Capítulo 6

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.1

1. Para cada uno de los siguientes sistemas lineales obtenga, de ser posible, una solución con métodos gráficos. Explique los resultados desde un punto de vista geométrico.

a. $x_1 + 2x_2 = 3,$
$x_1 - x_2 = 0.$

b. $x_1 + 2x_2 = 3,$
$2x_1 + 4x_2 = 6.$

c. $x_1 + 2x_2 = 0,$
$2x_1 + 4x_2 = 0.$

d. $2x_1 + x_2 = -1,$
$4x_1 + 2x_2 = -2,$
$x_1 - 3x_2 = 5.$

2. Para cada uno de los siguientes sistemas lineales, obtenga, de ser posible, una solución con métodos gráficos. Explique los resultados desde un punto de vista geométrico.

a. $x_1 + 2x_2 = 0,$
$x_1 - x_2 = 0.$

b. $x_1 + 2x_2 = 3,$
$-2x_1 - 4x_2 = 6.$

c. $2x_1 + x_2 = -1,$
$x_1 + x_2 = 2,$
$x_1 - 3x_2 = 5.$

d. $2x_1 + x_2 + x_3 = 1,$
$2x_1 + 4x_2 - x_3 = -1.$

3. Utilice la eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás y aritmética de redondeo de dos dígitos para resolver los siguientes sistemas lineales. No reordene las ecuaciones. (La solución exacta para cada sistema es $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$.).

a. $4x_1 - x_2 + x_3 = 8,$
$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3,$
$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11.$

b. $4x_1 + x_2 + 2x_3 = 9,$
$2x_1 + 4x_2 - x_3 = -5,$
$x_1 + x_2 - 3x_3 = -9.$

4. Utilice la eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás y aritmética de redondeo de dos dígitos para resolver los siguientes sistemas lineales. No reordene las ecuaciones. (La solución exacta para cada sistema es $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.)

a. $-x_1 + 4x_2 + x_3 = 8,$
$\frac{5}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 1,$
$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 11.$

b. $4x_1 + 2x_2 - x_3 = -5,$
$\frac{1}{9}x_1 + \frac{1}{9}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -1,$
$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 9.$

5. Utilice el algoritmo de eliminación gaussiana para resolver, de ser posible, los siguientes sistemas lineales, y determine si se necesitan intercambios de fila:

a. $x_1 - x_2 + 3x_3 = 2,$
$3x_1 - 3x_2 + x_3 = -1,$
$x_1 + x_2 = 3.$

b. $2x_1 - 1.5x_2 + 3x_3 = 1,$
$-x_1 + 2x_3 = 3,$
$4x_1 - 4.5x_2 + 5x_3 = 1.$

c. $2x_1 = 3,$
$x_1 + 1.5x_2 = 4.5,$
$-3x_2 + 0.5x_3 = -6.6,$
$2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0.8.$

d. $x_1 + x_2 + x_4 = 2,$
$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1,$
$4x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0,$
$3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3.$

6. Utilice el algoritmo de eliminación gaussiana para resolver, de ser posible, los siguientes sistemas lineales, y determine si se necesitan intercambios de fila:

a. $x_2 - 2x_3 = 4,$
$x_1 - x_2 + x_3 = 6,$
$x_1 - x_3 = 2.$

b. $x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 4,$
$2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 5,$
$x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 2,$
$x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 + x_4 = 5.$

c. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 6, \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 5, \\ x_4 &= 5, \\ x_3 - x_4 &= 3. \end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3. \end{aligned}$$

7. Use el algoritmo 6.1 y la aritmética computacional de precisión única para resolver los siguientes sistemas lineales.

a. $$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}x_1 + \tfrac{1}{5}x_2 + \tfrac{1}{6}x_3 &= 9, \\ \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + \tfrac{1}{5}x_3 &= 8, \\ \tfrac{1}{2}x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8. \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} 3.333x_1 + 15920x_2 - 10.333x_3 &= 15913, \\ 2.222x_1 + 16.71x_2 + 9.612x_3 &= 28.544, \\ 1.5611x_1 + 5.1791x_2 + 1.6852x_3 &= 8.4254. \end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned} x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 + \tfrac{1}{4}x_4 &= \tfrac{1}{6}, \\ \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{4}x_3 + \tfrac{1}{5}x_4 &= \tfrac{1}{7}, \\ \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 + \tfrac{1}{5}x_3 + \tfrac{1}{6}x_4 &= \tfrac{1}{8}, \\ \tfrac{1}{4}x_1 + \tfrac{1}{5}x_2 + \tfrac{1}{6}x_3 + \tfrac{1}{7}x_4 &= \tfrac{1}{9}. \end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 &= 7, \\ x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 2, \\ -2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= -5, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_5 &= 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 3. \end{aligned}$$

8. Use el algoritmo 6.1 y aritmética computacional de precisión única para resolver los siguientes sistemas lineales.

a. $$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{4}x_2 - \tfrac{1}{8}x_3 &= 0, \\ \tfrac{1}{3}x_1 - \tfrac{1}{6}x_2 + \tfrac{1}{9}x_3 &= 1, \\ \tfrac{1}{7}x_1 + \tfrac{1}{7}x_2 + \tfrac{1}{10}x_3 &= 2. \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} 2.71x_1 + x_2 + 1032x_3 &= 12, \\ 4.12x_1 - x_2 + 500x_3 &= 11.49, \\ 3.33x_1 + 2x_2 - 200x_3 &= 41. \end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned} \pi x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ ex_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1, \\ x_1 + x_2 - \sqrt{3}x_3 + x_4 &= 2, \\ -x_1 - x_2 + x_3 - \sqrt{5}x_4 &= 3. \end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 4, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 8, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 - 5x_5 &= 16, \\ 16x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 32. \end{aligned}$$

9. Dado el sistema lineal

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6\alpha x_2 &= 3, \\ 3\alpha x_1 - x_2 &= \tfrac{3}{2}. \end{aligned}$$

a. Encuentre el valor(es) de α para los que el sistema no tiene soluciones.
b. Encuentre el valor(es) de α para los que el sistema tiene un número infinito de soluciones.
c. Suponga que existe una única solución para una α determinada, encuentre la solución.

10. Dado el sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + \alpha x_3 &= -2, \\ -x_1 + 2x_2 - \alpha x_3 &= 3, \\ \alpha x_1 + x_2 + x_3 &= 2. \end{aligned}$$

a. Encuentre el valor(es) de α para los que el sistema no tiene soluciones.
b. Encuentre el valor(es) de α para los que el sistema tiene un número infinito de soluciones.
c. Suponga que existe una única solución para una α determinada, encuentre la solución.

EJERCICIOS APLICADOS

11. Suponga que en un sistema biológico existen n especies de animales y m fuentes de alimento. Si x_j representa la población de las j-ésimas especies, para cada $j = 1, \ldots, n$; b_i representa el suministro diario disponible del i-ésimo alimento y a_{ij} representa la cantidad del i-ésimo alimento consumido en promedio por un miembro de las j-ésima especie. El sistema lineal

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2,\\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

representa un equilibrio donde existe un suministro diario de alimento para cumplir con precisión con el promedio diario de consumo de cada especie.

a. Si

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x} = (x_j) = [1000, 500, 350, 400]$, y $\mathbf{b} = (b_i) = [3500, 2700, 900]$. ¿Existe suficiente alimento para satisfacer el consumo promedio diario?

b. ¿Cuál es el número máximo de animales de cada especie que se podría agregar de forma individual al sistema con el suministro de alimento que cumpla con el consumo?

c. Si la especie 1 se extingue, ¿qué cantidad de incremento individual de las especies restantes se podría soportar?

d. Si la especie 2 se extingue, ¿qué cantidad de incremento individual de las especies restantes se podría soportar?

12. La ecuación integral de Fredholm de segunda clase es una ecuación de la forma

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)\,dt,$$

donde a y b y las funciones f y K están dadas. Para aproximar la función u en el intervalo $[a, b]$, se selecciona una partición $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$ y las ecuaciones

$$u(x_i) = f(x_i) + \int_a^b K(x_i,t)u(t)\,dt, \quad \text{para cada } i = 0, \ldots, m,$$

se resuelven para $u(x_0), u(x_1), \ldots, u(x_m)$. Las integrales se aproximan mediante fórmulas de cuadratura con base en los nodos $x_0, \ldots, x_m$. En nuestro problema, $a = 0, b = 1, f(x) = x^2$, y $K(x,t) = e^{|x-t|}$.

a. Muestre que el sistema lineal

$$u(0) = f(0) + \frac{1}{2}[K(0,0)u(0) + K(0,1)u(1)],$$
$$u(1) = f(1) + \frac{1}{2}[K(1,0)u(0) + K(1,1)u(1)]$$

se resuelve cuando se utiliza la regla de trapecio.

b. Formule y resuelva el sistema lineal que resulta cuando se utiliza la regla de trapecio con $n = 4$.

c. Repita la parte (b) mediante la regla compuesta Simpson.

EJERCICIOS TEÓRICOS

13. Muestre que las operaciones

a. $(\lambda E_i) \to (E_i)$ **b.** $(E_i + \lambda E_j) \to (E_i)$ **c.** $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$

no cambian la solución establecida de un sistema lineal.

14. **Método Gauss-Jordan:** Este método se describe de acuerdo con lo siguiente. Utilice la i-ésima ecuación para eliminar x_i no sólo a partir de las ecuaciones $E_{i+1}, E_{i+2}, \ldots, E_n$, como con el método de eliminación gaussiana, sino también a partir de $E_1, E_2, \ldots, E_{i-1}$. Al reducir $[A, b]$ a

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \ddots & \vdots & a_{2,n+1}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)}) & a_{n,n+1}^{(n)} \end{array}\right],$$

la solución se obtiene al establecer

$$x_i = \frac{a_{i,n+1}^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}},$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Este procedimiento elude la sustitución hacia atrás en la eliminación gaussiana. Construya un algoritmo para el procedimiento Gauss-Jordan a partir del algoritmo 6.1.

15. Use el método Gauss-Jordan y aritmética de redondeo de dos dígitos para resolver los sistemas en el ejercicio 3.

16. Repita el ejercicio 7 con el método Gauss-Jordan.

17. **a.** Muestre que el método Gauss-Jordan requiere

$$\frac{n^3}{2} + n^2 - \frac{n}{2} \quad \text{multiplicaciones/divisiones}$$

y

$$\frac{n^3}{2} - \frac{n}{2} \quad \text{sumas/restas.}$$

b. Haga una tabla en la que compare las operaciones requeridas para los métodos Gauss-Jordan y de eliminación gaussiana para $n = 3, 10, 50, 100$. ¿Qué método requiere menos cálculos?

18. Considere el siguiente método híbrido Gauss-Jordan-eliminación-gaussiana para resolver el sistema (6.4). Primero, aplique la técnica de eliminación gaussiana para reducir el sistema a una forma triangular. A continuación, utilice la enésima ecuación para eliminar los coeficientes de x_n en cada una de las primeras $n - 1$ filas. Después de completar esto utilice la $(n - 1)$-ésima ecuación para eliminar los coeficientes x_{n-1} en las primeras $n - 2$ columnas y así sucesivamente. Al final, el sistema aparecerá como el sistema reducido en el ejercicio 12.

a. Muestre que este método requiere

$$\frac{n^3}{3} + \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{6}n \quad \text{multiplicaciones/divisiones}$$

y

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5}{6}n \quad \text{sumas/restas.}$$

b. Haga una tabla en la que compare las operaciones requeridas para los métodos Gauss-Jordan, de eliminación gaussiana e híbrido para $n = 3, 10, 50, 100$.

19. Use el método híbrido descrito en el ejercicio 16 y aritmética de redondeo de dos dígitos para resolver los sistemas en el ejercicio 3.

20. Repita el ejercicio 7 con el método descrito en el ejercicio 16.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Una técnica similar a la eliminación gaussiana apareció por primera vez en “Nine Chapters on the Mathematical Art” (“Nueve capítulos sobre el arte matemático”). Lea el artículo corto “Jiu Zhang Suan Shu and the Gauss Algorithm for Linear Equations” (Jiu Zhang Suan Shu y el algoritmo Gauss para ecuaciones lineales) de Ya-xiang Yuan que puede encontrar en http://www.math.uiuc.edu/documenta/vol-ismp/10 yuan-yaxiang.pdf. Compare la técnica con la que se presenta en este capítulo.

2. A principios de 1700, Newton desarrolló un método similar a la eliminación gaussiana. Compare ese método con el que se presenta en este capítulo.
3. Los pasos 5 y 6 del algoritmo de eliminación gaussiana requiere $\frac{n^3}{3}+n^2-\frac{n}{3}$ multiplicaciones y divisiones y $\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6}$ sumas y restas para reducir un sistema completo en el punto en el que se puede utilizar sustitución hacia atrás. Considere el siguiente sistema.

$$\begin{aligned} x_1+2x_2 \qquad\quad &= 4, \\ 2x_1+ x_2+3x_3 \quad &= 5, \\ 3x_3+x_4 &= -1. \end{aligned}$$

¿Cuántas operaciones se requieren para reducir el sistema unido por debajo de ese mismo punto?
4. El texto describe las tres operaciones utilizadas para crear una secuencia de sistemas lineales equivalentes con la misma solución que el sistema original y cada uno resuelto con mayor facilidad que el último. ¿Cómo afecta esta sucesión de sistemas el costo de encontrar la solución? ¿Se forma error generado con cada sucesión?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.2

1. Encuentre intercambios de fila requeridos para resolver los siguientes sistemas lineales mediante el algoritmo 6.1.

a. $$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + x_3 &= 7, \\ 10x_1 + 20x_3 &= 6, \\ 5x_1 - x_3 &= 4. \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3. \end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 5, \\ -4x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= 14, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 8. \end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 5. \end{aligned}$$

2. Encuentre intercambios de fila requeridos para resolver los siguientes sistemas lineales mediante el algoritmo 6.1.

a. $$\begin{aligned} 13x_1 + 17x_2 + x_3 &= 5, \\ x_2 + 19x_3 &= 1, \\ 12x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0, \\ 12x_2 - x_3 &= 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 5. \end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 - 6x_3 &= 7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 8, \\ 6x_1 + 12x_2 + x_3 &= 9. \end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 5, \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 &= 8, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7. \end{aligned}$$

3. Repita el ejercicio 1 usando el algoritmo 6.2.
4. Repita el ejercicio 2 usando el algoritmo 6.2.
5. Repita el ejercicio 1 usando el algoritmo 6.3.
6. Repita el ejercicio 2 usando el algoritmo 6.3.
7. Repita el ejercicio 1 usando pivoteo completo.
8. Repita el ejercicio 2 usando pivoteo completo.
9. Utilice eliminación gaussiana y aritmética de corte de tres dígitos para resolver los siguientes sistemas lineales y compare las aproximaciones con la solución real.

a. $$\begin{aligned} 0.03x_1 + 58.9x_2 &= 59.2, \\ 5.31x_1 - 6.10x_2 &= 47.0. \end{aligned}$$

Solición real $[10, 1]$.

b. $$\begin{aligned} 3.03x_1 - 12.1x_2 + 14x_3 &= -119, \\ -3.03x_1 + 12.1x_2 - 7x_3 &= 120, \\ 6.11x_1 - 14.2x_2 + 21x_3 &= -139. \end{aligned}$$

Solución real $[0, 10, \frac{1}{7}]$.

c. $$\begin{aligned} 1.19x_1 + 2.11x_2 - 100x_3 + x_4 &= 1.12,\\ 14.2x_1 - 0.122x_2 + 12.2x_3 - x_4 &= 3.44,\\ 100x_2 - 99.9x_3 + x_4 &= 2.15,\\ 15.3x_1 + 0.110x_2 - 13.1x_3 - x_4 &= 4.16. \end{aligned}$$

Solución real $[0.176, 0.0126, -0.0206, -1.18]$.

d. $$\begin{aligned} \pi x_1 - ex_2 + \sqrt{2}x_3 - \sqrt{3}x_4 &= \sqrt{11},\\ \pi^2 x_1 + ex_2 - e^2x_3 + \tfrac{3}{7}x_4 &= 0,\\ \sqrt{5}x_1 - \sqrt{6}x_2 + x_3 - \sqrt{2}x_4 &= \pi,\\ \pi^3 x_1 + e^2x_2 - \sqrt{7}x_3 + \tfrac{1}{9}x_4 &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Solución real $[0.788, -3.12, 0.167, 4.55]$.

10. Utilice eliminación gaussiana y aritmética de corte de tres dígitos para resolver los siguientes sistemas lineales y compare las aproximaciones con la solución real.

a. $$\begin{aligned} 58.9x_1 + 0.03x_2 &= 59.2,\\ -6.10x_1 + 5.31x_2 &= 47.0. \end{aligned}$$

Solución real $[1, 10]$.

b. $$\begin{aligned} 3.3330x_1 + 15920x_2 + 10.333x_3 &= 7953,\\ 2.2220x_1 + 16.710x_2 + 9.6120x_3 &= 0.965,\\ -1.5611x_1 + 5.1792x_2 - 1.6855x_3 &= 2.714. \end{aligned}$$

Solución real $[1, 0.5, -1]$.

c. $$\begin{aligned} 2.12x_1 - 2.12x_2 + 51.3x_3 + 100x_4 &= \pi,\\ 0.333x_1 - 0.333x_2 - 12.2x_3 + 19.7x_4 &= \sqrt{2},\\ 6.19x_1 + 8.20x_2 - 1.00x_3 - 2.01x_4 &= 0,\\ -5.73x_1 + 6.12x_2 + x_3 - x_4 &= -1. \end{aligned}$$

Solución real $[0.0998, -0.0683, -0.0363, 0.0465]$.

d. $$\begin{aligned} \pi x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 + x_4 &= 0,\\ ex_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1,\\ x_1 + x_2 - \sqrt{3}x_3 + x_4 &= 2,\\ -x_1 - x_2 + x_3 - \sqrt{5}x_4 &= 3. \end{aligned}$$

Solución real $[1.35, -4.68, -4.03, -1.66]$.

11. Repita el ejercicio 9 usando aritmética de redondeo de tres dígitos.

12. Repita el ejercicio 10 usando aritmética de redondeo de tres dígitos.

13. Repita el ejercicio 9 usando eliminación gaussiana con pivoteo parcial.

14. Repita el ejercicio 10 usando eliminación gaussiana con pivoteo parcial.

15. Repita el ejercicio 9 usando eliminación gaussiana con pivoteo parcial y aritmética de redondeo de tres dígitos.

16. Repita el ejercicio 10 usando eliminación gaussiana con pivoteo parcial y aritmética de redondeo de tres dígitos.

17. Repita el ejercicio 9 usando eliminación gaussiana con pivoteo parcial escalado.

18. Repita el ejercicio 10 usando eliminación gaussiana con pivoteo parcial escalado.

19. Repita el ejercicio 9 usando eliminación gaussiana con pivoteo parcial escalado y aritmética de redondeo de tres dígitos.

20. Repita el ejercicio 10 usando eliminación gaussiana con pivoteo parcial escalado y aritmética de redondeo de tres dígitos.

21. Repita el ejercicio 9 usando eliminación con pivoteo completo.

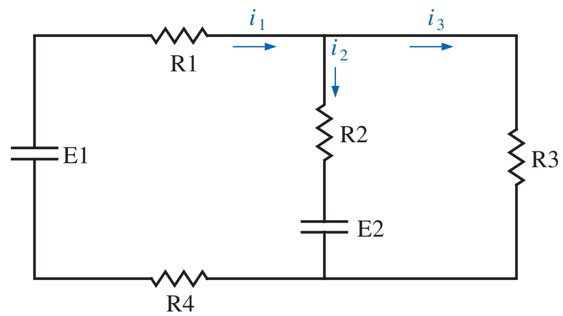
22. Repita el ejercicio 10 usando eliminación con pivoteo completo.

23. Repita el ejercicio 9 usando eliminación gaussiana con pivoteo completo y aritmética de redondeo de tres dígitos.

24. Repita el ejercicio 10 usando eliminación gaussiana con pivoteo completo y aritmética de redondeo de tres dígitos.

EJERCICIOS APLICADOS

25. El siguiente circuito tiene cuatro resistores y dos fuentes de voltaje. Los resistores son R_1, R_2, R_3 y R_4 ohms; las fuentes de voltaje son E_1 y E_2 volts; y las corrientes son i_1, i_2 y i_3 amperes.



a. Mediante las leyes de Kirchohoff, derive el sistema lineal

$$\begin{aligned}(R_1 + R_4)i_1 + R_2 i_2 \qquad &= E_1 + E_2\\ (R_1 + R_4)i_1 \qquad + R_3 i_3 &= E_1\\ i_1 - i_2 - i_3 &= 0.\end{aligned}$$

b. Por medio de eliminación gaussiana sin pivoteo, encuentre i_1, i_2 e i_3 cuando $E_1 = 12$ volts, $E_2 = 10$ volts, $R_1 = 2$ ohms, $R_2 = 2$ ohms, $R_3 = 4$ ohms, y $R_4 = 1$ ohm.

c. Si las resistencias se cambian por $R_1 = 0.001$ ohms, $R_2 = 3.333$ ohms, $R_3 = 4.002$ ohms, y $R_4 = 0.012$ ohms, encuentre las corrientes i_1, i_2 e i_3, mediante eliminación gaussiana y aritmética de corte de 3 dígitos.

d. ¿El pivoteo parcial mejora la respuesta de la parte c)?

EJERCICIOS TEÓRICOS

26. Suponga que

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1,\\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 &= 5,\\ 6x_1 + \alpha x_2 + 10x_3 &= 5,\end{aligned}$$

con $|\alpha| < 10$. ¿Para cuáles de los siguientes valores de α no habrá intercambio requerido al resolver este sistema mediante pivoteo parcial escalado?

a. $\alpha = 6$ **b.** $\alpha = 9$ **c.** $\alpha = -3$

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Construya un algoritmo para el procedimiento de pivoteo completo analizado en el texto.

2. Una estrategia nueva de pivoteo para eliminación gaussiana se presentó en el artículo “A New Pivoting Strategy for Gaussian Elimination” (“Una nueva estrategia de pivoteo para eliminación gaussiana”) de Markus Olschowka. Analice la forma en la que esta estrategia se compara con las estrategias analizadas en este capítulo.

3. La estrategia de pivoteo de Rook fue introducida por Neal y Poole en “A Geometric Analysis of Gaussian Elimination” (“Un análisis geométrico de la eliminación gaussiana”). Analice la forma en la que esta estrategia se compara con las estrategias analizadas en este capítulo.

4. Compare y contraste las diferentes estrategias de pivoteo analizadas en la sección 6.2 de su texto.

5. Puesto que la computadora utiliza aritmética de precisión fija, es posible que este pequeño error se introduzca cada vez que se realiza una operación aritmética. Por lo tanto, el uso de una estrategia de pivoteo trivial en eliminación gaussiana puede llevar a un error significativo en la solución de un sistema de ecuaciones lineales. ¿Este error se puede controlar?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.3

1. Realice las siguientes multiplicaciones de matriz-vector:

a. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. Realice las siguientes multiplicaciones matriz-vector:

a. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

3. Realice las siguientes multiplicaciones matriz-matriz:

a. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

4. Realice las siguientes multiplicaciones matriz-matriz:

a. $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

5. Determine cuáles de las siguientes matrices son no singulares y calcule la inversa de esas matrices:

a. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 \\ 9 & 11 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

6. Determine cuáles de las siguientes matrices son no singulares y calcule la inversa de esas matrices:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

7. Dados los sistemas lineales 4×4 que tienen la misma matriz de coeficientes:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 6, \\ x_1 \quad\quad - x_3 + x_4 &= 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= -2, \\ -x_2 + x_3 - x_4 &= 5; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1, \\ x_1 \quad\quad - x_3 + x_4 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 2, \\ -x_2 + x_3 - x_4 &= -1. \end{aligned}$$

a. Resuelva los sistemas lineales al aplicar la eliminación gaussiana a la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{rrrr:rr} 1 & -1 & 2 & -1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 5 & -1 \end{array}\right].$$

b. Resuelva los sistemas lineales al encontrar y multiplicar por la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

c. ¿Qué método requiere más operaciones?

8. Considere los cuatro sistemas lineales 3×3 que tienen la misma matriz de coeficientes:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -1, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 6, \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 4, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= 5; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= -3; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

a. Resuelva los sistemas lineales al aplicar la eliminación gaussiana a la matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{rrr:rrrr} 2 & -3 & 1 & 2 & 6 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right].$$

b. Resuelva los sistemas lineales al encontrar y multiplicar por la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

c. ¿Qué método requiere más operaciones?

9. A menudo es útil dividir las matrices en una colección de submatrices. Por ejemplo, las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 6 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

se pueden dividir en

$$\left[\begin{array}{rr:r} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ \hdashline 6 & 5 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \quad \text{y} \quad \left[\begin{array}{rrr:r} 2 & -1 & 7 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ \hdashline -2 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} B_{11} & B_{12} \\ \hdashline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

a. Muestre que el producto de A y B en este caso es

$$AB = \left[\begin{array}{c:c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hdashline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}\right]$$

b. Si B se dividiera en

$$B = \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -1 & 7 & 0 \\ \hdashline 3 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} B_{11} & B_{12} \\ \hdashline B_{21} & B_{22} \end{array}\right],$$

¿el resultado en la parte a) se mantendría?

c. Realice una conjetura respecto a las condiciones necesarias para el resultado en la parte a) para mantener el caso general.

EJERCICIOS APLICADOS

10. El estudio de cadenas alimenticias es un tema importante para determinar la distribución y acumulación de contaminantes ambientales en la materia viva. Suponga que una cadena de alimentos tiene tres vínculos. El primero consiste en vegetación de tipo $v_1, v_2, \ldots, v_n$, que provee requisitos alimenticios para los herbívoros de las especies $h_1, h_2, \ldots, h_m$ en el segundo vínculo. El tercer vínculo consiste en los animales carnívoros $c_1, c_2, \ldots, c_k$, que dependen enteramente de los herbívoros en el segundo vínculo para su suministro de comida. La entrada a_{ij} de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

representa el número total de plantas tipo v_i consumidas por los herbívoros en las especies h_j, mientras b_{ij} en

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk} \end{bmatrix}$$

describe el número de herbívoros en las especies h_i que son devorados por los animales de tipo c_j.

a. Muestre que el número de plantas tipo v_i que al final terminaron en los animales de especies c_j está determinado por la entrada en la i-ésima fila y la j-ésima columna de la matriz AB.

b. ¿Qué importancia física está relacionada con las matrices A^{-1}, B^{-1}, y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$?

11. En un artículo titulado "Population Waves" ("Ondas de población") Bernadelli [Ber] (también consulte [Se]) realiza la hipótesis de que un tipo de escarabajo simplificado tiene un periodo de vida natural de tres años. Las hembras de esta especie tienen una tasa de supervivencia de $\frac{1}{2}$ en el primer año de vida, una de $\frac{1}{3}$ del segundo al tercer año y procrea un promedio de seis hembras nuevas antes de expirar al final del tercer año. Se puede utilizar una matriz para mostrar la contribución de una sola hembra, en un sentido probabilístico, a la población de hembras de la especie al permitir que a_{ij} en la matriz $A = [a_{ij}]$ denote la contribución que un solo escarabajo de edad j realizaría a la población de hembras de edad i el año siguiente; es decir,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

a. Por lo tanto, la contribución de un escarabajo femenino para la población de dos años se determina a partir de las entradas de A^2, de tres años a partir de A^3, y así sucesivamente. Construya A^2 y A^3, e intente realizar una declaración general sobre la contribución de un escarabajo hembra para la población en n años tiempo para cualquier valor entero positivo de n.

b. Utilice sus conclusiones a partir de a) para describir lo que pasará en los años futuros a una población de estos escarabajos que consiste inicialmente en 6 000 escarabajos hembra en cada uno de los tres grupos de edad.

c. Construya A^{-1} y describa su importancia respecto a la población de estas especies.

EJERCICIOS TEÓRICOS

12. Pruebe las siguientes declaraciones o proporcione contraejemplos para mostrar que no son verdaderas.

a. El producto de dos matrices simétricas es simétrico.

b. La inversa de una matriz simétrica no singular es una matriz simétrica no singular.

c. Si A y B son matrices $n \times n$, entonces $(AB)^t = A^t B^t$.

13. Las siguientes declaraciones son necesarias para probar el teorema 6.12.

a. Muestre que si A^{-1} existe, es única.

b. Muestre que si A es no singular, entonces $(A^{-1})^{-1} = A$.

c. Muestre que si A y B son matrices $n \times n$ no singulares, entonces $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

14. a. Muestre que el producto de dos matrices triangulares inferiores $n \times n$ es triangular inferior.

b. Muestre que el producto de dos matrices triangulares superiores $n \times n$ es triangular superior.

c. Muestre que la inversa de una matriz triangular inferior no singular $n \times n$ es triangular inferior.

15. En la sección 3.6 encontramos que la forma paramétrica $(x(t), y(t))$ de los polinomios cúbicos de Hermite $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ y $(x(1), y(1)) = (x_1, y_1)$ con puntos indicadores $(x_0 + \alpha_0, y_0 + \beta_0)$ y $(x_1 - \alpha_1, y_1 - \beta_1)$, respectivamente, están dados por

$$x(t) = (2(x_0 - x_1) + (\alpha_0 + \alpha_1))\,t^3 + (3(x_1 - x_0) - \alpha_1 - 2\alpha_0)\,t^2 + \alpha_0 t + x_0$$

y

$$y(t) = (2(y_0 - y_1) + (\beta_0 + \beta_1))\,t^3 + (3(y_1 - y_0) - \beta_1 - 2\beta_0)\,t^2 + \beta_0 t + y_0.$$

Los polinomios cúbicos de Bézier tienen la forma

$$\hat{x}(t) = (2(x_0 - x_1) + 3(\alpha_0 + \alpha_1))\,t^3 + (3(x_1 - x_0) - 3(\alpha_1 + 2\alpha_0))\,t^2 + 3\alpha_0 t + x_0$$

y

$$\hat{y}(t) = (2(y_0 - y_1) + 3(\beta_0 + \beta_1))\,t^3 + (3(y_1 - y_0) - 3(\beta_1 + 2\beta_0))\,t^2 + 3\beta_0 t + y_0.$$

a. Muestre que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 & 0 \\ -6 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

transforma los coeficientes del polinomio de Hermite en los coeficientes del polinomio de Bézier.

b. Determine una matriz B que transforme los coeficientes del polinomio de Bézier en coeficientes del polinomio de Hermite.

16. Suponga que m sistemas lineales

$$A\mathbf{x}^{(p)} = \mathbf{b}^{(p)}, \quad p = 1, 2, \ldots, m,$$

se resuelven, cada uno con la matriz de coeficientes $n \times n$ A.

a. Muestre que la eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás aplicada a la matriz aumentada

$$\left[\ A : \quad \mathbf{b}^{(1)}\mathbf{b}^{(2)} \cdots \mathbf{b}^{(m)}\ \right]$$

requiere

$$\frac{1}{3}n^3 + mn^2 - \frac{1}{3}n \quad \text{multiplicaciones/divisiones}$$

y

$$\frac{1}{3}n^3 + mn^2 - \frac{1}{2}n^2 - mn + \frac{1}{6}n \quad \text{sumas/restas.}$$

b. Muestre que el método Gauss-Jordan (consulte el ejercicio 14, sección 6.1) aplicado a la matriz aumentada

$$\left[\ A : \quad \mathbf{b}^{(1)}\mathbf{b}^{(2)} \cdots \mathbf{b}^{(m)}\ \right]$$

requiere

$$\frac{1}{2}n^3 + mn^2 - \frac{1}{2}n \quad \text{multiplicaciones/divisiones}$$

y

$$\frac{1}{2}n^3 + (m-1)n^2 + \left(\frac{1}{2} - m\right)n \quad \text{sumas/restas.}$$

c. Para el caso especial

$$\mathbf{b}^{(p)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow p\text{-ésima fila,} \\ \\ \\ \end{array}$$

para cada $p = 1, \ldots, m$, con $m = n$, la solución $\mathbf{x}^{(p)}$ es la p-ésima columna de A^{-1}. Muestre que la eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás requiere

$$\frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n \quad \text{multiplicaciones/divisiones}$$

y

$$\frac{4}{3}n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \quad \text{sumas/restas}$$

para esta aplicación y que el método Gauss-Jordan requiere

$$\frac{3}{2}n^3 - \frac{1}{2}n \quad \text{multiplicaciones/divisiones}$$

y

$$\frac{3}{2}n^3 - 2n^2 + \frac{1}{2}n \quad \text{sumas/restas.}$$

d. Construya un algoritmo usando la eliminación gaussiana para encontrar A^{-1}, pero no haga multiplicaciones cuando se sepa que uno de los multiplicadores es 1 y no realice sumas/restas cuando uno de los elementos implicados sea 0. Muestre que los cálculos requeridos se reducen a n^3 multiplicaciones/divisiones y $n^3 - 2n^2 + n$ sumas/restas.

e. Muestre que resolver el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, cuando se conoce A^{-1} sigue requiriendo n^2 multiplicaciones/divisiones y $n^2 - n$ sumas/restas.

f. Muestre que resolver m sistemas lineales $A\mathbf{x}^{(p)} = \mathbf{b}^{(p)}$, para $p = 1, 2, \ldots, m$, por el método $\mathbf{x}^{(p)} = A^{-1}\mathbf{b}^{(p)}$ requiere mn^2 multiplicaciones y $m(n^2 - n)$ sumas si se conoce A^{-1}.

g. Sea A una matriz $n \times n$. Compare el número de operaciones requeridas para resolver n sistemas lineales relacionados con A mediante eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás y al invertir primero A y después, multiplicar $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por A^{-1}, para $n = 3, 10, 50$ y 100. ¿En algún punto es ventajoso calcular A^{-1} para resolver sistemas lineales?

17. Utilice el algoritmo desarrollado en el ejercicio 16d) para encontrar las inversas de las matrices no singulares en el ejercicio 5.

18. Considere el sistema lineal 2×2 $(A+iB)(\mathbf{x}+i\mathbf{y}) = \mathbf{c}+i\mathbf{d}$ con entradas complejas en forma de componente:

$$(a_{11} + ib_{11})(x_1 + iy_1) + (a_{12} + ib_{12})(x_2 + iy_2) = c_1 + id_1,$$
$$(a_{21} + ib_{21})(x_1 + iy_1) + (a_{22} + ib_{22})(x_2 + iy_2) = c_2 + id_2.$$

a. Utilice las propiedades de los números complejos para convertir este sistema al sistema lineal real equivalente 4×4

$$A\mathbf{x} - B\mathbf{y} = \mathbf{c},$$
$$B\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{d}.$$

b. Resuelva el sistema lineal

$$(1-2i)(x_1+iy_1)+(3+2i)(x_2+iy_2)=5+2i,$$
$$(2+i)(x_1+iy_1)+(4+3i)(x_2+iy_2)=4-i.$$

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. ¿La declaración "todas las matrices diagonales son cuadradas" es verdadera o falsa? ¿Por qué sí o por qué no?
2. ¿Todas las matrices cuadradas tienen una inversa? ¿Por qué sí o por qué no?
3. ¿Una alteración muy pequeña en una matriz cuadrada singular puede crear una matriz no singular? ¿Por qué sí o por qué no?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.4

1. Utilice la definición 6.15 para calcular los determinantes de las siguientes matrices:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

2. Utilice la definición 6.15 para calcular los determinantes de las siguientes matrices:

a. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

3. Repita el ejercicio 1 usando el método del ejemplo 2.
4. Repita el ejercicio 2 usando el método del ejemplo 2.
5. Encuentre los valores de α que hacen que la siguiente matriz sea singular.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

6. Encuentre los valores de α que hacen que la siguiente matriz sea singular.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 2 & \alpha & -1 \end{bmatrix}.$$

7. Encuentre los valores de α de tal forma que el siguiente sistema lineal no tenga soluciones.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6, \\ -2x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 &= 4. \end{aligned}$$

8. Encuentre los valores de α de tal forma que el siguiente sistema lineal tenga un número infinito de soluciones.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6, \\ -2x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

EJERCICIOS APLICADOS

9. La matriz de rotación

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

aplicada al vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

tiene el efecto geométrico de rotar $\mathbf{x}$ en el sentido contrario a las manecillas del reloj, un ángulo de θ radianes.

a. Sea $\mathbf{y} = R_\theta \mathbf{x}$. Verifique que $\mathbf{y}$ es $\mathbf{x}$ rotado por θ. [*Sugerencia*: Utilice la relación $x_1 + ix_2 = re^{i\alpha}$, donde $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ y $\alpha = \tan^{-1}(\frac{x_2}{x_1})$. Muestre que $y = y_1 + iy_2 = re^{i(\theta+\alpha)}$.]

b. Encuentre R_θ^{-1} de dos formas diferentes [*Sugerencia:* Considere una rotación en la dirección de las manecillas del reloj.]

c. Sean $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\theta = \frac{\pi}{6}$. Encuentre la rotación de $\mathbf{x}$ dada por un ángulo θ tanto en el sentido de las manecillas del reloj como en sentido contrario al utilizar R_θ y R_θ^{-1}.

d. Encuentre el determinante tanto de R_θ como de R_θ^{-1}.

10. La matriz de rotación para una rotación en 3 dimensiones, en sentido contrario a las manecillas del reloj, por un ángulo θ sobre el vector $\mathbf{u}$ está determinada por

$$R_{\mathbf{u},\theta} = \begin{bmatrix} u_1^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & u_1u_2(1-\cos\theta)-u_3\operatorname{sen}\theta & u_1u_3(1-\cos\theta)+u_2\operatorname{sen}\theta \\ u_1u_2(1-\cos\theta)+u_3\operatorname{sen}\theta & u_2^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & u_2u_3(1-\cos\theta)-u_1\operatorname{sen}\theta \\ u_1u_3(1-\cos\theta)-u_2\operatorname{sen}\theta & u_2u_3(1-\cos\theta)+u_1\operatorname{sen}\theta & u_3^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^t$, $\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = 1$.

a. Rote el vector $\mathbf{x} = (1, 2, 3)^T$ alrededor del vector $\mathbf{u} = (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6})$ con un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

b. Encuentre la matriz para “deshacer” la rotación en la parte a).

c. Calcule los determinantes de las matrices en las partes a) y b).

d. ¿Las partes b) y c) se pueden generalizar?

11. La fórmula química

$$x_1[Ca(OH)_2] + x_2[HNO_3] \rightarrow x_3[CA(NO_3)_2] + x_4[H_2O]$$

indica que x_1 moléculas de hidróxido de calcio $Ca(OH)_2$ se combinan con x_2 moléculas de ácido nítrico HNO_3 para producir x_3 moléculas de nitrato de calcio $CA(NO_3)_2$ y x_4 moléculas de agua H_2O. Para determinar x_1, x_2, x_3 y x_4, establecemos ecuaciones para átomos de calcio Ca, oxígeno O, hidrógeno H y nitrógeno N.

Puesto que los átomos no se destruyen en esta reacción química, una reacción equilibrada requiere que para calcio $x_1 = x_3$, para oxígeno $2x_1 + 3x_2 = 6x_3 + x_4$, para hidrógeno $2x_1 + x_2 = 2x_4$, y para nitrógeno $x_2 = 2x_3$. El sistema lineal resultante $A\mathbf{x} = 0$ es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a. Calcule el determinante de A.

b. ¿Por qué la parte a) da este resultado?

c. Encuentre x_1, x_2, x_3 y x_4, para equilibrar la ecuación química.

d. ¿La respuesta en la parte c) es única?

EJERCICIOS TEÓRICOS

12. Use inducción matemática para mostrar que cuando $n > 1$, la evaluación del determinante de una matriz $n \times n$ usando la definición requiere

$$n! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \text{ multiplicaciones/divisiones} \quad \text{y} \quad n! - 1 \text{ sumas/restas}.$$

13. Si A es una matriz 3×3. Muestre que si $\tilde{A}$ es la matriz obtenida a partir de A mediante cualquiera de las operaciones

$$(E_1) \leftrightarrow (E_2), \quad (E_1) \leftrightarrow (E_3), \quad \text{o} \quad (E_2) \leftrightarrow (E_3),$$

entonces $\det \tilde{A} = -\det A$.

14. Pruebe que $\boldsymbol{AB}$ es no singular si y sólo si tanto A como B son no singulares.

15. La solución mediante la **regla de Cramer** para el sistema lineal es

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3, \end{aligned}$$

es

$$x_1 = \frac{1}{D} \det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \equiv \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{1}{D} \det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix} \equiv \frac{D_2}{D},$$

y

$$x_3 = \frac{1}{D} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix} \equiv \frac{D_3}{D}, \quad \text{donde} \quad D = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

a. Encuentre la solución para el sistema lineal

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6, \\ x_1 - 12x_2 + 5x_3 &= 10, \end{aligned}$$

mediante la regla de Cramer.

b. Muestre que el sistema lineal

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6, \\ -x_1 - 12x_2 + 5x_3 &= 9, \end{aligned}$$

no tiene solución. Calcule D_1, D_2 y D_3.

c. Muestre que el sistema lineal

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6, \\ -x_1 - 12x_2 + 5x_3 &= 10, \end{aligned}$$

tiene un número infinito de soluciones. Calcule D_1, D_2 y D_3.

d. Pruebe que si un sistema lineal 3×3 con $D = 0$ tiene soluciones, entonces $D_1 = D_2 = D_3 = 0$.

e. Determine el número de multiplicaciones/divisiones y sumas/restas requeridas para la regla de Cramer en un sistema 3×3.

16. a. Generalice la regla de Cramer para un sistema lineal $n \times n$.

b. Utilice el resultado en el ejercicio 12 para determinar el número de multiplicaciones/divisiones y sumas/restas requerido para la regla de Cramer en un sistema $n \times n$.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. De acuerdo con el texto, existen $2n$ definiciones diferentes del det A, dependiendo de la fila o columna seleccionada. Analice la razón por la que todas las definiciones dan el mismo resultado numérico.
2. Explique cómo se puede usar la eliminación gaussiana para encontrar el determinante de una matriz.
3. Explique cómo se puede usar la eliminación gaussiana para encontrar la inversa de una matriz, si existe.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.5

1. Resuelva los siguientes sistemas lineales:

a. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b. $$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Resuelva los siguientes sistemas lineales:

a. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

b. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

3. Considere las siguientes matrices. Encuentre la matriz de permutación P tal que PA se puede factorizar en el producto LU, donde L es triangular inferior con 1 en su diagonal y U es triangular superior para estas matrices.

a. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

b. $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

c. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

d. $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Considere las siguientes matrices. Encuentre la matriz de permutación P de tal forma que PA se puede factorizar en el producto LU, donde L es triangular inferior con 1 en su diagonal y U es triangular superior para estas matrices.

a. $$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

b. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 7 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

c. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

d. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

5. Factorice las siguientes matrices en la descomposición LU mediante el algoritmo de factorización LU con $l_{ii} = 1$ para todas las i.

a. $$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

b. $$\begin{bmatrix} 1.012 & -2.132 & 3.104 \\ -2.132 & 4.096 & -7.013 \\ 3.104 & -7.013 & 0.014 \end{bmatrix}$$

c. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0.5 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 2.1756 & 4.0231 & -2.1732 & 5.1967 \\ -4.0231 & 6.0000 & 0 & 1.1973 \\ -1.0000 & -5.2107 & 1.1111 & 0 \\ 6.0235 & 7.0000 & 0 & -4.1561 \end{bmatrix}$

6. Factorice las siguientes matrices en la descomposición LU mediante el algoritmo de factorización LU con $l_{ii} = 1$ para todas las i.

a. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{3} & \frac{3}{8} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 2.121 & -3.460 & 0 & 5.217 \\ 0 & 5.193 & -2.197 & 4.206 \\ 5.132 & 1.414 & 3.141 & 0 \\ -3.111 & -1.732 & 2.718 & 5.212 \end{bmatrix}$

7. Modifique el algoritmo de factorización LU de tal forma que se pueda utilizar para resolver un sistema lineal y, a continuación, resuelva los siguientes sistemas lineales.

a.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4. \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 1.012x_1 - 2.132x_2 + 3.104x_3 &= 1.984, \\ -2.132x_1 + 4.096x_2 - 7.013x_3 &= -5.049, \\ 3.104x_1 - 7.013x_2 + 0.014x_3 &= -3.895. \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\qquad\qquad &= 3, \\ x_1 + 1.5x_2 \qquad\quad &= 4.5, \\ -3x_2 + 0.5x_3 \quad &= -6.6, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0.8. \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} 2.1756x_1 + 4.0231x_2 - 2.1732x_3 + 5.1967x_4 &= 17.102, \\ -4.0231x_1 + 6.0000x_2 \qquad\qquad + 1.1973x_4 &= -6.1593, \\ -1.0000x_1 - 5.2107x_2 + 1.1111x_3 \qquad\qquad &= 3.0004, \\ 6.0235x_1 + 7.0000x_2 \qquad\qquad - 4.1561x_4 &= 0.0000. \end{aligned}$$

8. Modifique el algoritmo de factorización LU de tal forma que se pueda usar para resolver un sistema lineal y, a continuación, resuelva los siguientes sistemas lineales

a.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \qquad &= 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -1, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4. \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3 &= 1, \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{3}{8}x_3 &= 2, \\ \frac{2}{5}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{5}{8}x_3 &= -3. \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 0, \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 \qquad &= 5, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= -2, \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 6. \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} 2.121x_1 - 3.460x_2 \qquad\qquad + 5.217x_4 &= 1.909, \\ 5.193x_2 - 2.197x_3 + 4.206x_4 &= 0, \\ 5.132x_1 + 1.414x_2 + 3.141x_3 \qquad\qquad &= -2.101, \\ -3.111x_1 - 1.732x_2 + 2.718x_3 + 5.212x_4 &= 6.824. \end{aligned}$$

9. Obtenga factorizaciones de la forma $A = P^t LU$ para las siguientes matrices.

a. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 9 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

10. Obtenga factorizaciones de la forma $A = P^t LU$ para las siguientes matrices.

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

EJERCICIOS APLICADOS

11. El ejercicio 11 de la sección 6.3 se puede generalizar de acuerdo con lo siguiente. Suponga que el escarabajo tiene un periodo de vida de cuatro años. La hembra de la especie tiene una tasa de supervivencia de p_1 en el primer año de vida, tiene una tasa de supervivencia de p_2 desde el segundo hasta su tercer año, y tiene una tasa de supervivencia de p_3 desde el año 3 hasta el año 4 antes de expirar al final del cuarto año. El escarabajo hembra procrea un promedio de b_1 escarabajos hembras en el primer año, b_2 escarabajos hembras en el segundo año, b_3 escarabajos hembras en su tercer año y b_4 escarabajos hembras en su cuarto año.

Se puede usar una matriz $A = [a_{ij}]$ para modelar las contribuciones que realiza un escarabajo hembra, en un sentido probabilístico, a la población femenina de la especie al hacer que a_{ij} denote la contribución que una sola hembra de edad j realizará a la población de hembras del siguiente año de edad i. Tenemos

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

a. Por medio de la descomposición LU o descomposición P^tLU con $b_1 = 0$, $b_2 = 1/8$, $b_3 = 1/4$, $b_4 = 1/2$, $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/4$ y $p_3 = 1/8$, encuentre el número de hembras de cada edad necesario para que la población después de un año sea $\vec{b} = (175, 100, 50, 25)^t$.

b. Repita la parte a) mediante $\vec{b} = (100, 100, 100, 100)^t$. ¿Qué significa su respuesta?

EJERCICIOS TEÓRICOS

12. **a.** Muestre que el algoritmo de factorización LU requiere

$$\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n \text{ multiplicaciones/divisiones} \quad \text{y} \quad \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \text{ sumas/restas.}$$

b. Muestre que resolver $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$, donde L es una matriz triangular inferior con $l_{ii} = 1$ para i, requiere

$$\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \text{ multiplicaciones/divisiones} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \text{ sumas/restas.}$$

c. Muestre que resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ al factorizar primero A en $A = LU$ y, después, resolver $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ y $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ requiere el mismo número de operaciones que el algoritmo de eliminación gaussiana 6.1.

d. Cuente el número de operaciones requeridas para resolver m sistemas lineales $A\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}^{(k)}$ para $k = 1, \ldots, m$, al factorizar primero A y, después, utilizar el método de la parte c) m veces.

13. Suponga $A = P^tLU$, donde P es una matriz de permutación, L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y U es una matriz triangular superior.

a. Cuente el número de operaciones necesarias para calcular P^tLU para una matriz determinada A.

b. Muestre que si P contiene k intercambios de fila, entonces

$$\det P = \det P^t = (-1)^k.$$

c. Utilice $\det A = \det P^t \det L \det U = (-1)^k \det U$ para contar el número de operaciones para determinar $\det A$ mediante factorización.

d. Calcule $\det A$ y cuente el número de operaciones cuando

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. ¿La descomposición LU es única? ¿Por qué sí o por qué no?
2. ¿Cuántas operaciones se necesitarían para descomponer una matriz $m \times m$ tridiagonal A en su factorización LU?
3. ¿Cómo se pueden manejar los intercambios de filas en la descomposición LU?
4. ¿Por qué la descomposición LU de una matriz A es tan útil? ¿La descomposición es computacionalmente práctica?
5. Si una matriz A requiere intercambios de fila, ¿cómo afecta la descomposición de A su factorización LU?
6. Analice los diferentes tipos de matrices de banda y los efectos de resolver mínimos cuadrados con matrices de banda mediante descomposiciones.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.6

1. Determine cuál de las siguientes matrices son i) simétricas, ii) singulares, iii) estrictamente diagonalmente dominantes y iv) definidas positivas.

a. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 0 \\ 9 & 11 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2. Determine cuál de las siguientes matrices son i) simétricas, ii) singulares, iii) estrictamente diagonalmente dominantes y iv) definidas positivas.

a. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & 5 \\ 3 & 7 & 1.5 & 1 \\ 6 & -9 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

3. Utilice el algoritmo de factorización LDL^t para encontrar una factorización de la forma $A = LDL^t$ para las siguientes matrices:

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ **b.** $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ **d.** $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

4. Utilice el algoritmo de factorización LDL^t para encontrar una factorización de la forma $A = LDL^t$ para las siguientes matrices:

a. $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **b.** $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ **d.** $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

5. Utilice el algoritmo de Cholesky para encontrar una factorización de la forma $A = LL^t$ para las matrices en el ejercicio 3.
6. Utilice el algoritmo de Cholesky para encontrar una factorización de la forma $A = LL^t$ para las matrices en el ejercicio 4.
7. Modifique el algoritmo de factorización LDL^t, como se sugiere en el texto, de tal forma que se pueda utilizar para resolver los siguientes sistemas lineales.

a.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3, \\ - x_2 + 2x_3 &= 1. \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0.65, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 0.05, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_4 &= 0.5. \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= 7, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 8, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= -4, \\ 2x_3 + 4x_4 &= 6. \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 7, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 &= -1, \\ -x_1 - x_3 + 3x_4 &= -2. \end{aligned}$$

8. Utilice el algoritmo modificado a partir del ejercicio 7 para resolver los siguientes sistemas lineales.

a.
$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= -1, \\ -x_1 + 3x_2 &= 4, \\ x_1 + 2x_3 &= 5. \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 0. \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_3 + x_4 &= -2, \\ 3x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 + 3x_4 &= 7, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 &= -2. \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 &= 2, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 &= 1. \end{aligned}$$

9. Modifique el algoritmo de Cholesky, como se sugiere en el texto, de tal forma que se pueda usar para resolver sistemas lineales y utilice el algoritmo modificado para resolver los sistemas lineales en el ejercicio 7.
10. Use el algoritmo modificado desarrollado en el ejercicio 9 para resolver los sistemas lineales en el ejercicio 8.
11. Utilice la factorización de Crout para sistemas tridiagonales para resolver los siguientes sistemas lineales.

a.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0, \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= -1, \\ - x_2 + 2x_3 &= 1.5. \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= -1, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 7, \\ 2x_2 + 5x_3 &= 9. \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3, \\ - x_2 + 2x_3 &= 1. \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} 0.5x_1 + 0.25x_2 &= 0.35, \\ 0.35x_1 + 0.8x_2 + 0.4x_3 &= 0.77, \\ 0.25x_2 + x_3 + 0.5x_4 &= -0.5, \\ x_3 - 2x_4 &= -2.25. \end{aligned}$$

12. Utilice la factorización de Crout de sistemas tridiagonales para resolver los siguientes sistema lineales.

a.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= -2, \\ 2x_2 + 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 5, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4, \\ x_2 + 4x_3 &= 0. \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4, \\ x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0, \\ x_3 + 2x_4 &= 6. \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2, \\ 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= -1, \\ 2x_4 - x_5 &= -2, \\ x_4 + 2x_5 &= -1. \end{aligned}$$

13. Sea A una matriz tridiagonal 10×10 determinada por $a_{ii} = 2, a_{i,i+1} = a_{i,i-1} = -1$, para cada $i = 2, \ldots, 9$, y $a_{11} = a_{10,10} = 2, a_{12} = a_{10,9} = -1$. Sea $\mathbf{b}$ el vector columna 10-dimensional dado por $b_1 = b_{10} = 1$ y $b_i = 0$, para cada $i = 2, 3, \ldots, 9$. Resuelva $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mediante la factorización de Crout para sistemas tridiagonales.

14. Modifique la factorización LDL^t para factorizar una matriz simétrica A. [*Nota:* La factorización no siempre puede ser posible.] Aplique el nuevo algoritmo a las siguientes matrices:

a. $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ -3 & 2 & -7 \\ 6 & -7 & 13 \end{bmatrix}$ **b.** $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -6 & 14 & -20 \\ 9 & -20 & 29 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 6 & 12 \end{bmatrix}$ **d.** $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 5 \\ 4 & -4 & 10 & -10 \\ -4 & 5 & -10 & 14 \end{bmatrix}$

15. ¿Cuál de las matrices simétricas en el ejercicio 14 son definidas positivas?

16. Encuentre todas las α de tal forma que $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ sea definida positiva.

17. Encuentre todas las α de tal forma que $A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & -1 \\ \alpha & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ sea definida positiva.

18. Encuentre todas las α y $\beta > 0$ de tal forma que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & \alpha & 1 \\ 2\beta & 5 & 4 \\ \beta & 2 & \alpha \end{bmatrix}$$

sea estrictamente diagonalmente dominante.

19. Encuentre todas las $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ de tal forma que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & \beta \\ \alpha & 5 & \beta \\ 2 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

sea estrictamente diagonalmente dominante.

20. Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Encuentre todos los valores de α para los cuales:

a. A es singular **b.** A es simétrica

c. A es estrictamente diagonalmente dominante **d.** A es definida positiva

21. Si

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre todos los valores de α y β para los cuales:

a. A es singular **b.** A es simétrica

c. A es estrictamente diagonalmente dominante **d.** A es definida positiva

EJERCICIOS APLICADOS

22. En un artículo de Dorn y Burdick [DoB] se reporta que la longitud promedio del ala que resulta de aparear tres variedades mutantes de moscas de fruta (*Drosophila melanogaster*) se puede expresar en la forma de matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 1.59 & 1.69 & 2.13 \\ 1.69 & 1.31 & 1.72 \\ 2.13 & 1.72 & 1.85 \end{bmatrix}$$

donde a_{ij} denota la longitud promedio del ala de una descendencia que resulta de aparear un macho tipo i con una hembra tipo j.

a. ¿Qué importancia física se relaciona con la simetría de esta matriz?

b. ¿Esta matriz es definida positiva? De ser así, pruébelo; de no ser así encuentre un vector $\mathbf{x}$ diferente de cero para el que $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} \leq 0$.

23. Suponga $V = 5.5$ volts en el ejemplo principal de este capítulo. Al reordenar las ecuaciones, se puede formar un sistema lineal tridiagonal. Utilice el algoritmo de factorización de Crout para encontrar la solución del sistema modificado.

EJERCICIOS TEÓRICOS

24. Suponga que A y B son matrices $n \times n$ estrictamente diagonalmente dominantes. ¿Cuál de las siguientes deben ser estrictamente diagonalmente dominantes?

a. $-A$ **b.** A^t **c.** $A + B$ **d.** A^2 **e.** $A - B$

25. Suponga que A y B son matrices $n \times n$ definidas positivas. ¿Cuál de las siguientes deben ser definidas positivas?

a. $-A$ **b.** A^t **c.** $A + B$ **d.** A^2 **e.** $A - B$

26. Suponga que A y B conmutan; es decir, $AB = BA$. ¿A^t y B^t también deben conmutar?

27. Construya una matriz A que no sea simétrica, pero para la que $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} > 0$ para toda $\mathbf{x} \neq 0$.

28. Muestre que la eliminación gaussiana se puede realizar en A sin intercambio de columnas si y sólo si todas las primeras submatrices principales de A no son singulares. [*Sugerencia*: Particione cada matriz en la ecuación

$$A^{(k)} = M^{(k-1)} M^{(k-2)} \cdots M^{(1)} A$$

verticalmente entre la k-ésima y la $(k+1)$-ésima columnas y horizontalmente entre la k-ésima y la $(k+1)$-ésima filas (consulte el ejercicio 9 de la sección 6.3). Muestre que la no singularidad de la primera submatriz principal de A es equivalente a $a_{k,k}^{(k)} \neq 0$.]

29. Normalmente, las submatrices tridiagonales se etiquetan mediante la notación

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & b_3 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_n & a_n \end{bmatrix}$$

para enfatizar que no es necesario considerar todas las entradas de la matriz. Reescriba el algoritmo de factorización de Crout mediante esta notación y modifique la notación de l_{ij} y u_{ij} de manera similar.

30. Pruebe el teorema 6.31 [*Sugerencia*: Muestre que $|u_{i,i+1}| < 1$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n-1$, y que $|l_{ii}| > 0$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Deduzca que $\det A = \det L \cdot \det U \neq 0$.]

31. Construya el conteo de operaciones para resolver un sistema lineal $n \times n$ mediante el algoritmo de factorización de Crout.

32. Suponga que la matriz definida positiva A tiene factorización de Cholesky $A = LL^t$ y también factorización $A = \hat{L}D\hat{L}^t$, donde D es la matriz diagonal con entradas diagonales positivas $d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn}$. Sea $D^{1/2}$ la matriz diagonal con entradas diagonales $\sqrt{d_{11}}, \sqrt{d_{22}}, \ldots, \sqrt{d_{nn}}$.

a. Muestre que $D = D^{1/2}D^{1/2}$. **b.** Muestre que $L = \hat{L}D^{1/2}$.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Distinga entre las factorizaciones de Doolittle, Crout y Cholesky. ¿En qué condiciones es más apropiado utilizarlas?
2. Muchos problemas en robótica se pueden formular como problemas de optimización de mínimos cuadrados no lineales. Analice la forma en la que se puede usar el método de Cholesky para encontrar la configuración óptima de las variables que satisfacen al máximo el conjunto de restricciones no lineales.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS (FINAL DEL CAPÍTULO)

1. SuperLU es un paquete de código abierto para la factorización LU. Proporcione una descripción general de este paquete.
2. KLU es un algoritmo de código abierto para la factorización LU. Proporcione una descripción general de este algoritmo.
3. ALGLIB es una biblioteca de procesamiento de datos y análisis numérico multiplataforma y de código abierto que maneja la factorización LDL^T. Proporcione una descripción general del paquete ALGLIB y, en especial, la subrutina de factorización LDL^T.
3. LIBMF es una biblioteca de factorización de matriz de código abierto que maneja la factorización LL^T. Proporcione una descripción general del paquete LIBMG y, en especial, la subrutina de factorización LL^T.

CONCEPTOS CLAVE

Conteo de operaciones	Matriz	Pivoteo parcial
Determinante de la matriz	Matriz cuadrada	Pivoteo parcial escalado
Eliminación gaussiana	Matriz de banda	Producto matriz-matriz
Factorización Crout	Matriz de permutación	Producto matriz-vector
Factorización de Cholesky	Matriz diagonal	Punto pivotal
Factorización de matriz	Matriz identidad	Sistemas lineales
Factorización LDL^T	Matriz inversa	Sustitución hacia atrás
Factorización LU	Matriz triangular inferior	Transpuesta de la matriz
Factorización $P^t LU$	Matriz triangular superior	Vector
Inversión de matriz	Matriz tridiagonal	
Matrices especiales	Pivoteo completo	

REVISIÓN DEL CAPÍTULO

En este capítulo hemos visto métodos directos para resolver sistemas lineales. Un sistema lineal consiste en n ecuaciones con n incógnitas expresadas en notación de matriz como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Estas técnicas utilizan una secuencia finita de operaciones aritméticas para determinar la solución exacta del sistema sujeto solamente a error de redondeo. Encontramos que el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. tiene una sola solución si y sólo si existe A^{-1}, que es equivalente a det $A \neq 0$. Cuando se conoce A^{-1}, la solución del sistema lineal es el vector $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Las técnicas de pivoteo se introdujeron para minimizar los efectos del error de redondeo, que puede dominar la solución cuando se usan métodos directos. Estudiamos el pivoteo parcial y el pivoteo parcial escalado, y analizamos brevemente el pivoteo completo. Recomendamos los métodos de pivoteo parcial y pivoteo parcial escalado para la mayor parte de los problemas porque esto disminuye los efectos del error de redondeo sin añadir demasiados cálculos adicionales. Debería usarse el pivoteo completo si se sospecha que el error de redondeo es grande. En la sección 5 del capítulo 7 observaremos algunos procedimientos para calcular este error de redondeo.

Se mostró la eliminación gaussiana con modificaciones menores para producir una factorización de la matriz A en LU, donde L es triangular inferior con números 1 en la diagonal y U es triangular superior. Este proceso recibe el nombre de factorización de Doolittle. No todas las matrices no singulares se pueden factorizar de esta forma, pero una permutación de las filas siempre proporcionará una factorización de la forma $PA = LU$, donde P es la matriz de permutación utilizada para reordenar las filas de A. La ventaja de la factorización es que el trabajo disminuye significativamente al resolver los sistemas lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con la misma matriz de coeficientes A y diferentes vectores $\mathbf{b}$.

Las factorizaciones toman una forma más simple cuando la matriz A es definida positiva. Por ejemplo, la factorización de Choleski tiene la forma $A = LL^t$, donde L es triangular inferior. Una matriz simétrica que tiene una factorización LU también se puede factorizar de la forma $A = LDL^t$, donde D es diagonal y L es triangular inferior con números 1 en la diagonal. Con estas factorizaciones, las manipulaciones relacionadas con A se pueden simplificar. Si A es tridiagonal, la factorización LU toma una forma especialmente simple, donde U tiene números 1 en la diagonal principal y ceros en las demás, excepto en la diagonal inmediatamente sobre la diagonal principal. Además, L tiene sus entradas diferentes a cero en la diagonal principal y una diagonal debajo. Otro método importante de factorización de matriz se considera en la sección 6 del capítulo 9.

Los métodos directos son los seleccionados para la mayoría de los sistemas lineales. Para las matrices tridiagonales, en banda y definidas positivas, se recomiendan los métodos especiales. Para el caso general se recomiendan los métodos de eliminación gaussiana o de factorización LU, que permiten el pivoteo. En estos casos, deberían supervisarse los efectos del error de redondeo. En la sección 7.5 analizamos el cálculo de errores en métodos directos.

Los grandes sistemas lineales con entradas principalmente 0 que se presentan en patrones regulares se pueden resolver de manera eficiente por medio de un procedimiento iterativo, como el que se analiza en el capítulo 7. Los sistemas de este tipo surgen de manera natural, por ejemplo, cuando se usan técnicas de diferencia finita para resolver problemas de valor en la frontera, una aplicación común en la solución de ecuaciones diferenciales parciales.

Puede ser muy difícil resolver sistemas lineales grandes que tienen entradas principalmente diferentes de 0 o 1, donde las entradas 0 no están en patrón predecible. La matriz relacionada con el sistema se puede colocar en almacenamiento secundario y forma dividida, y leer las partes en la memoria principal sólo conforme sea necesario para el cálculo. Los métodos que requieren almacenamiento secundario pueden ser tanto iterativos como directos, pero en general requieren técnicas provenientes de los campos de la estructura de datos y la teoría gráfica. Se dirige al lector a [BuR] y [RW] para un análisis de las técnicas actuales.

Para obtener más información sobre la solución numérica de sistemas y matrices lineales consulte Golub y Van Loan [GV], Forsythe y Moler [FM] y Stewart [Stew1]. El uso de técnicas directas para resolver grandes sistemas dispersos se analiza detalladamente en George y Liu [GL] y en Pissanetzky [Pi]. Coleman y Van Loan [CV] consideran el uso de BLAS, LINPACK y MATLAB.