Capítulo 9

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.1

1. Encuentre los eigenvalores y eigenvectores asociados de las siguientes matrices 3×3. ¿Existe un conjunto de eigenvectores linealmente independientes?

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ **b.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **d.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

2. Encuentre los eigenvalores y los eigenvectores asociados de las siguientes matrices 3×3. ¿Existe un conjunto de eigenvectores linealmente independientes?

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ **b.** $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **d.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

3. Use el teorema del círculo de Geršgorin para determinar las cotas para **a)** los eigenvalores y **b)** el radio espectral de las siguientes matrices.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 4.75 & 2.25 & -0.25 \\ 2.25 & 4.75 & 1.25 \\ -0.25 & 1.25 & 4.75 \end{bmatrix}$

4. Use el teorema del círculo de Geršgorin para determinar las cotas para **a)** los eigenvalores y **b)** el radio espectral de las siguientes matrices.

a. $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 9 \end{bmatrix}$

5. Muestre que $\mathbf{v}_1 = (2, -1)^t$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1)^t$, y $\mathbf{v}_3 = (1, 3)^t$ son linealmente dependientes.

6. Considere los siguientes conjuntos de vectores. **i)** Muestre que el conjunto es linealmente independiente; **ii)** use el proceso de Gram-Schmidt para encontrar un conjunto de vectores ortogonales; **iii)** determine un conjunto de vectores ortonormales a partir de los vectores en **ii)**.

a. $\mathbf{v}_1 = (2, -1)^t,\ \mathbf{v}_2 = (1, 3)^t$

b. $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 1)^t,\ \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)^t,\ \mathbf{v}_3 = (0, 2, 0)^t$

c. $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1)^t,\ \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1, 1)^t,\ \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 0)^t$

d. $\mathbf{v}_1 = (2, 2, 0, 2, 1)^t,\ \mathbf{v}_2 = (-1, 2, 0, -1, 1)^t,\ \mathbf{v}_3 = (0, 1, 0, 1, 0)^t,\ \mathbf{v}_4 = (-1, 0, 0, 1, 1)^t$

7. Considere los siguientes conjuntos de vectores. **i)** Muestre que el conjunto es linealmente independiente; **ii)** utilice el proceso de Gram-Schmidt para encontrar un conjunto de vectores ortogonales; **iii)** determine un conjunto de vectores ortonormales a partir de los vectores en **ii)**

a. $\mathbf{v}_1 = (1, 1)^t,\ \mathbf{v}_2 = (-2, 1)^t$

b. $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)^t,\ \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)^t,\ \mathbf{v}_3 = (0, 1, 1)^t$

c. $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1)^t, \ \mathbf{v}_2 = (0, 2, 2, 2)^t, \ \mathbf{v}_3 = (1, 0, 0, 1)^t$

d. $\mathbf{v}_1 = (2, 2, 3, 2, 3)^t, \mathbf{v}_2 = (2, -1, 0, -1, 0)^t, \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 0, -1)^t, \mathbf{v}_4 = (1, 2, -1, 0, -1)^t,$ $\mathbf{v}_5 = (0, 1, 0, -1, 0)^t$

EJERCICIOS APLICADOS

8. En un artículo, J. Keener [KE] describe un método para clasificar equipos. Considere N equipos que deseamos clasificar. Asignamos una puntuación a cada equipo con base en su desempeño contra el otro y la fortaleza de sus oponentes. Suponga que existe un vector de clasificación $\mathbf{r}$ en $\mathbb{R}^N$ con entradas positivas r_i que indican la fuerza del equipo i. La puntuación para i está determinada por

$$s_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} r_j,$$

donde $a_{ij} \geq 0$ depende del registro que tiene el equipo i contra el equipo j y n_i es el número de juegos que ha jugado el equipo i. En este problema, hacemos que la matriz A tenga entradas

$$(A)_{ij} = \frac{a_{ij}}{n_i},$$

donde a_{ij} es el número de veces que el equipo i vence al equipo j. Es razonable suponer que la clasificación debería ser proporcional a la puntuación; es decir, $A\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r}$ donde λ es la constante de proporcionalidad. Puesto que $a_{ij} \geq 0$ para todas las i y j, $1 \leq i, j \leq N$, el teorema de Perron-Frobenius que se analizó en el artículo de Keener garantiza la existencia de un eigenvalor mayor $\lambda_1 > 0$ con un eigenvector $\mathbf{r}$ con entradas positivas que determinan la clasificación de los equipos.

A principios de la temporada de béisbol 2014, los equipos en la División Central de la Liga Americana tenían registros de acuerdo con lo siguiente:

	CHI	**CLE**	**DET**	**KC**	**MIN**
CHI	X	7-3	4-5	3-6	2-3
CLE	3-7	X	4-2	3-3	4-3
DET	5-4	2-4	X	6-3	4-4
KC	6-3	3-3	3-6	X	2-4
MIN	3-2	3-4	4-4	4-2	X

La entrada 7-3 indica que en 10 juegos efectuados entre CHI y CLE, CHI ganó 7 y perdió 3.

a. Encuentre la matriz de preferencia A.

b. Encuentre el polinomio característico de A.

c. Encuentre el eigenvalor positivo más grande de A.

d. Resuelva el sistema $(A - \lambda I)\,\mathbf{r} = \mathbf{0}$ para el vector de clasificación $\mathbf{r}$.

e. Proporcione la clasificación de los equipos.

9. Una **matriz persimétrica** es una matriz que es simétrica alrededor de ambas diagonales; es decir, una matriz $N \times N$ $A = (a_{ij})$ es persimétrica si $a_{ij} = a_{ji} = a_{N+1-i,N+1-j}$, para todas las $i = 1, 2, \ldots, N$ y $j = 1, 2, \ldots, N$. Diversos problemas de la teoría de comunicación tienen soluciones que implican los eigenvalores y eigenvectores de las matrices cuya forma es persimétrica. Por ejemplo, el eigenvector correspondiente al eigenvalor mínimo de la matriz persimétrica 4×4

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

da una respuesta de impulso de energía-canal unitario para una sucesión de error dada de longitud 2 y, por consiguiente, el peso mínimo para cualquier sucesión de error posible.

a. Use el teorema del círculo de Geršgorin para mostrar que si A es la matriz determinada anteriormente y λ es su eigenvalor mínimo, entonces $|\lambda - 4| = \rho(A - 4I)$, donde ρ denota el radio espectral.

b. Encuentre el eigenvalor mínimo de la matriz A por medio de hallar todos los eigenvalores $A-4I$ y calcular su radio espectral. A continuación, encuentre el eigenvector correspondiente.

c. Utilice el teorema del círculo de Geršgorin para mostrar que si λ es el eigenvalor mínimo de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

entonces $|\lambda - 6| = \rho(B - 6I)$.

d. Repita la parte **b)** usando la matriz B y el resultado en la parte **c)**.

EJERCICIOS TEÓRICOS

10. Muestre que los tres eigenvectores en el ejemplo 3 son linealmente independientes.

11. Muestre que un conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de k vectores ortogonales diferentes de cero es linealmente independiente.

12. Muestre que si A es una matriz y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son eigenvalores distintos con eigenvectores asociados $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$, entonces $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ es un conjunto linealmente independiente.

13. Sea $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto de vectores ortonormales diferentes de cero en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Determine los valores de c_k, para $k = 1, 2, \ldots, n$, si

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{v}_k.$$

14. Suponga que $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$, $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3\}$ y $\{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ son todos linealmente independientes. ¿$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ debe ser linealmente independiente?

15. Use el teorema del círculo de Geršgorin para mostrar que una matriz estrictamente diagonalmente dominante debe ser no singular.

16. Pruebe que el conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ descrito en el teorema Gram-Schmidt es ortogonal.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Describa cómo se pueden multiplicar los círculos de Geršgorin en una hoja de cálculo como MS Excel. Reproduzca la figura 9.1 para respaldar su análisis.

2. ¿Todos los vectores ortogonales son ortonormales? ¿Por qué sí o por qué no?

3. ¿Todos los vectores ortonormales son ortogonales? ¿Por qué sí o por qué no?

4. ¿Los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ en $\mathbb{R}^2$ pueden ser linealmente independientes? ¿Por qué sí o por qué no?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.2

1. Muestre que el siguiente par de matrices no son similares.

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

d. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

2. Muestre que los siguientes pares de matrices no son similares.

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

d. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. Defina $A = PDP^{-1}$ para las siguientes matrices D y P. Determine A^3.

a. $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

b. $P = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c. $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

d. $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

4. Determine A^4 para las siguientes matrices en el ejercicio 3.

5. Para cada una de las siguientes matrices, determine si es diagonalizable y, en tal caso, encuentre P y D con $A = PDP^{-1}$.

a. $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

d. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. Para cada una de las siguientes matrices, determine si es diagonalizable, y en tal caso, encuentre P y D con $A = PDP^{-1}$.

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

d. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

7. Para las matrices en el ejercicio 1 de la sección 9.1 que tienen tres eigenvectores linealmente independientes, forme la factorización $A = PDP^{-1}$.

8. Para las matrices en el ejercicio 2 de la sección 9.1 que tienen tres eigenvectores linealmente independientes, forme la factorización $A = PDP^{-1}$.

9. **i)** Determine si las siguientes matrices son definidas positivas y, en tal caso, **ii)** construya una matriz ortogonal Q para cada $Q^t AQ = D$, donde D es una matriz diagonal.

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

d. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10. **i)** Determine si las siguientes matrices son definidas positivas y, en tal caso, **ii)** construya una matriz ortogonal Q para cada $Q^t AQ = D$, en donde D es una matriz diagonal.

a. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ **b.** $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ **d.** $A = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

11. Muestre que cada una de las siguientes matrices son no singulares, pero no diagonalizables.

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **b.** $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **d.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

12. Muestre que las siguientes matrices son singulares, pero diagonalizables.

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **b.** $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

13. Muestre que la matriz dada en el ejemplo 3 de la sección 9.1,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

es similar a las matrices diagonales

$$D_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad D_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

14. Muestre que no hay matriz diagonal para la matriz determinada en el ejemplo 4 de la sección 9.1,

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

EJERCICIOS APLICADOS

15. En el ejercicio 22 de la sección 6.6 se usó una matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 1.59 & 1.69 & 2.13 \\ 1.69 & 1.31 & 1.72 \\ 2.13 & 1.72 & 1.85 \end{bmatrix}$$

para describir la longitud promedio de las alas de las moscas de fruta descendientes del apareamiento de tres mutantes de las moscas. La entrada a_{ij} representa la longitud promedio de las alas de una mosca descendiente de una mosca macho de tipo i y una mosca hembra de tipo j.

a. Encuentre los eigenvalores y los eigenvectores asociados de esta matriz.

b. ¿Esta matriz es definida positiva?

EJERCICIOS TEÓRICOS

16. Suponga que A y B son matrices $n \times n$ no singulares. Pruebe que AB es similar a BA.
17. Muestre que A es similar a B, y que B es similar a C, entonces A es similar a C.
18. Muestre que si A es similar a B, entonces
    a. $\det(A) = \det(B)$.
    b. El polinomio característico de A es el mismo que el polinomio característico de B.
    c. A es no singular si y sólo si B es no singular.
    d. Si A es no singular, muestre que A^{-1} es similar a B^{-1}.
    e. A^t es similar a B^t.
19. Pruebe el teorema 9.10.
20. Pruebe el teorema 9.13.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Lea el texto al margen del inicio de esta sección. Analice con detenimiento porqué sería mejor llamar ortogonales a las matrices ortonormales.
2. ¿Las matrices ortogonales (ortonormales) preservan el ángulo y la longitud? ¿Por qué sí o por qué no?
3. ¿Qué es la factorización de Takagi y cómo difiere de la descomposición de Shur?
4. ¿Qué es la descomposición polar y cómo difiere de la descomposición de Shur?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.3

1. Encuentre las primeras tres iteraciones obtenidas con el método de potencia aplicado a las siguientes matrices.

    a. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;
    Use $\mathbf{x}^{(0)} = (1, -1, 2)^t$.

    b. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;
    Use $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, 0, 1)^t$.

    c. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$;
    Use $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, 2, 1)^t$.

    d. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;
    Use $\mathbf{x}^{(0)} = (1, -2, 0, 3)^t$.

2. Encuentre las primeras tres iteraciones obtenidas con el método de potencia aplicado a las siguientes matrices.

    a. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$;
    Use $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 2, 1)^t$.

    b. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$;
    Use $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 0, 1)^t$.

    c. $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -2 & 5 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 5 & -2 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & 5 \end{bmatrix}$;
    Use $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 0, -3)^t$.

    d. $\begin{bmatrix} -4 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$;
    Use $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 1)^t$.

3. Repita el ejercicio 1 usando el método de potencia inversa.
4. Repita el ejercicio 2 usando el método de potencia inversa.

5. Encuentre las primeras tres iteraciones obtenidas con el método de potencia simétrica aplicado a las siguientes matrices.

a. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

Use $\mathbf{x}^{(0)} = (1, -1, 2)^t$.

b. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

Use $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, 0, 1)^t$.

c. $\begin{bmatrix} 4.75 & 2.25 & -0.25 \\ 2.25 & 4.75 & 1.25 \\ -0.25 & 1.25 & 4.75 \end{bmatrix}$;

Use $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 0)^t$.

d. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$;

Use $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 1, 0, 0)^t$.

6. Encuentre las primeras tres iteraciones obtenidas con el método de potencia simétrica aplicado a las siguientes matrices.

a. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$;

Use $\mathbf{x}^{(0)} = (1, -1, 2)^t$.

b. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$;

Use $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, 0, 1)^t$.

c. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

Use $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 0, 0, 0)^t$.

d. $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -2 & 5 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 5 & -2 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & 5 \end{bmatrix}$;

Use $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 0, -3)^t$.

7. Use el método de potencia para aproximar el eigenvalor dominante de las matrices en el ejercicio 1. Itere hasta alcanzar una tolerancia de 10^{-4} o hasta que el número de iteraciones exceda 25.

8. Use el método de potencia para aproximar el eigenvalor dominante de las matrices en el ejercicio 2. Itere hasta alcanzar una tolerancia de 10^{-4} o hasta que el número de iteraciones exceda 25.

9. Use el método de potencia inversa para aproximar el eigenvalor dominante de las matrices en el ejercicio 1. Itere hasta alcanzar una tolerancia de 10^{-4} o hasta que el número de iteraciones exceda 25.

10. Use el método de potencia inversa para aproximar el eigenvalor dominante de las matrices en el ejercicio 2. Itere hasta alcanzar una tolerancia de 10^{-4} o hasta que el número de iteraciones exceda 25.

11. Use el método de potencia simétrica para aproximar el eigenvalor dominante de las matrices en el ejercicio 5. Itere hasta alcanzar una tolerancia de 10^{-4} o hasta que el número de iteraciones exceda 25.

12. Use el método de potencia simétrica para aproximar el eigenvalor dominante de las matrices en el ejercicio 6. Itere hasta alcanzar una tolerancia de 10^{-4} o hasta que el número de iteraciones exceda 25.

13. Use la deflación de Wielandt y los resultados del ejercicio 7 para aproximar el segundo eigenvalor dominante de las matrices en el ejercicio 1. Itere hasta alcanzar una tolerancia de 10^{-4} o hasta que el número de iteraciones exceda 25.

14. Use la deflación de Wielandt y los resultados del ejercicio 8 para aproximar el segundo eigenvalor dominante de las matrices en el ejercicio 2. Itere hasta alcanzar una tolerancia de 10^{-4} o hasta que el número de iteraciones exceda 25.

15. Repita el ejercicio 7 con la técnica Δ^2 de Aitkens y el método de potencia para el eigenvalor dominante.

16. Repita el ejercicio 8 con la técnica Δ^2 de Aitkens y el método de potencia para el eigenvalor dominante.

EJERCICIOS APLICADOS

17. Siguiendo la línea del ejercicio 11 en la sección 6.3 y el ejercicio 13 en la sección 7.2 suponga que una especie de escarabajo tiene un periodo de vida de 4 años y que una hembra en el primer año tiene una tasa de supervivencia de $\frac{1}{2}$, en el segundo año, de $\frac{1}{4}$, y en el tercer año, de $\frac{1}{8}$. Además, suponga que una hembra pare, en promedio, dos hembras nuevas en el tercer año y cuatro en el cuarto año. La matriz que describe una sola contribución de las hembras en un año a la población femenina en el año siguiente es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix},$$

donde, de nuevo, la entrada en la i-ésima fila y la j-ésima columna denota la contribución probabilística que hace una hembra de edad j a la población de hembras del siguiente año de edad i.

a. Use el teorema del círculo de Geršgorin para determinar una región en el plano complejo que contiene todos los eigenvalores de A.

b. Use el método de potencia para determinar el eigenvalor dominante de la matriz y su eigenvector asociado.

c. Use el algoritmo 9.4 para determinar cualquier eigenvalor y eigenvector restantes de A.

d. Encuentre los eigenvalores de A mediante el polinomio característico de A y el método de Newton.

e. ¿Cuál es su predicción de largo plazo para la población de estos escarabajos?

18. Un sistema dinámico lineal se puede representar por las ecuaciones

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = C(t)\mathbf{x}(t) + D(t)\mathbf{u}(t),$$

donde A es una matriz variable $n \times n$, B es una matriz variable $n \times r$, C es una matriz variable $m \times n$, D es una matriz variable $m \times r$, $\mathbf{x}$ es un vector variable n-dimensional, $\mathbf{y}$ es un vector variable m-dimensional y $\mathbf{u}$ es un vector variable r dimensional. Para que el sistema sea estable, la matriz A debe tener todos sus eigenvalores con parte real positiva para todas las t. ¿El sistema es estable si

a. $A(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2.5 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$?

b. $A(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$?

19. La matriz tridiagonal $(m-1) \times (m-1)$

$$A = \begin{bmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\alpha \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha & 1+2\alpha \end{bmatrix}$$

participa en el método de diferencia regresiva para resolver la ecuación de calor. (Consulte la sección 12.2.) Para la estabilidad del método, necesitamos $\rho(A^{-1}) < 1$. Con $m = 11$, aproxime $\rho(A^{-1})$ para cada uno de los siguientes.

a. $\alpha = \frac{1}{4}$ **b.** $\alpha = \frac{1}{2}$ **c.** $\alpha = \frac{3}{4}$

¿Cuándo es estable el método?

20. Los eigenvalores de la matriz A en el ejercicio 19 son

$$\lambda_i = 1 + 4\alpha \left(\operatorname{sen} \frac{\pi i}{2m} \right)^2, \quad \text{para } i = 1, \ldots, m-1.$$

Compare la aproximación en el ejercicio 21 con el valor real de $\rho(A^{-1})$. De nuevo, ¿cuándo es estable el método?

21. Las matrices A y B $(m-1) \times (m-1)$ determinadas por

$$A = \begin{bmatrix} 1+\alpha & -\frac{\alpha}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\alpha}{2} & 1+\alpha & -\frac{\alpha}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{\alpha}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{\alpha}{2} & 1+\alpha \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \frac{\alpha}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & 1-\alpha & \frac{\alpha}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\alpha}{2} & 1-\alpha \end{bmatrix}$$

participan en el método Crank-Nicolson para resolver la ecuación de calor. (Consulte la sección 12.2.) Con $m = 11$, aproxime $\rho(A^{-1}B)$ para cada uno de los siguientes.

a. $\alpha = \frac{1}{4}$ **b.** $\alpha = \frac{1}{2}$ **c.** $\alpha = \frac{3}{4}$

22. El siguiente sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 5x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) + 4x_2(t) - x_3(t) \\ x_3'(t) &= - x_2(t) + 4x_3(t) + 2x_4(t) \\ x_4'(t) &= x_3(t) + 5x_4(t) \end{aligned}$$

se puede escribir en forma de matriz-vector $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$, donde

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Si la matriz A tiene eigenvalores reales y diferentes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y λ_4 con eigenvalores correspondientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_4$, la solución general para el sistema de ecuaciones diferenciales es

$$\mathbf{x} = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + c_3 e^{\lambda_3 t}\mathbf{v}_3 + c_4 e^{\lambda_4 t}\mathbf{v}_4,$$

donde c_1, c_2, c_3 y c_4 son constantes arbitrarias.

a. Use el método de potencia, la deflación de Wielandt y el método de potencia inversa para aproximar los eigenvalores y eigenvectores de A.

b. De ser posible, forme una solución general para el sistema de ecuaciones diferenciales.

c. De ser posible, encuentre las soluciones únicas del sistema de ecuaciones diferenciales que satisfacen la condición inicial $\mathbf{x}(0) = (2, 1, 0, -1)^t$.

EJERCICIOS TEÓRICOS

23. Deflación de Hotelling. Suponga que se ha obtenido el eigenvalor más grande λ_1 en magnitud y un eigenvector relacionado $\mathbf{v}^{(1)}$ para la matriz simétrica A $n \times n$. Muestre que la matriz

$$B = A - \frac{\lambda_1}{(\mathbf{v}^{(1)})^t \mathbf{v}^{(1)}} \mathbf{v}^{(1)} (\mathbf{v}^{(1)})^t$$

tiene los mismos eigenvalores $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ que A, excepto que B tiene eigenvalor 0 con eigenvector $\mathbf{v}^{(1)}$ en lugar de eigenvector λ_1. Use este método de deflación para encontrar λ_2 para cada matriz en el ejercicio 5. Desde el punto de vista teórico, este método puede continuar para encontrar más eigenvalores, pero pronto el error de redondeo hace que el esfuerzo sea inútil.

24. Técnica de aniquilación Suponga que la matriz A $n \times n$ tiene eigenvalores $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ordenados por

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|,$$

con eigenvectores linealmente independientes $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}$.

a. Muestre que si se aplica el método de potencia con un vector inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ determinado por

$$\mathbf{x}^{(0)} = \beta_2 \mathbf{v}^{(2)} + \beta_3 \mathbf{v}^{(3)} + \cdots + \beta_n \mathbf{v}^{(n)},$$

entonces la sucesión $\{\mu^{(m)}\}$ descrita en el algoritmo 9.1 convergerá en λ_2.

b. Muestre que para cualquier vector $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{v}^{(i)}$, el vector $\mathbf{x}^{(0)} = (A - \lambda_1 I)\mathbf{x}$ satisface la propiedad determinada en la parte a).

c. Obtenga una aproximación para λ_2 para las matrices en el ejercicio 1.

d. Muestre que este método puede continuar para encontrar λ_3 mediante $\mathbf{x}^{(0)} = (A - \lambda_2 I)(A - \lambda_1 I)\mathbf{x}$.

25. Muestre que la i-ésima fila de $B = A - \lambda_1 \mathbf{v}^{(1)} \mathbf{x}^t$ es cero, donde λ_1 es el mayor valor de A en valor absoluto, $\mathbf{v}^{(1)}$ es el eigenvector asociado de A para λ_1 y $\mathbf{x}$ es el vector definido en la ecuación (9.7).

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. El método de potencia se puede usar para encontrar el eigenvalor dominante de una matriz simétrica. El método requiere una aproximación inicial. ¿Cómo se puede seleccionar esta aproximación inicial en la práctica?
2. ¿El método de potencia funciona si el eigenvalor dominante tiene multiplicidad r? En este caso, ¿cuál sería el eigenvector calculado?
3. Describa el método de cociente de Rayleigh. ¿Cómo se compara el error con el método de potencia?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.4

1. Use el método de Householder para transformar las siguientes matrices en forma tridiagonal.

a. $\begin{bmatrix} 12 & 10 & 4 \\ 10 & 8 & -5 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 4.75 & 2.25 & -0.25 \\ 2.25 & 4.75 & 1.25 \\ -0.25 & 1.25 & 4.75 \end{bmatrix}$

2. Use el método de Householder para transformar las siguientes matrices en forma tridiagonal.

a. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -0.5 & 1.5 \\ -2 & 5 & 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 & 5 & -2 \\ 1.5 & -0.5 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 8 & 0.25 & 0.5 & 2 & -1 \\ 0.25 & -4 & 0 & 1 & 2 \\ 0.5 & 0 & 5 & 0.75 & -1 \\ 2 & 1 & 0.75 & 5 & -0.5 \\ -1 & 2 & -1 & -0.5 & 6 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

3. Modifique el algoritmo 9.5 del método de Householder para calcular las matrices similares de Hessenberg superior para las siguientes matrices no simétricas.

a. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -5 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

EJERCICIOS APLICADOS

4. El siguiente sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 5x_1(t) - x_2(t) + 2x_3(t) + x_4(t) \\ x_2'(t) &= -x_1(t) + 4x_2(t) + 2x_4(t) \\ x_3'(t) &= 2x_1(t) + 4x_3(t) + x_4(t) \\ x_4'(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) + 5x_4(t) \end{aligned}$$

se puede escribir en forma de matriz-vector $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$, donde

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

La construcción de la solución general para el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + c_3 e^{\lambda_3 t}\mathbf{v}_3 + c_4 e^{\lambda_4 t}\mathbf{v}_4$$

requiere los eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y λ_4 de A. Para encontrar los eigenvalores de A con el método QR se requiere una matriz tridiagonal simétrica similar a A. Use el método de Householder para encontrar esa matriz.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Al calcular los eigenvalores de matrices simétricas, las transformaciones de Householder colocarán la matriz en forma tridiagonal. ¿Por qué la matriz no se puede diagonalizar por completo con este método?
2. ¿La transformación de Householder preserva el ángulo y la longitud? ¿Por qué sí o por qué no?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.5

1. Aplique dos iteraciones del método QR sin cambio a las siguientes matrices.

a. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ **f.** $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.8 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}$

2. Aplique dos iteraciones del método QR sin cambio a las siguientes matrices.

a. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

3. Use el algoritmo QR para determinar, dentro de 10^{-5}, todos los eigenvalores para las matrices dadas en el ejercicio 1.

4. Use el algoritmo QR para determinar, dentro de 10^{-5}, todos los eigenvalores de las siguientes matrices

a. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

5. Use el método de potencia inversa para determinar, dentro de 10^{-5}, todos los eigenvectores para las matrices dadas en el ejercicio 1.

6. Use el método de potencia inversa para determinar, dentro de 10^{-5}, todos los eigenvectores para las matrices dadas en el ejercicio 4.

EJERCICIOS APLICADOS

7. En el ejemplo principal de este capítulo, el sistema lineal $A\mathbf{w} = -0.04(\rho/p)\lambda\mathbf{w}$ se debe resolver para $\mathbf{w}$ y λ, con el fin de aproximar los eigenvalores λ_k del sistema Strum-Liouville.

a. Encuentre los cuatro eigenvalores $\mu_1, \ldots, \mu_4$ de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

dentro de 10^{-5}.

b. Aproxime los eigenvalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ del sistema en términos de ρ y p.

8. La matriz tridiagonal $(m-1) \times (m-1)$

$$A = \begin{bmatrix} 1-2\alpha & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & 1-2\alpha & \alpha & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha & 1-2\alpha \end{bmatrix}$$

interviene en el método de diferencia regresiva para resolver la ecuación de calor (consulte la sección 12.2). Para la estabilidad del método, necesitamos $\rho(A) < 1$. Con $m = 11$, aproxime los eigenvalores de A para cada uno de los siguientes.

a. $\alpha = \frac{1}{4}$ **b.** $\alpha = \frac{1}{2}$ **c.** $\alpha = \frac{3}{4}$

¿Cuándo es estable el método?

9. Los eigenvalores de la matriz A en el ejercicio 8 son

$$\lambda_i = 1 - 4\alpha \left(\operatorname{sen} \frac{\pi i}{2m} \right)^2, \quad \text{para } i = 1, \ldots, m-1.$$

Compare las aproximaciones en el ejercicio 14 con los eigenvalores reales. De nuevo, ¿cuándo es estable el método?

10. El siguiente sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -4x_1(t) - x_2(t) \\ x_2'(t) &= -x_1(t) - 4x_2(t) + 2x_3 \\ x_3'(t) &= 2x_2(t) - 4x_3(t) - x_4(t) \\ x_4'(t) &= -x_3(t) + 4x_4(t) \end{aligned}$$

puede escribirse en forma de matriz-vector $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$, donde

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix},$$

para construir la solución general para el sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + c_3 e^{\lambda_3 t}\mathbf{v}_3 + c_4 e^{\lambda_4 t}\mathbf{v}_4,$$

donde c_1, c_2, c_3 y c_4 son constantes arbitrarias y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y λ_4 son eigenvalores con los eigenvectores correspondientes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ y $\mathbf{x}_4$.

a. Use el método QR para encontrar $\lambda_1, \dots, \lambda_4$.

b. Use el método de potencia inversa para encontrar $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_4$.

c. Forme la solución general de $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$.

d. Encuentre la única solución que satisface $\mathbf{x}(0) = (2, 1, -1, 3)^t$.

EJERCICIOS TEÓRICOS

11. a. Muestre que la matriz de rotación $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ aplicada al vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^t$ tiene el efecto geométrico de rotar $\mathbf{x}$ un ángulo θ sin cambiar su magnitud respecto a la norma l_2.

b. Muestre que la magnitud de $\mathbf{x}$ respecto a la norma l_∞ se puede cambiar mediante una matriz de rotación.

12. Si P es la matriz de rotación con $p_{ii} = p_{jj} = \cos\theta$ y $p_{ij} = -p_{ji} = \operatorname{sen}\theta$, para $j < i$. Muestre que para cualquier matriz A $n \times n$,

$$(AP)_{pq} = \begin{cases} a_{pq}, & \text{si } q \neq i, j, \\ (\cos\theta)a_{pj} + (\operatorname{sen}\theta)a_{pi}, & \text{si } q = j, \\ (\cos\theta)a_{pi} - (\operatorname{sen}\theta)a_{pj}, & \text{si } q = i. \end{cases}$$

$$(PA)_{pq} = \begin{cases} a_{pq}, & \text{si } p \neq i, j, \\ (\cos\theta)a_{jq} - (\operatorname{sen}\theta)a_{iq}, & \text{si } p = j, \\ (\operatorname{sen}\theta)a_{jq} + (\cos\theta)a_{iq}, & \text{si } p = i. \end{cases}$$

13. Muestre que el producto de una matriz triangular superior (a la izquierda) y una matriz Hessenberg superior produce una matriz Hessenberg superior.

14. Si P_k denota una matriz de rotación de la forma determinada en la ecuación (9.17).

a. Muestre que $P_2^t P_3^t$ difiere de una matriz triangular superior sólo en la mayoría de las posiciones (2, 1) y (3, 2).

b. Suponga que $P_2^t P_3^t \cdots P_k^t$ difiere de una matriz triangular superior sólo en la mayoría de las posiciones $(2, 1), (3, 2), \dots, (k, k-1)$. Muestre que $P_2^t P_3^t \cdots P_k^t P_{k+1}^t$ difiere de la matriz triangular superior sólo en la mayoría de las posiciones $(2, 1), (3, 2), \dots, (k, k-1), (k+1, k)$.

c. Muestre que la matriz $P_2^t P_3^t \cdots P_n^t$ es Hessenberg superior.

15. El **método de Jacobi** para una matriz simétrica A se describe por medio de

$$A_1 = A,$$

$$A_2 = P_1 A_1 P_1^t$$

y, en general,

$$A_{i+1} = P_i A_i P_i^t.$$

La matriz A_{i+1} tiende a una matriz diagonal, donde P_i es una matriz de rotación seleccionada para eliminar un elemento grande fuera de la diagonal en A_i. Suponga que $a_{j,k}$ y $a_{k,j}$ se establecerán en 0, donde $j \neq k$. Si $a_{jj} \neq a_{kk}$, entonces

$$(P_i)_{jj} = (P_i)_{kk} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{b}{\sqrt{c^2 + b^2}}\right)},$$

$$(P_i)_{kj} = \frac{c}{2(P_i)_{jj}\sqrt{c^2 + b^2}} = -(P_i)_{jk},$$

donde

$$c = 2a_{jk}\operatorname{sgn}(a_{jj} - a_{kk}) \quad \text{y} \quad b = |a_{jj} - a_{kk}|$$

o, si $a_{jj} = a_{kk}$,

$$(P_i)_{jj} = (P_i)_{kk} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

y

$$(P_i)_{kj} = -(P_i)_{jk} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Desarrolle un algoritmo para implementar el método de Jacobi al obtener $a_{21} = 0$. Entonces, establezca $a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}, a_{43}, \ldots, a_{n,1}, \ldots, a_{n,n-1}$ alrededor de cero. Esto se repite hasta que se calcula una matriz A_k con

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}^{(k)}|$$

suficientemente pequeña. Entonces, los eigenvalores de A se pueden aproximar mediante las entradas diagonales de A_k.

16. Repita el ejercicio 3 usando el método de Jacobi.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. La descomposición RQ transforma una matriz A en el producto de una matriz triangular superior R (también conocida como triangular derecha) y una matriz ortogonal Q. ¿Cómo difiere esta descomposición de la descomposición QR?

2. La transformación de Householder se puede usar para calcular la transformación QR de una matriz A $m \times n$ con $m \geq n$. ¿La transformación de Householder se puede usar para calcular la transformación RQ?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.6

1. Determine los valores singulares de las siguientes matrices.

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

d. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

2. Determine los valores singulares de las siguientes matrices.

a. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **b.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ **d.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Determine una descomposición en valores singulares para las matrices en el ejercicio 1.

4. Determine una descomposición en valores singulares para las matrices en el ejercicio 2.

5. Sea A la matriz dada en el ejemplo 2. Muestre que $(1, 2, 1)^t$, $(1, -1, 1)^t$, y $(-1, 0, 1)^t$ son eigenvectores de A^tA asociados a los eigenvalores $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2$, y $\lambda_3 = 1$, respectivamente.

EJERCICIOS APLICADOS

6. Dados los datos

x_i	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
y_i	1.3	3.5	4.2	5.0	7.0

a. Use la técnica de descomposición en valores singulares para determinar el polinomio de mínimos cuadrados de grado 1.

b. Use la técnica de descomposición en valores singulares para determinar el polinomio de mínimos cuadrados de grado 2.

7. Dados los datos

x_i	1.0	1.1	1.3	1.5	1.9	2.1
y_i	1.84	1.96	2.21	2.45	2.94	3.18

a. Use la técnica de descomposición en valores singulares para determinar el polinomio de mínimos cuadrados de grado 2.

b. Use la técnica de descomposición en valores singulares para determinar el polinomio de mínimos cuadrados de grado 3.

8. Determine una relación entre el número de peces y el número de especies de peces en las muestras tomadas para una parte de la Gran Barrera de Coral, P. Sale y R. Dybdahl [SD] se ajustan a un polinomio lineal de mínimos cuadrados para el siguiente conjunto de datos, recopilados en muestras durante un periodo de dos años. Sea x el número de peces en la muestra y y el número de especies en la muestra.

x	y	x	y	x	y
13	11	29	12	60	14
15	10	30	14	62	21
16	11	31	16	64	21
21	12	36	17	70	24
22	12	40	13	72	17
23	13	42	14	100	23
25	13	55	22	130	34

Determine el polinomio lineal de mínimos cuadrados para estos datos.

9. El siguiente conjunto de datos, presentado en el Subcomité Antimonopolio del Senado, muestra las características de supervivencia a choques de automóviles en varias clases. Encuentre el polinomio cuadrático de mínimos cuadrados que aproxima estos datos. (La tabla muestra el porcentaje de vehículos relacionados con accidentes en los que la lesión más grave fue fatal o grave.)

Tipo	Peso promedio	Porcentaje de presencia
1. Doméstico lujoso regular	4800 lb	3.1
2. Doméstico intermedio regular	3700 lb	4.0
3. Doméstico económico regular	3400 lb	5.2
4. Doméstico compacto	2800 lb	6.4
5. Extranjero compacto	900 lb	9.6

EJERCICIOS TEÓRICOS

10. Suponga que A es una matriz $m \times n$. Muestre que rango(A) es igual a rango(A^t).

11. Muestre que nulidad(A) $=$ nulidad(A^t) si y sólo si A es una matriz cuadrada.

12. Suponga que A tiene la descomposición en valores singulares $A = U\,S\,V^t$. Determine, con justificación, una descomposición en valores singulares de A^t.

13. Suponga que A tiene la descomposición en valores singulares $A = U\,S\,V^t$. Muestre que rango(A) $=$ rango(S).

14. Suponga que la matriz A $m \times n$ tiene la descomposición en valores singulares $A = U\,S\,V^t$. Exprese la nulidad(A) en términos de rango(S).

15. Suponga que la matriz A $n \times n$ tiene la descomposición en valores singulares $A = U\,S\,V^t$. Muestre que existe A^{-1} existe si y sólo si S^{-1} y encuentre la descomposición en valores singulares para A^{-1} cuando existe.

16. La parte ii) del teorema 9.26 establece que nulidad(A) = nulidad(A^tA). ¿También es cierto que nulidad(A) $=$ nulidad(AA^t)?

17. La parte iii) del teorema 9.26 establece que rango(A) = rango(A^tA). ¿También es cierto que rango(A) $=$ rango(AA^t)?

18. Muestre que si A es una matriz $m \times n$ y P es una matriz ortogonal $n \times n$, entonces PA tiene los mismos valores singulares que A.

19. Muestre que si A es una matriz no singular $n \times n$ con valores singulares $s_1, s_2, \ldots, s_n$, entonces el número de condición l_2 de A es $K_2(A) = (s_1/s_n)^2$.

20. Use el resultado en el ejercicio 19 para determinar los números de condición de las matrices cuadradas no singulares en los ejercicios 1 y 2.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con más ecuaciones que incógnitas recibe el nombre de sistema lineal sobredeterminado. ¿Cómo se puede usar la técnica de valor singular para resolver un sistema lineal sobredeterminado cuando existe una solución?

2. La importancia de la descomposición en valores singulares en muchas aplicaciones es que podemos deducir las características más importantes de una matriz $m \times n$ usanto una matriz que, a menudo, es significativamente más pequeña. Encuentre algunos ejemplos adicionales en los que esta técnica podría ser útil.

3. Proporcione algunos ejemplos sobre cómo se puede utilizar la aproximación por mínimos cuadrados en diferentes disciplinas. Por ejemplo, podemos seleccionar algunas como la ingeniería eléctrica y computacional, la estadística, los negocios o la economía, por nombrar algunas.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS (FINAL DEL CAPÍTULO)

1. Proporcione una descripción general de la implementación SVD en la biblioteca GSL.

2. Proporcione una descripción general del proyecto Apache Mahout y las implicaciones para implementación SVD.

CONCEPTOS CLAVE

Algoritmo QR
Círculo Geršgorin
Deflación Wielandt
Descomposición en valores singulares
Matriz de rotación
Matriz ortogonal
Matriz simétrica
Método de Householder
Método de potencia
Método de potencia inversa
Método de potencia simétrica
Métodos de deflación
Transformación de Householder
Transformación de similitud
Valor singular
Valores singulares
Vector ortogonal
Vector ortonormal

REVISIÓN DEL CAPÍTULO

El tema general del capítulo es la aproximación de eigenvalores y eigenvectores. Termina con una técnica para factorizar una matriz arbitraria que requiere estos métodos de aproximación.

Los círculos de Geršgorin proporcionan una aproximación cruda para colocar los eigenvalores de una matriz. El método de potencia se puede usar para encontrar el eigenvalor dominante y un eigenvector asociado para una matriz arbitraria A. Si A es simétrica, el método de potencia simétrica provee una convergencia más rápida para el eigenvalor dominante y un eigenvector relacionado. El método de potencia inversa encontrará el eigenvalor más cercano a un valor determinado y un eigenvector asociado. Este método, a menudo, se usa para refinar un eigenvalor y para calcular un eigenvector una vez que se ha encontrado un eigenvalor por alguna otra técnica.

Los métodos de deflación, como la deflación de Wielandt, obtienen otros eigenvalores una vez que se conoce el eigenvalor. Estos métodos se usan si sólo se requieren algunos eigenvalores ya que son susceptibles al error de redondeo. El método de potencia inversa debería usarse para mejorar la precisión de los eigenvalores aproximados obtenidos a partir de una técnica de deflación.

Los métodos con base en transformaciones de similitud, como el método de Householder, se usan para convertir una matriz simétrica en una matriz similar que es tridiagonal (o Hessenberg superior si la matriz no es simétrica). Posteriormente, técnicas como el método QR se pueden aplicar a la matriz (o Hessenberg superior) para obtener aproximaciones para todos los eigenvalores. Los eigenvectores asociados se pueden encontrar con un método iterativo, como el de potencia inversa, o modificar el método QR para incluir la aproximación de eigenvectores. Nosotros restringimos nuestro estudio a las matrices simétricas y sólo presentamos el método QR para calcular los eigenvalores para el caso simétrico.

La descomposición en valores singulares se analiza en la sección 9.6. Se usa para factorizar una matriz $m \times n$ en la forma $U\,S\,V^t$, donde U es una matriz ortogonal $m \times m$, V es una matriz ortogonal $n \times n$ y S es una matriz $m \times n$, cuyas únicas entradas diferentes de cero se encuentran a lo largo de la diagonal principal. Esta factorización tiene aplicaciones importantes que incluyen procesamiento de imágenes, compresión de datos y resolución de sistemas lineales sobredeterminados que surgen en las aproximaciones de mínimos cuadrados. La descomposición en valores singulares requiere el cálculo de eigenvalores y eigenvectores, por lo que es adecuado concluir el capítulo con esta técnica.

Los libros de Wilkinson [Wil2] y Wilkinson y Reinsch [WR] son clásicos en el estudio de los problemas de eigenvalores. Stewart [Stew2] también es una buena fuente de información sobre el problema general y Parlett [Par] considera el problema simétrico. Un estudio del problema no simétrico se puede encontrar en Saad [Sa1].