa la salida del siguiente algoritmo. ¿Cómo se compara este algoritmo con la ilustración en la página 24?

ENTRADA $n, x_1, x_2, \ldots, x_n$.
SALIDA SUM.
Paso 1 Determine SUM = x_1.
Paso 2 Para $i = 2, 3, \ldots, n$ efectúe el paso 3.
    Paso 3 SUM = SUM + x_i.
Paso 4 SALIDA SUM;
    PARE.

14. Compare los siguientes tres algoritmos. ¿Cuándo es correcto el algoritmo de la parte 1a?

a. ENTRADA $n, x_1, x_2, \ldots, x_n$.
SALIDA PRODUCT.
Paso 1 Determine PRODUCT = 0.
Paso 2 Para $i = 1, 2, \ldots, n$ haga
    Determine PRODUCT = PRODUCT * x_i.
Paso 3 SALIDA PRODUCT;
    PARE.

b. ENTRADA $n, x_1, x_2, \ldots, x_n$.
SALIDA PRODUCT.
Paso 1 Determine PRODUCT = 1.
Paso 2 Para $i = 1, 2, \ldots, n$ haga
    Set PRODUCT = PRODUCT * x_i.
Paso 3 SALIDA PRODUCT;
    PARE.

c. ENTRADA $n, x_1, x_2, \ldots, x_n$.
SALIDA PRODUCT.
Paso 1 Determine PRODUCT = 1.
Paso 2 Para $i = 1, 2, \ldots, n$ haga
si $x_i = 0$ entonces determine PRODUCT = 0;
SALIDA PRODUCT;
PARE
también determine PRODUCT = PRODUCT * x_i.
Paso 3 SALIDA PRODUCT;
PARE.

15. a. ¿Cuántas multiplicaciones y sumas se requieren para determinar una suma de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_i b_j?$$

b. Modifique la suma en la parte a) a un formato equivalente que reduzca el número de cálculos.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Escriba un algoritmo para sumar la serie finita $\sum_{i=1}^{n} x_i$ en orden inverso.
2. Construya un algoritmo que tenga como entrada un entero $n \geq 1$, números $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y un número x y que produzca como salida el producto $(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$.
3. Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ es un polinomio y si se proporciona x_0. Construya un algoritmo para evaluar $P(x_0)$ por medio de la multiplicación anidada.
4. Las ecuaciones (1.2) y (1.3) en la sección 1.2 proporcionan formas alternativas para las raíces x_1 y x_2 de $ax^2 + bx + c = 0$. Construya un algoritmo con entrada a, b, c y salida x_1, x_2 que calcule las raíces x_1 y x_2 (que pueden ser iguales con conjugados complejos) mediante la mejor fórmula para cada raíz.
5. Suponga que

$$\frac{1 - 2x}{1 - x + x^2} + \frac{2x - 4x^3}{1 - x^2 + x^4} + \frac{4x^3 - 8x^7}{1 - x^4 + x^8} + \cdots = \frac{1 + 2x}{1 + x + x^2},$$

para $x < 1$ y si $x = 0.25$. Escriba y ejecute un algoritmo que determine el número de términos necesarios en el lado izquierdo de la ecuación de tal forma que el lado izquierdo difiera del lado derecho en menos de 10^{-6}.

6. ¿Qué calculan los algoritmos en la parte a) y en la parte b)?

a. ENTRADA a_0, a_1, x_0, x_1.
SALIDA S.
Paso 1 Para $i = 0, 1$ haga que sea $s_i = a_i$.
Paso 2 Para $i = 0, 1$ haga
para $j = 0, 1$ haga
para $i \neq j$ determine $s_i = \dfrac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} * s_i$.
Paso 3 Determine $S = s_0 + s_1$.
Paso 4 SALIDA S;
PARE.

b. ENTRADA $a_0, a_1, a_2, x_0, x_1, x_2$.
SALIDA S.
Paso 1 Para $i = 0, \ldots, 2$ haga que sea $s_i = a_i$.
Paso 2 Para $i = 0, 1, 2$ haga
para $j = 0, 1$ haga
si $i \neq j$ entonces determine $s_i = \dfrac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} * s_i$.
Paso 3 Determine $S = s_0 + s_1 + s_2$.
Paso 4 SALIDA S;
PARE.

c. Generalice los algoritmos para tener entrada $n, a_0, \ldots, a_n, x_0, \ldots, x_n$. ¿Cuál es el valor de entrada S?

PREGUNTA DE ANÁLISIS (FINAL DEL CAPÍTULO)

1. Analice las diferencias entre algunos de los paquetes de software disponibles para cálculo numérico.

CONCEPTOS CLAVE

Algoritmos de representación de dígitos finitos
Aritmética de dígitos finitos
Convergencia
Continuidad
Diferenciabilidad
Errores de redondeo del teorema de Taylor
Estabilidad
Integración
Integral Riemann
Límites
Software numérico
Teorema de Rolle
Teorema del valor extremo
Teorema del valor intermedio
Teorema del valor medio
Teorema generalizado de Rolle

REVISIÓN DEL CAPÍTULO

Revisemos el capítulo 1 en términos de las habilidades que necesitará en los siguientes capítulos.

En la sección 1.1 debe ser capaz de utilizar el teorema de Rolle, el teorema del valor intermedio y el teorema del valor extremo, según corresponda para:

i. Determinar si una ecuación tiene por lo menos una solución dentro de un intervalo determinado.

ii. Encontrar un intervalo que contenga una solución para una ecuación determinada.

iii. Mostrar que $f'(x) = 0$ en un intervalo determinado.

iv. Maximizar una función en un intervalo determinado.

También debe ser capaz de usar el teorema de Taylor para encontrar el polinomio de Taylor de grado n^{th} $P_n(x)$ para una función determinada, f alrededor de x_0. Además, debe ser capaz de usar el teorema del valor extremo para maximizar el término restante (error) para la expansión. Los estudiantes también deben observar que al calcular una cota superior para el término restante $R_n(x)$ normalmente minimizamos el límite del error. Esto se logra al encontrar el máximo del valor absoluto de una derivada particular sobre el intervalo adecuado.

En la sección 1.2 usted debe ser capaz de convertir números al *formato de máquina decimal de k dígitos*. También de utilizar de manera competente la aritmética de redondeo o corte, según se requiera. Además debe ser capaz de calcular el error real, el error absoluto y el error relativo en las aproximaciones de p mediante p^* y de encontrar el intervalo más grande en el que p^* debe encontrarse para aproximarse a p con un error relativo que se encuentre dentro de la tolerancia específica. Los estudiantes deben saber que al realizar aritmética de dígitos finitos, cada cálculo individual debe redondearse o cortarse antes de realizar cualquier otro paso.

En la sección 1.3, siempre que sea posible, debe ser capaz de determinar el número de n términos de una serie que se sumará para garantizar que el error absoluto se encuentra dentro de una tolerancia específica. Al tratar con series alternantes, el error producido por el truncamiento de las series en cualquier término es menor a la magnitud del siguiente término. Siempre que sea posible, debe ser capaz de determinar la rapidez de convergencia de una sucesión. También debe tener la capacidad para seguir los pasos de un algoritmo y describir la salida.

La sección 1.4 resalta algunas de las diferencias entre los paquetes de software de propósito general y los algoritmos provistos en este texto. La principal "ventaja" de esta sección es exponerse al hecho de que los paquetes de software de propósito general consideran dos formas de reducir errores debido a redondeo máquina, subdesbordamiento y desbordamiento. También describe el rango de entrada que conducirá a resultados de cierta precisión específica.