Capítulo 3

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.1

1. Para las funciones dadas $f(x)$, sean $x_0 = 0, x_1 = 0.6$, y $x_2 = 0.9$. Construya polinomios de interpolación de grados a lo sumo uno y dos para aproximar $f(0.45)$ y encuentre el error absoluto.

a. $f(x) = \cos x$
b. $f(x) = \sqrt{1+x}$
c. $f(x) = \ln(x+1)$
d. $f(x) = \tan x$

2. Para las funciones dadas $f(x)$, sean $x_0 = 1, x_1 = 1.25$, y $x_2 = 1.6$. Construya polinomios de interpolación de grados a lo sumo uno y máximo dos para aproximar $f(1.4)$ y encuentre el error absoluto.

a. $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$
b. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$
c. $f(x) = \log_{10}(3x-1)$
d. $f(x) = e^{2x} - x$

3. Use el teorema 3.3 para encontrar una cota del error para las aproximaciones en el ejercicio 1.

4. Use el teorema 3.3 para encontrar una cota del error para las aproximaciones en el ejercicio 2.

5. Use polinomios de interpolación de Lagrange adecuados de grados 1, 2 y 3 para aproximar cada una de las siguientes imágenes:

a. $f(8.4)$ si $f(8.1) = 16.94410$, $f(8.3) = 17.56492$, $f(8.6) = 18.50515$, $f(8.7) = 18.82091$
b. $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ si $f(-0.75) = -0.07181250$, $f(-0.5) = -0.02475000$, $f(-0.25) = 0.33493750$, $f(0) = 1.10100000$
c. $f(0.25)$ si $f(0.1) = 0.62049958$, $f(0.2) = -0.28398668$, $f(0.3) = 0.00660095$, $f(0.4) = 0.24842440$
d. $f(0.9)$ si $f(0.6) = -0.17694460$, $f(0.7) = 0.01375227$, $f(0.8) = 0.22363362$, $f(1.0) = 0.65809197$

6. Use polinomios de interpolación de Lagrange adecuados de grados uno, dos y tres para aproximar cada uno de los siguientes:

a. $f(0.43)$ si $f(0) = 1$, $f(0.25) = 1.64872$, $f(0.5) = 2.71828$, $f(0.75) = 4.48169$
b. $f(0)$ si $f(-0.5) = 1.93750$, $f(-0.25) = 1.33203$, $f(0.25) = 0.800781$, $f(0.5) = 0.687500$
c. $f(0.18)$ si $f(0.1) = -0.29004986$, $f(0.2) = -0.56079734$, $f(0.3) = -0.81401972$, $f(0.4) = -1.0526302$
d. $f(0.25)$ si $f(-1) = 0.86199480$, $f(-0.5) = 0.95802009$, $f(0) = 1.0986123$, $f(0.5) = 1.2943767$

7. Los datos para el ejercicio 5 se generaron usando las siguientes funciones. Use la fórmula del error para encontrar una cota del error y compárela con el error real en los casos $n = 1$ y $n = 2$.

a. $f(x) = x \ln x$
b. $f(x) = x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101$
c. $f(x) = x \cos x - 2x^2 + 3x - 1$
d. $f(x) = \operatorname{sen}(e^x - 2)$

8. Los datos para el ejercicio 6 se generaron usando las siguientes funciones. Use la fórmula del error para encontrar una cota del error y compárela con el error real en los casos $n = 1$ y $n = 2$.

a. $f(x) = e^{2x}$
b. $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$
c. $f(x) = x^2 \cos x - 3x$
d. $f(x) = \ln(e^x + 2)$

9. Si $P_3(x)$ es el polinomio de interpolación para los datos $(0, 0)$, $(0.5, y)$, $(1, 3)$ y $(2, 2)$. El coeficiente de x^3 en $P_3(x)$ es 6. Encuentre y.

10. Sea $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ y $P_2(x)$ es el polinomio de interpolación en $x_0 = 0$, x_1 y $x_2 = 1$. Encuentre el valor más grande de x_1 en $(0, 1)$ para el que $f(0.5) - P_2(0.5) = -0.25$.

11. Use los siguientes valores y la aritmética de redondeo de cuatro dígitos para construir una aproximación del tercer polinomio de Lagrange para $f(1.09)$. La función aproximada es $f(x) = \log_{10}(\tan x)$. Use esta información para encontrar una cota para el error en la aproximación.

$$f(1.00) = 0.1924 \quad f(1.05) = 0.2414 \quad f(1.10) = 0.2933 \quad f(1.15) = 0.3492$$

12. Use el polinomio de interpolación de Lagrange de grado 3 o menos y la aritmética de corte de cuatro dígitos para aproximar cos 0.750 con los siguientes valores. Encuentre una cota para el error en la aproximación

$$\cos 0.698 = 0.7661 \quad \cos 0.733 = 0.7432 \quad \cos 0.768 = 0.7193 \quad \cos 0.803 = 0.6946$$

El valor real de cos 0.750 es 0.7317 (para cuatro lugares decimales). Explique la discrepancia entre el error real y la cota del error.

13. Construya los polinomios de interpolación de Lagrange para las siguientes funciones y encuentre una cota para el error absoluto en el intervalo $[x_0, x_n]$.

a. $f(x) = e^{2x} \cos 3x, \quad x_0 = 0, x_1 = 0.3, x_2 = 0.6, n = 2$

b. $f(x) = \text{sen}(\ln x), \quad x_0 = 2.0, x_1 = 2.4, x_2 = 2.6, n = 2$

c. $f(x) = \ln x, \quad x_0 = 1, x_1 = 1.1, x_2 = 1.3, x_3 = 1.4, n = 3$

d. $f(x) = \cos x + \text{sen}\, x, \quad x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 1.0, n = 3$

14. Construya los polinomios de interpolación de Lagrange para las siguientes funciones y encuentre una cota para el error absoluto en el intervalo $[x_0, x_n]$.

a. $f(x) = e^{-2x} \text{sen}\, 3x, \quad x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{4}, n = 2$

b. $f(x) = \log_{10} x, \quad x_0 = 3.0, x_1 = 3.2, x_2 = 3.5, n = 2$

c. $f(x) = e^x + e^{-x}, \quad x_0 = -0.3, x_1 = 0, x_2 = 0.3, n = 2$

d. $f(x) = \cos(2\ln(3x)), \quad x_0 = 0, x_1 = 0.3, x_2 = 0.5, x_3 = 1.0, n = 3$

15. Sea $f(x) = e^x$, para $0 \leq x \leq 2$.

a. Aproxime $f(0.25)$ usando interpolación lineal con $x_0 = 0$ y $x_1 = 0.5$.

b. Aproxime $f(0.75)$ usando interpolación lineal con $x_0 = 0.5$ y $x_1 = 1$.

c. Aproxime $f(0.25)$ y $f(0.75)$ usando el segundo polinomio de interpolación con $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$.

d. ¿Cuáles aproximaciones son mejores y por qué?

16. Sea $f(x) = e^{-x} \cos x$, para $0 \leq x \leq 1$.

a. Aproxime $f(0.25)$ usando interpolación lineal con $x_0 = 0$ y $x_1 = 0.5$.

b. Aproxime $f(0.75)$ usando interpolación lineal con $x_0 = 0.5$ y $x_1 = 1$.

c. Aproxime $f(0.25)$ y $f(0.75)$ usando el segundo polinomio de interpolación con $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$ y $x_2 = 1.0$.

d. ¿Cuáles aproximaciones son mejores y por qué?

17. Suponga que usted necesita construir tablas de ocho lugares decimales para la función logarítmica común, o de base 10, desde $x = 1$ hasta $x = 10$ de tal forma que la interpolación lineal sea precisa dentro de 10^{-6}. Determine una cota del tamaño de paso para esta tabla. ¿Qué selección de tamaño de paso realizaría para garantizar que $x = 10$ se encuentra en la tabla?

18. En el ejercicio 24 de la sección 1.1 se integró una serie de Maclaurin para aproximar erf(1), donde erf(x) es la función de error de distribución normal definida por

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

a. Use la serie de Maclaurin para construir una tabla para erf(x) que sea precisa dentro de 10^{-4} para erf(x_i), donde $x_i = 0.2i$, para $i = 0, 1, \ldots, 5$.

b. Use tanto la interpolación lineal como la interpolación cuadrática para obtener una aproximación para erf($\frac{1}{3}$). ¿Qué enfoque parece más factible?

EJERCICIOS APLICADOS

19. **a.** La introducción para este capítulo incluyó una tabla que enumera la población de Estados Unidos desde 1960 hasta 2010. Use la interpolación de Lagrange para aproximar la población en los años 1950, 1975, 2014 y 2020.

b. La población en 1950 era aproximadamente 150 697 360 y en 2014 se calculó que era de 317 298 000. ¿Qué tan precisas cree usted que son sus cifras para 1975 y 2020?

20. Se sospecha que las grandes cantidades de tanino en las hojas maduras de los robles inhiben el crecimiento de la larva de polilla de invierno (*Operophtera bromata L., Geometridae*) que daña en exceso estos árboles en ciertos años. La siguiente tabla enumera el peso promedio de dos muestras de la larva en los primeros 28 días después de su nacimiento. Mientras la primera muestra se crió en las hojas jóvenes de roble, la segunda muestra se crió en las hojas maduras.

a. Use la interpolación de Lagrange para aproximar la curva de peso promedio para cada muestra.

b. Encuentre un peso promedio máximo aproximado para cada muestra determinando el máximo del polinomio de interpolación.

Día	0	6	10	13	17	20	28
Muestra 1 peso promedio (mg)	6.67	17.33	42.67	37.33	30.10	29.31	28.74
Muestra 2 peso promedio (mg)	6.67	16.11	18.89	15.00	10.56	9.44	8.89

EJERCICIOS TEÓRICOS

21. Muestre que $\max\limits_{x_j \le x \le x_{j+1}} |g(x)| = h^2/4$, donde $g(x) = (x - jh)(x - (j+1)h)$.

22. Pruebe el teorema de Taylor 1.14 siguiendo el procedimiento en la demostración del teorema 3.3. [*Sugerencia*: Sea

$$g(t) = f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)] \cdot \frac{(t - x_0)^{n+1}}{(x - x_0)^{n+1}},$$

donde P es el enésimo polinomio de Taylor y use el teorema de generalización de Rolle 1.10.]

23. El polinomio de Bernstein de grado n para $f \in C[0, 1]$ está dado para

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1 - x)^{n-k},$$

donde $\binom{n}{k}$ denota $n!/k!(n-k)!$ Estos polinomios se pueden usar en una prueba constructiva del teorema de aproximación de Weierstrass 3.1 (consulte [Bart]) porque $\lim\limits_{n\to\infty} B_n(x) = f(x)$ para cada $x \in [0, 1]$.

a. Encuentre $B_3(x)$ para las funciones

i. $f(x) = x$ **ii.** $f(x) = 1$

b. Muestre que para cada $k \le n$,

$$\binom{n-1}{k-1} = \left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}.$$

c. Use la parte b) y el hecho, a partir de ii) en la parte a), de que

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}, \quad \text{para cada } n,$$

para mostrar que, para $f(x) = x^2$,

$$B_n(x) = \left(\frac{n-1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x.$$

d. Use la parte c) para calcular el valor de n necesario para que $\left|B_n(x) - x^2\right| \le 10^{-6}$ sea válido para todas las x en $[0, 1]$.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Suponga que usamos el polinomio de Lagrange para ajustar dos conjuntos de datos determinados que concuerdan exactamente, excepto por una pequeña perturbación en uno de los puntos de datos debido al error de medición. A pesar de que la perturbación es pequeña, el cambio en el polinomio de Lagrange es grande. Explique por qué se presenta esta discrepancia.

2. Si decidimos incrementar el grado del polinomio de interpolación al agregar nodos, ¿existe una forma fácil de usar un polinomio de interpolación previo para obtener un polinomio de interpolación de grado más alto o necesitamos volver a empezar?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.2

1. Con el método de Neville obtenga las aproximaciones para los polinomios de interpolación de Lagrange de grados uno, dos y tres para aproximar cada uno de los siguientes:

a. $f(8.4)$ si $f(8.1) = 16.94410$, $f(8.3) = 17.56492$, $f(8.6) = 18.50515$, $f(8.7) = 18.82091$

b. $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ si $f(-0.75) = -0.07181250$, $f(-0.5) = -0.02475000$, $f(-0.25) = 0.33493750$, $f(0) = 1.10100000$

c. $f(0.25)$ si $f(0.1) = 0.62049958$, $f(0.2) = -0.28398668$, $f(0.3) = 0.00660095$, $f(0.4) = 0.24842440$

d. $f(0.9)$ si $f(0.6) = -0.17694460$, $f(0.7) = 0.01375227$, $f(0.8) = 0.22363362$, $f(1.0) = 0.65809197$

2. Use el método de Neville a fin de obtener las aproximaciones para los polinomios de interpolación de Lagrange de grados uno, dos y tres para aproximar cada uno de los siguientes:

a. $f(0.43)$ si $f(0) = 1$, $f(0.25) = 1.64872$, $f(0.5) = 2.71828$, $f(0.75) = 4.48169$

b. $f(0)$ si $f(-0.5) = 1.93750$, $f(-0.25) = 1.33203$, $f(0.25) = 0.800781$, $f(0.5) = 0.687500$

c. $f(0.18)$ si $f(0.1) = -0.29004986$, $f(0.2) = -0.56079734$, $f(0.3) = -0.81401972$, $f(0.4) = -1.0526302$

d. $f(0.25)$ si $f(-1) = 0.86199480$, $f(-0.5) = 0.95802009$, $f(0) = 1.0986123$, $f(0.5) = 1.2943767$

3. Use el método de Neville para aproximar $\sqrt{3}$ con las siguientes funciones y valores.

a. $f(x) = 3^x$ y los valores $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$, y $x_4 = 2$.

b. $f(x) = \sqrt{x}$ y los valores $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4$, y $x_4 = 5$.

c. Compare la precisión de la aproximación en las partes a) y b).

4. Sea $P_3(x)$ el polinomio de interpolación para los datos $(0, 0)$, $(0.5, y)$, $(1, 3)$ y $(2, 2)$. Encuentre y si el coeficiente de x^3 en $P_3(x)$ es 6.

5. El método de Neville se usa para aproximar $f(0.4)$, dada la siguiente tabla.

$x_0 = 0$	$P_0 = 1$			
$x_1 = 0.25$	$P_1 = 2$	$P_{01} = 2.6$		
$x_2 = 0.5$	P_2	$P_{1,2}$	$P_{0,1,2}$	
$x_3 = 0.75$	$P_3 = 8$	$P_{2,3} = 2.4$	$P_{1,2,3} = 2.96$	$P_{0,1,2,3} = 3.016$

Determine $P_2 = f(0.5)$.

6. El método de Neville se usa para aproximar $f(0.5)$, dada la siguiente tabla.

$x_0 = 0$	$P_0 = 0$		
$x_1 = 0.4$	$P_1 = 2.8$	$P_{0,1} = 3.5$	
$x_2 = 0.7$	P_2	$P_{1,2}$	$P_{0,1,2} = \frac{27}{7}$

Determine $P_2 = f(0.7)$.

7. Suponga que $x_j = j$, para $j = 0, 1, 2, 3$, y se sabe que

$$P_{0,1}(x) = 2x + 1, \quad P_{0,2}(x) = x + 1, \quad \text{y} \quad P_{1,2,3}(2.5) = 3.$$

Encuentre $P_{0,1,2,3} = (2.5)$.

8. Suponga $x_j = j$, para $j = 0, 1, 2, 3$, y se sabe que

$$P_{0,1}(x) = x + 1, \quad P_{1,2}(x) = 3x - 1, \quad \text{y} \quad P_{1,2,3}(1.5) = 4.$$

Encuentre $P_{0,1,2,3}(1.5)$.

9. El algoritmo de Neville se usa para aproximar $f(0)$ usando $f(-2), f(-1), f(1)$ y $f(2)$. Suponga que $f(-1)$ se disminuyó en 2 y $f(1)$ se incrementó en 3. Determine el error en el cálculo original del valor del polinomio de interpolación para aproximar $f(0)$.

10. El algoritmo de Neville se utiliza para aproximar $f(0)$ mediante $f(-2), f(-1), f(1)$ y $f(2)$. Suponga que $f(-1)$ se disminuyó en 2 y $f(1)$ se incrementó en 3. Determine el error en el cálculo original del valor del polinomio de interpolación para aproximar $f(0)$.

EJERCICIOS TEÓRICOS

11. Construya una sucesión de valores interpolantes y_n para $f(1+\sqrt{10})$, donde $f(x) = (1+x^2)^{-1}$ para $-5 \leq x \leq 5$, como sigue: para cada $n = 1, 2, \ldots, 10$, sea $h = 10/n$ y $y_n = P_n(1+\sqrt{10})$, donde $P_n(x)$ es el polinomio de interpolación para $f(x)$ en los nodos $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ y $x_j^{(n)} = -5 + jh$, para cada $j = 0, 1, 2, \ldots, n$. ¿La sucesión $\{y_n\}$ parece converger a $f(1+\sqrt{10})$?

Interpolación inversa Suponga que $f \in C^1[a,b]$, $f'(x) \neq 0$ en $[a,b]$ y f tiene un cero p en $[a, b]$. Si $x_0, \ldots, x_n$ son $n+1$ números distintos en $[a, b]$ con $f(x_k) = y_k$ para cada $k = 0, 1, \ldots, n$. Para aproximar p, construya el polinomio de interpolación de grado n en los nodos $y_0, \ldots, y_n$ para f^{-1}. Puesto que $y_k = f(x_k)$ y $0 = f(p)$, sigue que $f^{-1}(y_k) = x_k$ y $p = f^{-1}(0)$. El uso de la interpolación iterada para aproximar $f^{-1}(0)$ recibe el nombre de *interpolación iterada inversa*.

12. Use la interpolación inversa para encontrar una aproximación a la solución de $x - e^{-x} = 0$, usando los datos

x	0.3	0.4	0.5	0.6
e^{-x}	0.740818	0.670320	0.606531	0.548812

13. Construya un algoritmo que pueda usarse para la interpolación inversa.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Fiabilidad: ¿Qué es y cómo se mide? Lea el artículo que se encuentra en http://www.slideshare.net/analisedecurvas/reliability-what-is-it-and-how-is-it-measured. Resuma sus hallazgos y describa cómo se aplica el método de Neville para medir el error.

2. ¿El método de Neville se puede usar para obtener el polinomio de interpolación en un punto general en oposición a un punto específico?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.3

1. Utilice la ecuación (3.10) o el algoritmo 3.2 para construir polinomios interpolantes de grados uno, dos y tres para los siguientes datos. Aproxime el valor especificado usando cada uno de los polinomios.

a. $f(8.4)$ si $f(8.1) = 16.94410$, $f(8.3) = 17.56492$, $f(8.6) = 18.50515$, $f(8.7) = 18.82091$

b. $f(0.9)$ si $f(0.6) = -0.17694460$, $f(0.7) = 0.01375227$, $f(0.8) = 0.22363362$, $f(1.0) = 0.65809197$

2. Utilice la ecuación (3.10) o el algoritmo 3.2 para construir polinomios interpolantes de grados uno, dos y tres para los siguientes datos. Aproxime el valor especificado usando cada uno de los polinomios.

a. $f(0.43)$ si $f(0) = 1$, $f(0.25) = 1.64872$, $f(0.5) = 2.71828$, $f(0.75) = 4.48169$

b. $f(0)$ si $f(-0.5) = 1.93750$, $f(-0.25) = 1.33203$, $f(0.25) = 0.800781$, $f(0.5) = 0.687500$

3. Utilice la fórmula de diferencias hacia adelante de Newton para construir los polinomios de interpolación de grados uno, dos y tres para los siguientes datos. Aproxime el valor especificado usando cada uno de los polinomios.

a. $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ si $f(-0.75) = -0.07181250$, $f(-0.5) = -0.02475000$, $f(-0.25) = 0.33493750$, $f(0) = 1.10100000$

b. $f(0.25)$ si $f(0.1) = -0.62049958$, $f(0.2) = -0.28398668$, $f(0.3) = 0.00660095$, $f(0.4) = 0.24842440$

4. Utilice la fórmula de diferencias hacia adelante de Newton para construir los polinomios de interpolación de grados uno, dos y tres para los siguientes datos. Aproxime el valor especificado usando cada uno de los polinomios.

a. $f(0.43)$ si $f(0) = 1$, $f(0.25) = 1.64872$, $f(0.5) = 2.71828$, $f(0.75) = 4.48169$

b. $f(0.18)$ si $f(0.1) = -0.29004986$, $f(0.2) = -0.56079734$, $f(0.3) = -0.81401972$, $f(0.4) = -1.0526302$

5. Utilice la fórmula de diferencias hacia adelante de Newton para construir los polinomios de interpolación de grados uno, dos y tres para los siguientes datos. Aproxime el valor especificado usando cada uno de los polinomios.

a. $f(-1/3)$ si $f(-0.75) = -0.07181250$, $f(-0.5) = -0.02475000$, $f(-0.25) = 0.33493750$, $f(0) = 1.10100000$

b. $f(0.25)$ si $f(0.1) = -0.62049958$, $f(0.2) = -0.28398668$, $f(0.3) = 0.00660095$, $f(0.4) = 0.24842440$

6. Utilice la fórmula de diferencias hacia adelante de Newton para construir los polinomios de interpolación de grado uno, dos y tres para los siguientes datos. Aproxime el valor especificado mediante cada uno de los polinomios.

a. $f(0.43)$ si $f(0) = 1$, $f(0.25) = 1.64872$, $f(0.5) = 2.71828$, $f(0.75) = 4.48169$

b. $f(0.25)$ si $f(-1) = 0.86199480$, $f(-0.5) = 0.95802009$, $f(0) = 1.0986123$, $f(0.5) = 1.2943767$

7. **a.** Utilice el algoritmo 3.2 para construir el polinomio interpolante de grado tres para los puntos espaciados de manera desigual que se dan en la siguiente tabla:

x	$f(x)$
−0.1	5.30000
0.0	2.00000
0.2	3.19000
0.3	1.00000

b. Agregue $f(0.35) = 0.97260$ a la tabla y construya el polinomio interpolante de grado cuatro.

8. **a.** Use el algoritmo 3.2 para construir el polinomio interpolante de grado cuatro para los puntos espaciados de manera desigual que se dan en la siguiente tabla:

x	$f(x)$
0.0	−6.00000
0.1	−5.89483
0.3	−5.65014
0.6	−5.17788
1.0	−4.28172

b. Agregue $f(1.1) = -3.99583$ a la tabla y construya el polinomio interpolante de grado cinco.

9. **a.** Aproxime $f(0.05)$ usando los siguientes datos y la fórmula de diferencias hacia adelante de Newton:

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
$f(x)$	1.00000	1.22140	1.49182	1.82212	2.22554

b. Use la fórmula de diferencias hacia atrás de Newton para aproximar $f(0.65)$.

c. Use la fórmula de Stirling para aproximar $f(0.43)$.

10. **a.** Aproxime $f(-0.05)$ usando los siguientes datos y la fórmula de diferencias hacia adelante de Newton:

x	−1.2	−0.9	−0.6	−0.3	0.0
$f(x)$	0.18232	−0.105083	−0.51036	−1.20397	−3.12145

b. Use la fórmula de diferencias hacia atrás de Newton para aproximar $f(-0.2)$.

c. Use la fórmula de Stirling para aproximar $f(-0.43)$.

11. Se proporcionan los siguientes datos para un polinomio $P(x)$ de grado desconocido.

x	0	1	2
$P(x)$	2	−1	4

Determine el coeficiente de x^2 en $P(x)$ si las diferencias hacia adelante de tercer orden son 1.

12. Se proporcionan los siguientes datos para un polinomio $P(x)$ de grado desconocido.

x	0	1	2	3
$P(x)$	4	9	15	18

Determine el coeficiente de x^3 en $P(x)$ si las diferencias hacia adelante de cuarto orden son 1.

13. La fórmula de la diferencias hacia adelante de Newton se usa para aproximar $f(0.3)$ dada la siguiente tabla.

x	0.0	0.2	0.4	0.6
$f(x)$	15.0	21.0	30.0	51.0

Suponga que se descubre que $f(0.4)$ se subestimó en 10 y que $f(0.6)$ se exageró en 5. ¿En cuánto debería modificarse la aproximación de $f(0.3)$?

14. Para una función f, la fórmula de diferencias divididas de Newton da el polinomio interpolante

$$P_3(x) = 1 + 4x + 4x(x - 0.25) + \frac{16}{3}x(x - 0.25)(x - 0.5),$$

en los nodos $x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5$ y $x_3 = 0.75$. Encuentre $f(0.75)$.

15. Un polinomio de cuarto grado $P(x)$ satisface $\Delta^4 P(0) = 24$, $\Delta^3 P(0) = 6$, y $\Delta^2 P(0) = 0$, donde $\Delta P(x) = P(x+1) - P(x)$. Calcule $\Delta^2 P(10)$.

16. Para una función f, las diferencias divididas hacia adelante están dadas por

$x_0 = 0.0$	$f[x_0]$		
		$f[x_0, x_1]$	
$x_1 = 0.4$	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{50}{7}$
		$f[x_1, x_2] = 10$	
$x_2 = 0.7$	$f[x_2] = 6$		

Determine las entradas faltantes en la tabla.

EJERCICIOS APLICADOS

17. a. La introducción de este capítulo incluyó una tabla que lista la población de Estados Unidos desde 1960 hasta 2010. Use diferencias divididas adecuadas para aproximar la población en los años 1950, 1975, 2014 y 2020.

b. La población en 1950 era aproximadamente 150 697 360 y en 2014 se calculó que sería de 317 298 000. ¿Qué tan precisas cree usted que son las cifras para 1975 y 2020?

18. El tiempo más rápido jamás registrado en el Derby de Kentucky fue de un caballo llamado Secretariat en 1973. Él cubrió la pista de $1\frac{1}{4}$ de milla en 1:59 $\frac{2}{5}$(1 minuto y 59.4 segundos). Los tiempos para los palos de cuarto de milla, media milla y una milla fueron: $0{:}25\frac{1}{5}$, $0 : 49\frac{1}{5}$, y $1{:}36\frac{2}{5}$.

a. Use la interpolación para predecir el tiempo en el palo de tres cuartos de milla y compárelo con el tiempo real de 1:13.

b. Use la derivada del polinomio de interpolación para calcular la velocidad de Secretariat al final de la carrera.

EJERCICIOS TEÓRICOS

19. Muestre que el polinomio que interpola los siguientes datos tiene grado tres.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1	4	11	16	13	-4

20. **a.** Muestre que los polinomios cúbicos

$$P(x) = 3 - 2(x+1) + 0(x+1)(x) + (x+1)(x)(x-1)$$

y

$$Q(x) = -1 + 4(x+2) - 3(x+2)(x+1) + (x+2)(x+1)(x)$$

interpolan los datos

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	3	1	-1	3

b. ¿Por qué la parte a) no viola la propiedad de unicidad de los polinomios de interpolación?

21. Dado

$$\begin{aligned} P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\ + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots \\ + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}), \end{aligned}$$

use $P_n(x_2)$ para mostrar que $a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$.

22. Muestre que

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!},$$

para algunos $\xi(x)$. [*Sugerencia*: A partir de la ecuación (3.3)

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)\cdots(x - x_n).$$

Considerando el polinomio de interpolación de grado $n+1$ en $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$, tenemos

$$f(x) = P_{n+1}(x) = P_n(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x](x - x_0)\cdots(x - x_n).$$

23. Sea $i_0, i_1, \ldots, i_n$ una reorganización de los enteros $0, 1, \ldots, n$. Muestre que $f[x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}] = f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. [*Sugerencia*: Considere el coeficiente principal del enésimo polinomio de Lagrange sobre los datos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} = \{x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$.]

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Compare y contraste varios de los diferentes métodos de diferencias divididas que leyó en este capítulo.
2. ¿Es más fácil agregar un nuevo par de datos usando métodos de diferencias divididas con el fin de obtener un polinomio de Lagrange de grado superior?
3. El polinomio de Lagrange se usó para deducir la fórmula del error en la interpolación polinomial. ¿Es posible usar alguna de estas fórmulas de diferencias divididas para deducir ese error? ¿Por qué sí o por qué no?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.4

1. Use el teorema 3.9 o el algoritmo 3.3 para construir un polinomio de aproximación para los siguientes datos.

a.

x	$f(x)$	$f'(x)$
8.3	17.56492	3.116256
8.6	18.50515	3.151762

b.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.8	0.22363362	2.1691753
1.0	0.65809197	2.0466965

c.

x	$f(x)$	$f'(x)$
-0.5	-0.0247500	0.7510000
-0.25	0.3349375	2.1890000
0	1.1010000	4.0020000

d.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.1	-0.62049958	3.58502082
0.2	-0.28398668	3.14033271
0.3	0.00660095	2.66668043
0.4	0.24842440	2.16529366

2. Use el teorema 3.9 o el algoritmo 3.3 para construir un polinomio de aproximación para los siguientes datos.

a.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0	1.00000	2.00000
0.5	2.71828	5.43656

b.

x	$f(x)$	$f'(x)$
-0.25	1.33203	0.437500
0.25	0.800781	-0.625000

c.

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.1	-0.29004996	-2.8019975
0.2	-0.56079734	-2.6159201
0.3	-0.81401972	-2.9734038

d.

x	$f(x)$	$f'(x)$
-1	0.86199480	0.15536240
-0.5	0.95802009	0.23269654
0	1.0986123	0.33333333
0.5	1.2943767	0.45186776

3. Los datos en el ejercicio 1 se generaron usando las siguientes funciones. Use los polinomios construidos en el ejercicio 1 para aproximar $f(x)$ en el valor de x dado y calcular el error absoluto.

a. $f(x) = x \ln x$; aproxime $f(8.4)$.

b. $f(x) = \text{sen}(e^x - 2)$; aproxime $f(0.9)$.

c. $f(x) = x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101$; aproxime $f(-1/3)$.

d. $f(x) = x\cos x - 2x^2 + 3x - 1$; aproxime $f(0.25)$.

4. Los datos en el ejercicio 2 se generaron usando las siguientes funciones. Utilice los polinomios construidos en el ejercicio 2 para aproximar $f(x)$ en el valor de x dado y calcule el error absoluto.

a. $f(x) = e^{2x}$; aproxime $f(0.43)$.

b. $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$; aproxime $f(0)$.

c. $f(x) = x^2 \cos x - 3x$; aproxime $f(0.18)$.

d. $f(x) = \ln(e^x + 2)$; aproxime $f(0.25)$.

5. **a.** Use los siguientes valores y la aritmética de redondeo de cinco dígitos para construir el polinomio de interpolación de Hermite para aproximar sen 0.34.

x	sen x	D_x sen $x = \cos x$
0.30	0.29552	0.95534
0.32	0.31457	0.94924
0.35	0.34290	0.93937

b. Determine una cota del error para la aproximación en la parte a) y compárela con el error real.

c. Agregue sen $0.33 = 0.32404$ y $\cos 0.33 = 0.94604$ a los datos y repita los cálculos.

6. Sea $f(x) = 3xe^x - e^{2x}$.

a. Aproxime $f(1.03)$ mediante el polinomio de interpolación de Hermite de grado máximo tres usando $x_0 = 1$ y $x_1 = 1.05$. Compare el error real con la cota del error.

b. Repita a) con el polinomio de interpolación de Hermite de grado máximo cinco usando $x_0 = 1$, $x_1 = 1.05$ y $x_2 = 1.07$.

7. La siguiente tabla lista los datos para la función descrita mediante $f(x) = e^{0.1x^2}$. Aproxime $f(1.25)$ por medio de $H_5(1.25)$ y $H_3(1.25)$, donde H_5 usa los nodos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$ y H_3 usa los nodos $\bar{x}_0 = 1$ y $\bar{x}_1 = 1.5$. Encuentre las cotas del error para estas aproximaciones.

x	$f(x) = e^{0.1x^2}$	$f'(x) = 0.2xe^{0.1x^2}$
$x_0 = \bar{x}_0 = 1$	1.105170918	0.2210341836
$\bar{x}_1 = 1.5$	1.252322716	0.3756968148
$x_1 = 2$	1.491824698	0.5967298792
$x_2 = 3$	2.459603111	1.475761867

EJERCICIOS APLICADOS

8. Un lanzador de béisbol lanza una bola rápida desde el montículo del lanzador hacia el receptor. A pesar de que la distancia desde el montículo hasta el plato de home es 60 pies y 6 pulgadas, normalmente, la bola viaja aproximadamente 55 pies y 5 pulgadas. Suponga que la velocidad inicial de la bola es 95 millas por hora y que la velocidad final en el plato de home es 92 millas por hora. Construya un polinomio de interpolación de Hermite para los datos

Tiempo t (en segundos)	0	0.4
Distancia d (en pies)	0	55.5
Velocidad (millas por hora)	95	92

a. Use la derivada del polinomio de Hermite para calcular la velocidad de la bola de béisbol en millas por hora en $t = 0.2$ segundos.

b. ¿La velocidad máxima de la pelota se presenta en $t = 0$, o la derivada del polinomio de Hermite tiene un máximo que supera las 95 millas por hora? En ese caso, ¿esto parece razonable? [*Sugerencia:* Convierta las millas por hora en pies por segundo para resolver el problema y después regresar a las millas por hora para dar las respuestas.]

9. La información de un automóvil que circula por un camino recto se registra en diversos puntos. Los datos a partir de las observaciones se muestran en la siguiente tabla, donde el tiempo está en segundos, la distancia en pies y la velocidad en pies por segundo.

Tiempo	0	3	5	8	13
Distancia	0	225	383	623	993
Velocidad	75	77	80	74	72

a. Use el polinomio de Hermite para predecir la posición del vehículo y su velocidad cuando $t = 10$ segundos.

b. Use la derivada del polinomio de Hermite para determinar si el automóvil excede en algún punto el límite de velocidad de 55 millas por hora. En ese caso, ¿cuál es la primera vez que el automóvil excede esta velocidad?

c. ¿Cuál es la velocidad máxima prevista para el automóvil?

EJERCICIOS TEÓRICOS

10. Sea $z_0 = x_0$, $z_1 = x_0$, $z_2 = x_1$, y $z_3 = x_1$. Forme la siguiente tabla de diferencias divididas.

$$
\begin{array}{llllll}
z_0 = x_0 & f[z_0] = f(x_0) & & & & \\
 & & f[z_0, z_1] = f'(x_0) & & & \\
z_1 = x_0 & f[z_1] = f(x_0) & & f[z_0, z_1, z_2] & & \\
 & & f[z_1, z_2] & & f[z_0, z_1, z_2, z_3] & \\
z_2 = x_1 & f[z_2] = f(x_1) & & f[z_1, z_2, z_3] & & \\
 & & f[z_2, z_3] = f'(x_1) & & & \\
z_3 = x_1 & f[z_3] = f(x_1) & & & &
\end{array}
$$

Muestre que el polinomio cúbico de Hermite $H_3(x)$ también se puede escribir como $f[z_0] + f[z_0, z_1]$ $(x - x_0) + f[z_0, z_1, z_2](x - x_0)^2 + f[z_0, z_1, z_2, z_3](x - x_0)^2(x - x_1)$.

11. a. Muestre que $H_{2n+1}(x)$ es el único polinomio de menor grado que concuerda con f y f' en $x_0, \ldots, x_n$. [*Sugerencia:* Suponga que $P(x)$ es otro polinomio y considere $D = H_{2n+1} - P$ y D' en $x_0, x_1, \ldots, x_n$.]

b. Deduzca el término del error en el teorema 3.9 [*Sugerencia:* Use el mismo método en la deducción del error de Lagrange, teorema 3.3, al definir

$$g(t) = f(t) - H_{2n+1}(t) - \frac{(t - x_0)^2 \cdots (t - x_n)^2}{(x - x_0)^2 \cdots (x - x_n)^2}[f(x) - H_{2n+1}(x)]$$

y usar el hecho de que $g'(t)$ tiene (2_{n+2}) ceros distintos en $[a, b]$.]

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Uno de los problemas con interpolación polinomial es que a pesar de que se ajusta a los puntos, la forma de la curva no siempre concuerda muy bien. Un enfoque es usar los polinomios de interpolación y ajustar las derivadas y los puntos, describa, con palabras propias, cómo se logra esto.
2. En esta sección se presentaron dos métodos para encontrar el polinomio de Hermite. Explique la utilidad para cada uno de los dos métodos.
3. Investigue la derivación del método de diferencias divididas para calcular el polinomio de interpolación de Hermite. [*Sugerencia: Consulte la referencia de Powell*].

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.5

1. Determine el spline cúbico natural S que interpola los datos $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, y $f(2) = 2$.
2. Determine el spline cúbico condicionado s que interpola los datos $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f(2) = 2$ y satisface $s'(0) = s'(2) = 1$.
3. Construya el spline cúbico natural para los siguientes datos.

a.

x	$f(x)$
8.3	17.56492
8.6	18.50515

b.

x	$f(x)$
0.8	0.22363362
1.0	0.65809197

c.

x	$f(x)$
−0.5	−0.0247500
−0.25	0.3349375
0	1.1010000

d.

x	$f(x)$
0.1	−0.62049958
0.2	−0.28398668
0.3	0.00660095
0.4	0.24842440

4. Construya el spline cúbico natural para los siguientes datos.

a.

x	$f(x)$
0	1.00000
0.5	2.71828

b.

x	$f(x)$
−0, 25	1.33203
0.25	0.800781

c.

x	$f(x)$
0.1	−0.29004996
0.2	−0.56079734
0.3	−0.81401972

d.

x	$f(x)$
−1	0.86199480
−0.5	0.95802009
0	1.0986123
0.5	1.2943767

5. Los datos en el ejercicio 3 se generaron usando las siguientes funciones. Utilice los splines cúbicos construidos en dicho ejercicio para el valor determinado de x con el fin de aproximar $f(x)$ y $f'(x)$ y calcule el error real.
   a. $f(x) = x \ln x$; aproxime $f(8.4)$ y $f'(8.4)$.
   b. $f(x) = \operatorname{sen}(e^x - 2)$; aproxime $f(0.9)$ y $f'(0.9)$.
   c. $f(x) = x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101$; aproxime $f(-\frac{1}{3})$ y $f'(-\frac{1}{3})$.
   d. $f(x) = x \cos x - 2x^2 + 3x - 1$; aproxime $f(0.25)$ y $f'(0.25)$.

6. Los datos en el ejercicio 4 se generaron usando las siguientes funciones. Utilice los splines cúbicos construidos en dicho ejercicio para el valor determinado de x a fin de aproximar $f(x)$ y $f'(x)$ y calcule el error real.
   a. $f(x) = e^{2x}$; aproxime $f(0.43)$ y $f'(0.43)$.
   b. $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$; aproxime $f(0)$ y $f'(0)$.
   c. $f(x) = x^2 \cos x - 3x$; aproxime $f(0.18)$ y $f'(0.18)$.
   d. $f(x) = \ln(e^x + 2)$; aproxime $f(0.25)$ y $f'(0.25)$.

7. Construya el spline cúbico condicionado usando los datos del ejercicio 3 y el hecho de que

a. $f'(8.3) = 1.116256$ y $f'(8.6) = 1.151762$.

b. $f'(0.8) = 2.1691753$ y $f'(1.0) = 2.0466965$.

c. $f'(-0.5) = 0.7510000$ y $f'(0) = 4.0020000$.

d. $f'(0.1) = 3.58502082$ y $f'(0.4) = 2.16529366$.

8. Construya el spline cúbico condicionado usando los datos del ejercicio 3 y el hecho de que

a. $f'(0) = 2$ y $f'(0.5) = 5.43656$.

b. $f'(-0.25) = 0.437500$ y $f'(0.25) = -0.625000$.

c. $f'(0.1) = -2.8004996$ y $f'(0) = -2.9734038$.

d. $f'(-1) = 0.15536240$ y $f'(0.5) = 0.45186276$.

9. Repita el ejercicio 5 usando los splines cúbicos condicionados construidos en el ejercicio 7.

10. Repita el ejercicio 6 usando los splines cúbicos condicionados construidos en el ejercicio 8.

11. Un spline cúbico natural S en $[0, 2]$ se define mediante

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + 2x - x^3, & \text{si } 0 \le x < 1, \\ S_1(x) = 2 + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3, & \text{si } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Encuentre b, c y d.

12. Un spline cúbico natural S se define mediante

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + B(x-1) - D(x-1)^3, & \text{si } 1 \le x < 2, \\ S_1(x) = 1 + b(x-2) - \frac{3}{4}(x-2)^2 + d(x-2)^3, & \text{si } 2 \le x \le 3. \end{cases}$$

Si S interpola los datos $(1, 1)$, $(2, 1)$ y $(3, 0)$ encuentre B, D, b y d.

13. Un spline cúbico condicionado s para una función f se define en $[1, 3]$ mediante

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) = 3(x-1) + 2(x-1)^2 - (x-1)^3, & \text{si } 1 \le x < 2, \\ s_1(x) = a + b(x-2) + c(x-2)^2 + d(x-2)^3, & \text{si } 2 \le x \le 3. \end{cases}$$

Donde $f'(1) = f'(3)$, encuentre a, b, c y d.

14. Un spline cúbico condicionado s para una función f se define mediante

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) = 1 + Bx + 2x^2 - 2x^3, & \text{si } 0 \le x < 1, \\ s_1(x) = 1 + b(x-1) - 4(x-1)^2 + 7(x-1)^3, & \text{si } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Encuentre $f'(0)$ y $f'(2)$.

15. Dada la partición $x_0 = 0, x_1 = 0.05$, y $x_2 = 0.1$ de $[0, 0.1]$, de $[0, 0.1]$ encuentre la función de interpolación lineal por tramos F para $f(x) = e^{2x}$. Aproxime $\int_0^{0.1} e^{2x}\,dx$ con $\int_0^{0.1} F(x)\,dx$ y compare los resultados con el valor real.

16. Dada la partición $x_0 = 0, x_1 = 0.3$, y $x_2 = 0.5$ de $[0, 0.5]$, encuentre la función de interpolación lineal por tramos F para $f(x) = \operatorname{sen} 3x$. Aproxime $\int_0^{0.5} \operatorname{sen} 3x\,dx$ con $\int_0^{0.5} F(x)\,dx$ y compare los resultados con el valor real.

17. Construya un spline cúbico natural para aproximar $f(x) = \cos \pi x$ al usar los valores dados por $f(x)$ en $x = 0, 0.25, 0.5, 0.75$, y 1.0. Integre el spline sobre $[0, 1]$ y compare el resultado para $\int_0^1 \cos \pi x\,dx = 0$. Use las derivadas del spline para aproximar $f'(0.5)$ y $f''(0.5)$. Compare estas aproximaciones con los valores reales.

18. Construya un spline cúbico natural para aproximar $f(x) = e^{-x}$ al usar los valores dados por $f(x)$ en $x = 0, 0.25, 0.75$ y 1.0. Integre el spline sobre $[0, 1]$ y compare el resultado para $\int_0^1 e^{-x}\,dx = 1 - 1/e$. Use las derivadas del spline para aproximar $f'(0.5)$ y $f''(0.5)$. Compare las aproximaciones con los valores reales.

19. Repita el ejercicio 17, al construir en su lugar el spline cúbico condicionado con $f'(0) = f'(1) = 0$.

20. Repita el ejercicio 18, al construir en su lugar el spline cúbico condicionado con $f'(0) = -1$, $f'(1) = -e^{-1}$.

21. Dada la partición $x_0 = 0, x_1 = 0.05, x_2 = 0.1$ de $[0, 0.1]$ y $f(x) = e^{2x}$:

a. Encuentre el spline cúbico s con condiciones de frontera que interpola f.

b. Encuentre una aproximación para $\int_0^{0.1} e^{2x}\,dx$ al evaluar $\int_0^{0.1} s(x)\,dx$.

c. Use el teorema 3.13 para calcular $\max_{0\le x\le 0.1} |f(x) - s(x)|$ y

$$\left| \int_0^{0.1} f(x)\,dx - \int_0^{0.1} s(x)\,dx \right|.$$

d. Determine el spline cúbico S con condiciones de frontera naturales y compare $S(0.02)$, $s(0.02)$ y $e^{0.04} = 1.04081077$.

22. Dada la partición $x_0 = 0, x_1 = 0.3, x_2 = 0.5$ de $[0, 0.5]$ y $f(x) = \operatorname{sen} 3x$:

a. Encuentre el spline cúbico s con condiciones de frontera que interpola f.

b. Encuentre una aproximación para $\int_0^{0.5} \operatorname{sen} 3x\,dx$ con $\int_0^{0.5} s(x)\,dx$ y compare los resultados con el valor real.

EJERCICIOS APLICADOS

23. Un automóvil que circula por un camino recto se registra en una serie de puntos. Los datos a partir de las observaciones se dan en la siguiente tabla, donde el tiempo se representa en segundos, la distancia en pies y la velocidad en pies por segundo.

Tiempo	0	3	5	8	13
Distancia	0	225	383	623	993
Velocidad	75	77	80	74	72

a. Use un spline cúbico condicionado para predecir la posición del automóvil y su velocidad cuando $t = 10$ segundos.

b. Use la derivada del spline para determinar si el automóvil excede un límite de velocidad de 55 millas por hora en algún punto en el camino; en ese caso, ¿cuál es la primera vez que el automóvil excede esta velocidad?

c. ¿Cuál es la velocidad máxima prevista para el vehículo?

24. a. La introducción para este capítulo incluía una tabla que enumeraba la población de Estados Unidos desde 1960 hasta 2010. Use interpolación de spline cúbico natural para aproximar la población en los años 1950, 1975, 2014 y 2020.

b. La población en 1950 era aproximadamente 150 697 360 y en 2014 se calculó que era de 317 298 000. ¿Qué tan precisas cree que son sus cifras para 1975 y 2020?

25. Se sospecha que las grandes cantidades de curtido en hojas maduras de roble inhiben el crecimiento de la larva *(Operophtera bromata L., Geometridae*) de polilla de invierno que daña considerablemente estos árboles en ciertos años. La siguiente tabla lista el peso promedio de dos muestras de larva en tiempos en los primeros 28 días después del nacimiento. Mientras la primera muestra se crió en hojas jóvenes de roble, la segunda muestra se crió en hojas maduras del mismo árbol.

a. Use un spline cúbico natural para aproximar la curva de peso promedio para cada muestra.

b. Encuentre un peso promedio máximo aproximado para cada muestra al determinar el máximo del spline.

Día	0	6	10	13	17	20	28
Muestra 1 peso promedio (mg)	6.67	17.33	42.67	37.33	30.10	29.31	28.74
Muestra 2 peso promedio (mg)	6.67	16.11	18.89	15.00	10.56	9.44	8.89

26. Un caballo llamado California Chrome ganó el Derby de Kentucky de 2014 (5:2 probabilidades para el favorito) en un tiempo de 2:03:66 (2 minutos y 3.66 segundos) para la carrera de 1¼ de milla. Los tiempos de los postes de cuarto de milla, media milla y una milla fueron 0:23.04, 0:47.37 y 1:37.45.

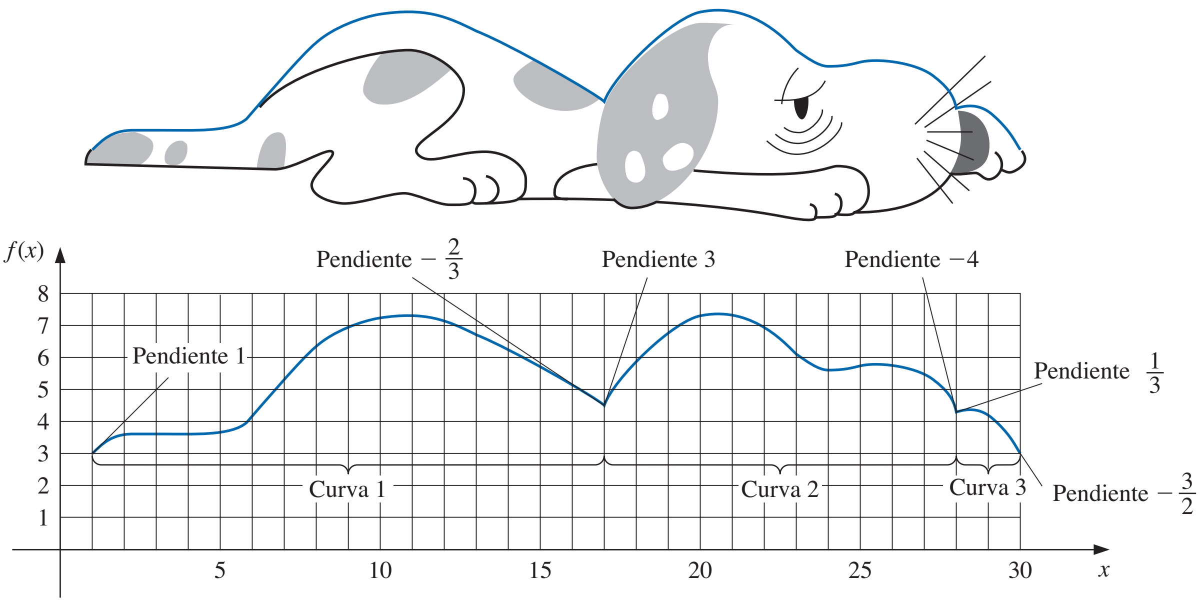
a. Use esos valores junto con el tiempo de inicio para construir un spline cúbico natural para la carrera de California Chrome.

b. Use el spline para predecir el tiempo en el poste de tres cuartos de milla y compárelo con el tiempo real de 1:11:80.

c. Use el spline para predecir la velocidad de inicio y la velocidad en la meta de California Chrome.

27. La parte superior de este dócil perro se aproxima mediante splines cúbicos interpolantes condicionados. La curva se dibuja en una cuadrícula a partir de la cual se construye la tabla. Use el algoritmo 3.5 para construir los tres splines cúbicos condicionados.

28. Repita el ejercicio 27, construya los tres splines cúbicos naturales con el algoritmo 3.4.



Curva 1				Curva 2				Curva 3			
i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0	1	3.0	1.0	0	17	4.5	3.0	0	27.7	4.1	0.33
1	2	3.7		1	20	7.0		1	28	4.3	
2	5	3.9		2	23	6.1		2	29	4.1	
3	6	4.2		3	24	5.6		3	30	3.0	-1.5
4	7	5.7		4	25	5.8					
5	8	6.6		5	27	5.2					
6	10	7.1		6	27.7	4.1	-4.0				
7	13	6.7									
8	17	4.5	-0.67								

EJERCICIOS TEÓRICOS

29. Suponga que $f(x)$ es un polinomio de grado tres. Muestre que $f(x)$ es un spline cúbico condicionado, pero que no puede ser su propio spline cúbico natural.

30. Suponga que $\{x_i, f(x_i)\}_{i=1}^{n}$ se encuentran en una línea recta. ¿Qué se puede decir sobre los splines cúbicos naturales y condicionados para la función f? [*Sugerencia*: Siga el ejemplo de los resultados de los ejercicios 1 y 2.]

31. Extienda los algoritmos 3.4 y 3.5 para incluir como salida la primera y la segunda derivada del spline en los nodos.

32. Extienda los algoritmos 3.4 y 3.5 para incluir como salida la integral del spline sobre el intervalo $[x_0, x_n]$.

33. Sea $f \in C^2[a, b]$ y sean los nodos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ dados. Deduzca una estimación error similar a la del teorema 3.13 para la función de interpolación lineal por tramos F. Use esta estimación para derivar cotas del error para el ejercicio 15.

34. Sea f definida sobre $[a, b]$ y sean los nodos $a = x_0 < x_1 < x_2 = b$ dados. Un spline cuadrático S interpolante consiste en el polinomio cuadrático

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 \quad \text{en } [x_0, x_1]$$

y el polinomio cuadrático

$$S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 \quad \text{en } [x_1, x_2],$$

tal que

i. $S(x_0) = f(x_0)$, $S(x_1) = f(x_1)$, y $S(x_2) = f(x_2)$,

ii. $S \in C^1[x_0, x_2]$.

Muestre que las condiciones i) y ii) conducen a cinco ecuaciones en seis variables desconocidas a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, y c_1. El problema es decidir cuál condición adicional imponer para hacer que la solución sea única. ¿La condición $S \in C^2[x_0, x_2]$ conduce a una solución significativa?

35. Determine un spline cuadrático s que interpole los datos $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, y $f(2) = 2$ y satisface $s'(0) = 2$.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. En esta sección se analizó la interpolación por splines cúbicos y la interpolación lineal por tramos. La interpolación por spline cuadrático se presentó en un ejercicio. Los splines de grado superior pueden calcularse. Compare el uso de la interpolación por spline cuadrático *versus* la interpolación por spline cúbico.

2. Investigue la llamada interpolación sin nudo, la cual es una alternativa a la interpolación de spline cúbico condicionado y natural.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 3.6

1. Sean $(x_0, y_0) = (0, 0)$ y $(x_1, y_1) = (5, 2)$ los extremos de una curva. Use los puntos guía dados para construir aproximaciones paramétricas cúbicas de Hermite $(x(t), y(t))$ para la curva y trace las aproximaciones.

a. $(1, 1)$ y $(6, 1)$

b. $(0.5, 0.5)$ y $(5.5, 1.5)$

c. $(1, 1)$ y $(6, 3)$

d. $(2, 2)$ y $(7, 0)$

2. Repita el ejercicio 1 usando los polinomios de Bézier cúbicos.

3. Construya y grafique los polinomios de Bézier cúbicos dados los siguientes puntos y puntos guía.

a. Punto $(1, 1)$ con el punto guía $(1.5, 1.25)$ para el punto $(6, 2)$ con el punto guía $(7, 3)$

b. Punto $(1, 1)$ con el punto guía $(1.25, 1.5)$ para el punto $(6, 2)$ con el punto guía $(5, 3)$

c. Punto $(0, 0)$ con el punto guía $(0.5, 0.5)$ para el punto $(4, 6)$ con el punto guía de entrada $(3.5, 7)$ y con el punto guía de salida $(4.5, 5)$ para el punto $(6, 1)$ con el punto guía $(7, 2)$

d. Punto $(0, 0)$ con el punto guía $(0.5, 0.5)$ para el punto $(2, 1)$ con el punto guía de entrada $(3, 1)$ y el punto guía de salida $(3, 1)$ para el punto $(4, 0)$ con l punto guía de entrada $(5, 1)$ y el punto guía de salida $(3, -1)$ para el punto $(6, -1)$ con el punto guía $(6.5, -0.25)$

4. Use los datos en la siguiente tabla y el algoritmo 3.6 para aproximar la forma de la letra N.

i	x_i	y_i	α_i	β_i	α'_i	β'_i
0	3	6	3.3	6.5		
1	2	2	2.8	3.0	2.5	2.5
2	6	6	5.8	5.0	5.0	5.8
3	5	2	5.5	2.2	4.5	2.5
4	6.5	3			6.4	2.8

EJERCICIOS TEÓRICOS

5. Suponga que un polinomio de Bézier cúbico está colocado a través de (u_0, v_0) y (u_3, v_3) con puntos guía (u_1, v_1) y (u_2, v_2), respectivamente.

a. Derive las ecuaciones paramétricas para $u(t)$ y $v(t)$ al suponer que

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_3, \quad u'(0) = u_1 - u_0, \quad u'(1) = u_3 - u_2$$

y

$$v(0) = v_0, \quad v(1) = v_3, \quad v'(0) = v_1 - v_0, \quad v'(1) = v_3 - v_2.$$

b. Sea $f(i/3) = u_i$, para $i = 0, 1, 2, 3$, y $g(i/3) = v_i$, para $i = 0, 1, 2, 3$. Muestre que el polinomio de Bernstein de grado tres en t para f es $u(t)$ y el polinomio de Bernstein de grado tres en t para g es $v(t)$ (consulte el ejercicio 23 de la sección 3.1.)

PREGUNTA DE ANÁLISIS

1. Investigue la utilidad de los métodos en esta sección para los paquetes de gráficas.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS (FINAL DEL CAPÍTULO)

1. Los polinomios de interpolación resultan afectados negativamente por datos malos. Es decir, un error en un punto de datos afectará todo el polinomio de interpolación. Los splines hacen que sea posible limitar los efectos malos de un punto de datos erróneo. Analice la forma de lograrlo.

2. Los splines cúbicos tienen las siguientes propiedades: a) interpolan los datos proporcionados; b) tienen continuidad de cero, primera y segunda derivada en puntos interiores y c) satisfacen ciertas condiciones de frontera. Analice las opciones para las condiciones límite

CONCEPTOS CLAVE

Aproximación polinomial por tramos
Condición de frontera
Condición de frontera natural
Curva de Bézier
Curva paramétrica
Diferencias divididas
Diferencias hacia adelante
Diferencias hacia atrás
Fórmula de Stirling
Fórmulas de error
Interpolación
Interpolación de Hermite
Interpolación por splines cúbicos
Método de Neville
Operador de diferencias hacia adelante
Operador de diferencias hacia atrás
Polinomio de Lagrange
Polinomio osculante
Spline cúbico
Spline cúbico condicionado
Spline cúbico natural
Teorema de aproximación de Weierstrass

REVISIÓN DEL CAPÍTULO

En este capítulo consideramos aproximar una función usando polinomios y polinomios por tramos. Encontramos que la función podría especificarse mediante una ecuación de definición dada o al proporcionar puntos en el plano por los que pasa la gráfica de la función. En cada caso se determinó un conjunto de nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, y podría requerirse más información, como el valor de diferentes derivadas. Necesitamos encontrar una función de aproximación que satisfaga las condiciones especificadas por estos datos.

El polinomio de interpolación $P(x)$ fue el polinomio de grado mínimo que satisfacía, para una función f,

$$P(x_i) = f(x_i), \quad \text{para cada } i = 0, 1, \ldots, n.$$

Encontramos que aunque este polinomio de interpolación era único, podría tomar muchas formas diferentes. A menudo se usaba la forma de Lagrange para interpolar tablas cuando n era pequeña y deducir fórmulas para aproximar derivadas e integrales. El método de Neville se usó para evaluar varios polinomios de interpolación en el mismo valor de x. Observamos que las formas del polinomio de Newton eran más apropiadas para el cálculo y también se usaban ampliamente para derivar fórmulas en la resolución de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, la interpolación polinomial tenía debilidades inherentes de oscilación, en especial si el número de nodos era grande. En este caso, había otros métodos que podían aplicarse mejor.

Los polinomios de Hermite interpolaban una función y su derivada en los nodos. Podían ser muy precisos, pero requerían más información sobre la función que se aproximaba. Cuando había un gran número de nodos, los polinomios de Hermite también presentaban debilidades de oscilación.

La forma de interpolación que se usa de manera más común fue la interpolación polinomial por tramos. Cuando los valores de la función y la derivada estaban disponibles, se recomendaba la interpolación cúbica de Hermite por tramos. De hecho, éste fue el método preferido para interpolar los valores de una función que fue la solución para una ecuación diferencial. Observamos que sólo cuando los valores de la función estaban disponibles, se podía usar la interpolación de spline cúbico natural. Este spline forzaba que la segunda derivada fuera cero en los extremos. Otros splines cúbicos requerían datos adicionales. Por ejemplo, el spline cúbico condicionado necesitaba valores de la derivada de una función en los extremos del intervalo.

Como establecimos en la sección 3.3, nuestro tratamiento de métodos de diferencias divididas fue breve ya que los resultados en esta sección no se usarán en gran medida en material subsiguiente. La mayoría de los textos más antiguos sobre análisis numérico incluyen tratamientos amplios de los métodos de diferencias divididas. Si se necesita un tratamiento exhaustivo, el libro de Hildebrand [Hild] es una referencia especialmente buena.

Como nota final, existen otros métodos de interpolación que se usan comúnmente. La interpolación trigonométrica, en particular, la transformada rápida de Fourier que se analiza en el capítulo 8, se utiliza con grandes cantidades de datos cuando se asume que la función tiene una naturaleza periódica. También se usa la interpolación mediante funciones racionales.

Si se sospecha que los datos son imprecisos, es posible aplicar técnicas de suavizado y se recomienda alguna forma de mínimos cuadrados para ajustar los datos. Los polinomios, las funciones trigonométricas, las funciones racionales y los splines se pueden usar para ajustar datos con mínimos cuadrados. Nosotros los consideramos en el capítulo 8.

Las referencias generales para los métodos en este capítulo son los libros de Powell [Pow] y de Davis [Da]. El artículo fundamental sobre splines se debe a Schoenberg [Scho]. Los libros importantes sobre splines son los de Schultz [Schul], De Boor [Deb2], Dierckx [Di] y Schumaker [Schum].