Capítulo 2

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2.1

1. Use el método de bisección para encontrar p_3 para $f(x) = \sqrt{x} - \cos x = 0$ en $[0, 1]$.

2. Sea $f(x) = 3(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1) = 0$. Use el método de bisección sobre los siguientes intervalos para encontrar p_3.

a. $[-2, 1.5]$ **b.** $[-1.25, 2.5]$

3. Use el método de bisección para encontrar soluciones precisas dentro de 10^{-2} para $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ en cada intervalo.

a. $[0, 1]$ **b.** $[1, 3.2]$ **c.** $[3.2, 4]$

4. Use el método de bisección para encontrar soluciones precisas dentro de 10^{-2} para $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = 0$ en cada intervalo.

a. $[-2, -1]$ **b.** $[0, 2]$ **c.** $[2, 3]$ **d.** $[-1, 0]$

5. Use el método de bisección para encontrar soluciones precisas dentro de 10^{-5} para los siguientes problemas.

a. $x - 2^{-x} = 0$ para $0 \le x \le 1$

b. $e^x - x^2 + 3x - 2 = 0$ para $0 \le x \le 1$

c. $2x\cos(2x) - (x+1)^2 = 0$ para $-3 \le x \le -2$ y $-1 \le x \le 0$

d. $x\cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ para $0.2 \le x \le 0.3$ y $1.2 \le x \le 1.3$

6. Use el método de bisección para encontrar soluciones precisas dentro de 10^{-5} para los siguientes problemas.

a. $3x - e^x = 0$ para $1 \le x \le 2$

b. $2x + 3\cos x - e^x = 0$ para $0 \le x \le 1$

c. $x^2 - 4x + 4 - \ln x = 0$ para $1 \le x \le 2$ y $2 \le x \le 4$

d. $x + 1 - 2\operatorname{sen}\pi x = 0$ para $0 \le x \le 0.5$ y $0.5 \le x \le 1$

7. a. Dibuje las gráficas para $y = x$ y $y = \operatorname{sen} x$.

b. Use el método de bisección para encontrar soluciones precisas dentro de 10^{-5} para el primer valor positivo de x con $x = 2\operatorname{sen} x$.

8. a. Dibuje las gráficas para $y = x$ y $y = \tan x$.

b. Use el método de bisección para encontrar una aproximación dentro de 10^{-5} para el primer valor positivo de x con $x = \tan x$.

9. a. Dibuje las gráficas para $y = e^x - 2$ y $y = \cos(e^x - 2)$.

b. Use el método de bisección para encontrar una aproximación dentro de 10^{-5} para un valor en $[0.5, 1.5]$ con $e^x - 2 = \cos(e^x - 2)$

10. a. Dibuje las gráficas de $y = x^2 - 1$ y $y = e^{1-x^2}$.

b. Use el método de bisección para encontrar una aproximación dentro de 10^{-3} para un valor en $[-2, 0]$ con $x^2 - 1 = e^{1-x^2}$.

11. Sea $f(x) = (x+2)(x+1)x(x-1)^3(x-2)$. ¿En qué cero de f converge el método de bisección cuando se aplica en los siguientes intervalos?

a. $[-3, 2.5]$ **b.** $[-2.5, 3]$ **c.** $[-1.75, 1.5]$ **d.** $[-1.5, 1.75]$

12. Sea $f(x) = (x+2)(x+1)^2x(x-1)^3(x-2)$. ¿En qué cero de f converge el método de bisección cuando se aplica en los siguientes intervalos?

a. $[-1.5, 2.5]$ **b.** $[-0.5, 2.4]$ **c.** $[-0.5, 3]$ **d.** $[-3, -0.5]$

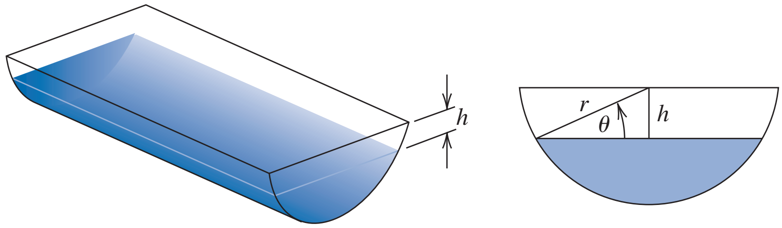
13. Encuentre una aproximación para $\sqrt[3]{25}$ correcto dentro de 10^{-4} con el algoritmo de bisección. [*Sugerencia:* Considere $f(x) = x^3 - 25$.]

14. Encuentre una aproximación para $\sqrt{3}$ correcto dentro de 10^{-4} con el algoritmo de bisección. [*Sugerencia:* Considere $f(x) = x^2 - 3$.]

EJERCICIOS APLICADOS

15. Un abrevadero de longitud L tiene una sección transversal en forma de semicírculo con radio r. (Consulte la figura adjunta.) Cuando se llena con agua hasta una distancia h a partir de la parte superior, el volumen V de agua es

$$V = L\left[0.5\pi r^2 - r^2\operatorname{arcsen}(h/r) - h(r^2 - h^2)^{1/2}\right].$$



Suponga que $L = 10$ pies, $r = 1$ pie y $V = 12.4$ pies^3. Encuentre la profundidad del agua en el abrevadero dentro de 0.01 pies.

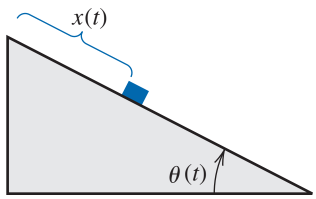
16. Una partícula inicia en reposo en un plano ligeramente inclinado, cuyo ángulo θ cambia a una velocidad constante

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega < 0.$$

Al final de t segundos, la posición del objeto está determinada por

$$x(t) = -\frac{g}{2\omega^2}\left(\frac{e^{wt} - e^{-wt}}{2} - \operatorname{sen} \omega t\right).$$

Suponga que la partícula se ha movido 1.7 ft en 1 segundo. Encuentre, dentro de 10^{-5}, la velocidad ω a la que θ cambia. Suponga que $g = 32.17$ ft/s^2.



EJERCICIOS TEÓRICOS

17. Use el teorema 2.1 para encontrar una cota para el número de iteraciones necesarias para lograr una aproximación con precisión de 10^{-4} para la solución de $x^3 - x - 1 = 0$ que se encuentra dentro del intervalo $[1, 2]$. Encuentre una aproximación para la raíz con este grado de precisión.

18. Use el teorema 2.1 a fin de encontrar una cota al número de iteraciones necesarias para lograr una aproximación con precisión de 10^{-3} para la solución de $x^3 + x - 4 = 0$ que se encuentra dentro del intervalo $[1, 4]$. Encuentre una aproximación para la raíz con este grado de precisión.

19. Sea $\{p_n\}$ la sucesión definida por $p_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Muestre que $\{p_n\}$ diverge incluso cuando $\lim_{n\to\infty}(p_n - p_{n-1}) = 0$.

20. Sea $f(x) = (x - 1)^{10}$, $p = 1$ y $p_n = 1 + 1/n$. Muestre que $|f(p_n)| < 10^{-3}$ siempre que $n > 1$ pero que $|p - p_n| < 10^{-3}$ requiere que $n > 1000$.

21. La función definida por $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$ tiene ceros en cada entero. Muestre que cuando $-1 < a < 0$ y $2 < b < 3$, el método de bisección converge a

a. 0, si $a + b < 2$ **b.** 2, si $a + b > 2$ **c.** 1, si $a + b = 2$

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Obtenga una función f para la que el método de bisección converge a un valor que no es un cero de f.

2. Obtenga una función f para la que el método de bisección converge a un valor cero de f, pero f no es continua en ese punto.

3. ¿El método de bisección es sensible al valor de inicio? ¿Por qué sí o por qué no?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2.2

1. Use una manipulación algebraica para mostrar que cada una de las siguientes funciones tiene un punto fijo en p precisamente cuando $f(p) = 0$, donde $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$.

a. $g_1(x) = \left(3 + x - 2x^2\right)^{1/4}$ **b.** $g_2(x) = \left(\dfrac{x + 3 - x^4}{2}\right)^{1/2}$

c. $g_3(x) = \left(\dfrac{x + 3}{x^2 + 2}\right)^{1/2}$ **d.** $g_4(x) = \dfrac{3x^4 + 2x^2 + 3}{4x^3 + 4x - 1}$

2. a. Realice cuatro iteraciones, de ser posible, en cada una de las funciones de g que se definen en el ejercicio 1. Sea $p_0 = 1$ y $p_{n+1} = g(p_n)$, para $n = 0, 1, 2, 3$.

b. ¿Cuál función cree que proporciona la mejor aproximación a la solución?

3. Sea $f(x) = x^3 - 2x + 1$. Para resolver $f(x) = 0$, se proponen los siguientes cuatro problemas de punto fijo. Derive cada método de punto fijo y calcule p_1, p_2, p_3 y p_4. ¿Cuáles métodos parecen apropiados?

a. $x = \dfrac{1}{2}(x^3 + 1), \quad p_0 = \dfrac{1}{2}$ **b.** $x = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}, \quad p_0 = \dfrac{1}{2}$

c. $x = \sqrt{2 - \dfrac{1}{x}}, \quad p_0 = \dfrac{1}{2}$ **d.** $x = -\sqrt[3]{1 - 2x}, \quad p_0 = \dfrac{1}{2}$

4. Si $f(x) = x^4 + 3x^2 - 2$. Para resolver $f(x) = 0$, se proponen los siguientes cuatro problemas de punto fijo. Derive cada método de punto fijo y calcule p_1, p_2, p_3 y p_4. ¿Cuáles métodos parecen apropiados?

a. $x = \sqrt{\dfrac{2 - x^4}{3}}, \quad p_0 = 1$ **b.** $x = \sqrt[4]{2 - 3x^2}, \quad p_0 = 1$

c. $x = \dfrac{2 - x^4}{3x}, \quad p_0 = 1$ **d.** $x = \sqrt[3]{\dfrac{2 - 3x^2}{x}}, \quad p_0 = 1$

5. Se proponen los siguientes cuatro métodos para calcular $21^{1/3}$. Clasifíquelos en orden, con base en su velocidad de convergencia aparente, suponiendo que $p_0 = 1$.

a. $p_n = \dfrac{20p_{n-1} + 21/p_{n-1}^2}{21}$ **b.** $p_n = p_{n-1} - \dfrac{p_{n-1}^3 - 21}{3p_{n-1}^2}$

c. $p_n = p_{n-1} - \dfrac{p_{n-1}^4 - 21p_{n-1}}{p_{n-1}^2 - 21}$ **d.** $p_n = \left(\dfrac{21}{p_{n-1}}\right)^{1/2}$

6. Se proponen los siguientes cuatro métodos para calcular $7^{1/5}$. Clasifíquelos en orden, con base en su velocidad de convergencia aparente, al suponer $p_0 = 1$.

a. $p_n = p_{n-1}\left(1 + \dfrac{7 - p_{n-1}^5}{p_{n-1}^2}\right)^3$ **b.** $p_n = p_{n-1} - \dfrac{p_{n-1}^5 - 7}{p_{n-1}^2}$

c. $p_n = p_{n-1} - \dfrac{p_{n-1}^5 - 7}{5p_{n-1}^4}$ **d.** $p_n = p_{n-1} - \dfrac{p_{n-1}^5 - 7}{12}$

7. Use el método de iteración de punto fijo para determinar una solución precisa dentro de 10^{-2} para $x^4 - 3x^2 - 3 = 0$ en $[1, 2]$. Utilice $p_0 = 1$.

8. Use el método de iteración de punto fijo para determinar una solución exacta dentro de 10^{-2} para $x^3 - x - 1 = 0$ en $[1, 2]$. Use $p_0 = 1$.

9. Use el teorema 2.3 para mostrar que $g(x) = \pi + 0.5 \operatorname{sen}(x/2)$ tiene un único punto fijo en $[0, 2\pi]$. Use la iteración de punto fijo para encontrar una aproximación que es precisa para el punto fijo dentro de 10^{-2}. Use el corolario 2.5 para calcular el número de iteraciones que se requiere para lograr una precisión de 10^{-2} y compare esta estimación teórica con el número que realmente se requiere.

10. Use el teorema 2.3 para mostrar que $g(x) = 2^{-x}$ tiene un único punto fijo en $[\frac{1}{3}, 1]$. Use la iteración de punto fijo para encontrar una aproximación para el punto fijo que es precisa dentro de 10^{-4}. Utilice el corolario 2.5 para calcular el número de iteraciones que se requiere para lograr una precisión de 10^{-4} y compárela con el número que realmente se requiere.

11. Use un método de iteración de punto fijo para hallar una aproximación a $\sqrt{3}$ que sea precisa dentro de 10^{-4}. Compare su resultado y el número de iteraciones requeridas con la respuesta obtenida en el ejercicio 14 de la sección 2.1.

12. Use un método de iteración de punto fijo para encontrar una aproximación para $\sqrt[3]{25}$ que sea precisa dentro de 10^{-4}. Compare su resultado y el número de iteraciones requeridos con la respuesta obtenida en el ejercicio 13 de la sección 2.1.

13. Para cada una de las siguientes ecuaciones, determine un intervalo $[a, b]$ en el que la iteración de punto fijo converja. Calcule el número de iteraciones necesarias para obtener aproximaciones precisas dentro de 10^{-5} y realice los cálculos.

a. $x = \dfrac{2 - e^x + x^2}{3}$ **b.** $x = \dfrac{5}{x^2} + 2$

c. $x = (e^x/3)^{1/2}$ **d.** $x = 5^{-x}$

e. $x = 6^{-x}$ **f.** $x = 0.5(\text{sen}\, x + \cos x)$

14. Para cada una de las siguientes ecuaciones, use el intervalo dado o determine un intervalo $[a, b]$ en el que la iteración de punto fijo converja. Calcule el número de iteraciones necesarias para obtener aproximaciones precisas dentro de 10^{-5} y realice los cálculos.

a. $2 + \text{sen}\, x - x = 0$ use $[2, 3]$ **b.** $x^3 - 2x - 5 = 0$ use $[2, 3]$

c. $3x^2 - e^x = 0$ **d.** $x - \cos x = 0$

15. Encuentre todos los ceros de $f(x) = x^2 = 10 \cos x$ usando el método de iteración de punto fijo para una función de iteración adecuada g. Encuentre los ceros con una precisión dentro de 10^{-4}.

16. Use el método de iteración de punto fijo para determinar una solución precisa dentro de 10^{-4} para $x = \tan x$, para x en $[4, 5]$.

17. Use un método de iteración de punto fijo para determinar una solución precisa dentro de 10^{-2} para $x = 2$ sen $(\pi x) + x = 0$, para x en $[1, 2]$. Utilice $p_0 = 1$.

EJERCICIOS APLICADOS

18. Un objeto que cae verticalmente a través del aire está sujeto a una resistencia viscosa, así como a la fuerza de gravedad. Suponga que un objeto con masa m cae desde una altura s_0 y que la altura del objeto después de t segundos es

$$s(t) = s_0 - \frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2}(1 - e^{-kt/m}),$$

donde $g = 32.17$ pies/s^2 y k representa el coeficiente de la resistencia del aire en lb-s/pie. Suponga $s_0 = 300$ pies, $m = 0.25$ lb y $k = 0.1$ lb-s/pie. Encuentre, dentro de 0.01 segundos, el tiempo que tarda un cuarto de libra en golpear el piso.

EJERCICIOS TEÓRICOS

19. Sea $g \in C^1[\text{a, b}]$ y p en (a, b) con $g(p) = p$ y $|g'(p)| > 1$. Muestre que existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |p_0 - p| < \delta$, entonces $|p_0 - p| < |p_1 - p|$. Entonces, sin importar qué tan cercana esté la aproximación inicial p_0 de p, la siguiente iteración p_1 está más alejada, por lo que la iteración de punto fijo no converge si $p_0 \neq p$.

20. Sea A una constante positiva y $g(x) = 2x - Ax^2$.

a. Muestre que si la iteración de punto fijo converge en un límite diferente de cero, entonces el límite es $p = 1/A$, por lo que la inversa de un número se puede encontrar de usando solamente multiplicaciones y restas.

b. Encuentre un intervalo sobre $1/A$ para el que la iteración de punto fijo converge, siempre y cuando p_0 se encuentre en ese intervalo.

21. Encuentre una función g definida sobre $[0, 1]$ que no satisface ninguna de las hipótesis del teorema 2.3, pero sigue siendo un punto fijo único sobre $[0, 1]$.

22. **a.** Muestre que el teorema 2.3 es verdad si la desigualdad $|g'(x)| \leq k$ se reemplaza con $g'(x) \leq k$, para todas las $x \in (a, b)$. [*Pista*: Solamente la singularidad está en cuestión].

b. Muestre que el teorema 2.4 podría no mantenerse si la desigualdad $|g'(x)| \leq k$ se reemplaza con $g'(x) \leq k$. [*Pista:* Muestre que $g(x) = 1 - x^2$, para x en $[0, 1]$, provee un ejemplo contrario.]

23. **a.** Use el teorema 2.4 para mostrar que la secuencia definida por

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}, \quad \text{para } n \geq 1,$$

converge a $\sqrt{2}$ siempre que $x_0 > \sqrt{2}$.

b. Use el hecho de que $0 < (x_0 - \sqrt{2})^2$ siempre que $x_0 \neq \sqrt{2}$ para mostrar que si $0 < x_0 < \sqrt{2}$, entonces $x_1 > \sqrt{2}$.

c. Use los resultados de las partes a) y b) para mostrar que la sucesión en a) converge a $\sqrt{2}$ siempre que $x_0 > 0$.

24. **a.** Muestre que si A es cualquier número positivo, entonces la sucesión definida por

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{A}{2x_{n-1}}, \quad \text{para } n \geq 1,$$

converge a $\sqrt{A}$ siempre que $x_0 > 0$.

b. ¿Qué pasa si $x_0 < 0$?

25. Reemplace la suposición en el teorema 2.4 que establece que existe "un número positivo $k < 1$ con $|g'(x)| \leq k$" con "g satisface la condición de Lipschitz en el intervalo $[a, b]$ con constante de Lipschitz $L < 1$." (Consulte el ejercicio 28, sección 1.1.) Muestre que las conclusiones de este teorema siguen siendo válidas.

26. Suponga que g es continuamente diferenciable en algún intervalo (c, d) que contiene el punto fijo p de g. Muestre que si $|g'(p)| < 1$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que si $|p_0 - p| \leq \delta$, entonces la iteración de punto fijo converge.

PREGUNTA DE ANÁLISIS

1. Proporcione una descripción general de la forma en la que se relaciona la teoría del caos y la iteración de punto fijo. Como punto de inicio, consulte lo siguiente:
http://pages.cs.wisc.edu/~goadl/cs412/examples/chaosNR.pdf y
http://www.cut-the-knot.org/blue/chaos.shtml.Summarize your readings.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2.3

1. Sea $f(x) = x^2 - 6$ y $p_0 = 1$. Use el método de Newton para encontrar p_2.
2. Sea $f(x) = -x^3 - \cos x$ y $p_0 = -1$. Use el método de Newton para encontrar p_2. ¿Se podría usar $p_0 = 0$?
3. Sea $f(x) = x^2 - 6$. Con $p_0 = 3$ y $p_1 = 2$. Encuentre p_3.
   a. Use el método de la secante
   b. Use el método de posición falsa
   c. ¿Cuál parte a) o b) está más cerca de $\sqrt{6}$?
4. Sea $f(x) = -x^3 - \cos x$. Con $p_0 = -1$ y $p_1 = 0$, encuentre p_3.
   a. Use el método de la secante
   b. Use el método de posición falsa
5. Use el método de Newton para encontrar soluciones precisas dentro de 10^{-4} para los siguientes problemas.
   a. $x^3 - 2x^2 - 5 = 0, \quad [1, 4]$
   b. $x^3 + 3x^2 - 1 = 0, \quad [-3, -2]$
   c. $x - \cos x = 0, \quad [0, \pi/2]$
   d. $x - 0.8 - 0.2 \operatorname{sen} x = 0, \quad [0, \pi/2]$
6. Use el método de Newton para encontrar soluciones precisas dentro de 10^{-5} para los siguientes problemas.
   a. $e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0 \quad$ para $1 \leq x \leq 2$
   b. $\ln(x - 1) + \cos(x - 1) = 0 \quad$ para $1.3 \leq x \leq 2$

c. $2x \cos 2x - (x-2)^2 = 0$ para $2 \leq x \leq 3$ y $3 \leq x \leq 4$

d. $(x-2)^2 - \ln x = 0$ para $1 \leq x \leq 2$ y $e \leq x \leq 4$

e. $e^x - 3x^2 = 0$ para $0 \leq x \leq 1$ y $3 \leq x \leq 5$

f. $\operatorname{sen} x - e^{-x} = 0$ para $0 \leq x \leq 1$ $3 \leq x \leq 4$ y $6 \leq x \leq 7$

7. Repita el ejercicio 5 con el método de la secante.

8. Repita el ejercicio 6 con el método de la secante.

9. Repita el ejercicio 5 con el método de posición falsa.

10. Repita el ejercicio 6 con el método de posición falsa.

11. Use los tres métodos en esta sección para encontrar las soluciones dentro de 10^{-5} para los siguientes problemas.

a. $3x - e^x = 0$ para $1 \leq x \leq 2$

b. $2x + 3\cos x - e^x = 0$ para $1 \leq x \leq 2$

12. Use los tres métodos en esta sección para encontrar las soluciones dentro de 10^{-7} para los siguientes problemas.

a. $x^2 - 4x + 4 - \ln x = 0$ para $1 \leq x \leq 2$ y para $2 \leq x \leq 4$

b. $x + 1 - 2 \operatorname{sen} \pi x = 0$ para $0 \leq x \leq 1/2$ y para $1/2 \leq x \leq 1$

13. El polinomio de cuarto grado

$$f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$$

tiene dos ceros reales, uno en $[-1, 0]$ y el otro en $[0, 1]$. Intente aproximar estos ceros dentro de 10^{-6} con

a. El método de posición falsa

b. El método de la secante

c. El método de Newton

Use los extremos de cada intervalo como aproximaciones iniciales en las partes a) y b) y los puntos medios como la aproximación inicial en la parte c).

14. La función $f(x) = \tan \pi x - 6$ tiene cero en $(1/\pi)$ arcotangente 6 ≈ 0.447431543. Sea $p_0 = 0$ y $p_1 = 0.48$ y use 10 iteraciones en cada uno de los siguientes métodos para aproximar esta raíz. ¿Cuál método es más eficaz y por qué?

a. método de bisección

b. método de posición falsa

c. método de la secante

15. La ecuación $4x^2 - e^x - e^{-x} = 0$ tiene dos soluciones positivas x_1 y x_2. Utilice el método de Newton para aproximar la solución dentro de 10^{-5} con los siguientes valores de p_0.

a. $p_0 = -10$ **b.** $p_0 = -5$ **c.** $p_0 = -3$

d. $p_0 = -1$ **e.** $p_0 = 0$ **f.** $p_0 = 1$

g. $p_0 = 3$ **h.** $p_0 = 5$ **i.** $p_0 = 10$

16. La ecuación $x^2 - 10 \cos x = 0$ tiene dos soluciones $\pm$ 1.3793646. Use el método de Newton para aproximar la solución dentro de 10^{-5} con los siguientes valores de p_0.

a. $p_0 = -100$ **b.** $p_0 = -50$ **c.** $p_0 = -25$

d. $p_0 = 25$ **e.** $p_0 = 50$ **f.** $p_0 = 100$

17. La función descrita por $f(x) = \ln(x^2 + 1) - e^{0.4x} \cos \pi x$ tiene un número infinito de ceros.

a. Determine, dentro de 10^{-6}, el único cero negativo.

b. Determine, dentro de 10^{-6}, los cuatro ceros positivos más pequeños.

c. Determine una aproximación inicial razonable para encontrar el enésimo cero positivo más pequeño de f. [*Sugerencia:* Dibuje una gráfica aproximada de f.]

d. Use la parte c) para determinar, dentro de 10^{-6}, el vigesimoquinto cero positivo más pequeño de f.

18. Use el método de Newton para resolver la ecuación

$$0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 - x \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\cos 2x, \quad \text{con } p_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Itere con el método de Newton hasta obtener una precisión de 10^{-5}. Explique por qué el resultado parece poco común para el método de Newton. Además resuelva la ecuación con $p_0 = 5\pi$ y $p_0 = 10\pi$.

EJERCICIOS APLICADOS

19. Use el método de Newton para aproximar, dentro de 10^{-4}, el valor de x que en la gráfica de $y = x^2$ produce el punto que está más cerca de $(0, 1)$. [*Sugerencia:* Minimice $[d(x)^2]$], en donde $d(x)$ representa la distancia desde (x, x^2) hasta $(1, 0)$.]

20. Use el método de Newton para aproximar, dentro de 10^{-4}, el valor de x que en la gráfica $y = 1/x$ produce el punto que está más cerca de $(2, 1)$.

21. La suma de dos números es 20. Si cada número se suma a su raíz cuadrada, el producto de las dos sumas es 155.55. Determine los dos números dentro de 10^{-4}.

22. Encuentre una aproximación para λ, precisa dentro de 10^{-4}, para la ecuación de crecimiento poblacional

$$1\,564\,000 = 1\,000\,000\, e^{\lambda} + \frac{435\,000}{\lambda}(e^{\lambda} - 1),$$

que se ha analizado en la introducción de este capítulo. Use este valor para predecir la población al final del segundo año, al suponer que la tasa de inmigración durante este año sigue siendo 435 000 individuos por año.

23. Los problemas relacionados con la cantidad de dinero requerida para pagar una hipoteca por un periodo fijo incluye la fórmula

$$A = \frac{P}{i}[1 - (1 + i)^{-n}],$$

Conocida como *ecuación de anualidad ordinaria*. En esta ecuación, A es la cantidad de la hipoteca, P es la cantidad de cada pago e i es la tasa de interés por periodo para los n periodos de pago. Suponga que se necesita una hipoteca por \$135 000 a 30 años para una vivienda y que el prestatario puede efectuar pagos de máximo \$1 000 por mes. ¿Cuál es la tasa de interés máximo que el prestatario puede pagar?

24. El valor acumulado de una cuenta de ahorros con base en pagos periódicos regulares se puede determinar a partir de la *ecuación debida a la anualidad,*

$$A = \frac{P}{i}[(1 + i)^n - 1].$$

En esta ecuación, A es la cantidad en la cuenta, P es la cantidad depositada regularmente e i es la tasa de interés por periodo para los n periodos de depósito. A un ingeniero le gustaría tener una cuenta de ahorro con un monto de \$750 000 para su jubilación en 20 años y puede pagar \$1 500 por mes para esta meta. ¿Cuál es la tasa mínima de interés a la que se invierte esta cantidad, al suponer que es un interés compuesto mensual?

25. El modelo de crecimiento de población logístico se describe con una ecuación en la forma

$$P(t) = \frac{P_L}{1 - ce^{-kt}},$$

donde P_L, c y $k > 0$ son constantes y $P(t)$ es la población en el tiempo t. P_L representa el valor límite de la población ya que $\lim_{t\to\infty} P(t) = P_L$. Use los datos de los censos para las décadas 1960 y 1970 listados en la tabla de la página 77 para determinar las constantes P_L, c y k para un modelo logístico de crecimiento. Utilice el modelo logístico para predecir la población de Estados Unidos en 1980 y 2010, al suponer que $t = 0$ en 1950. Compare la predicción de 1980 con el valor real.

26. El modelo de crecimiento de población Gompertz se describe por

$$P(t) = P_L e^{-ce^{-kt}},$$

donde P_L, c y $k > 0$ son constantes y $P(t)$ es la población en el tiempo t. Repita el ejercicio 25 con el modelo de crecimiento Gompertz en lugar del modelo logístico.

27. El jugador A dejará fuera (ganará por una puntuación de 21–0) al jugador B en un juego de ráquetbol con probabilidad

$$P = \frac{1 + p}{2}\left(\frac{p}{1 - p + p^2}\right)^{21},$$

donde p denota la probabilidad de que A ganará cualquier rally específico (independientemente del servicio). (Consulte [Keller, J], p. 267). Determine, dentro de 10^{-3}, el valor mínimo de p que garantice que A dejará fuera a B en por lo menos la mitad de los partidos que jueguen.

28. Un medicamento administrado a un paciente produce una concentración en el torrente sanguíneo determinado por $c(t) = Ate^{-t/3}$ miligramos por mililitro, t horas después de que se han inyectado las unidades A. La concentración máxima segura es 1 mg/mL.

a. ¿Qué cantidad se debería inyectar para alcanzar la concentración máxima segura y cuándo se presenta este máximo?

b. Una cantidad adicional de este medicamento se administrará al paciente después de que la concentración cae hasta 0.25 mg/mL. Determine, al minuto más cercano, cuándo se debería aplicar la segunda inyección.

c. Suponga que la concentración a partir de las inyecciones consecutivas es adictiva y que 75% de la cantidad que originalmente se inyectó se administra en la segunda inyección. ¿Cuándo será el momento para una tercera inyección?

29. En el diseño de los vehículos todo terreno, es necesario considerar la falla del vehículo al tratar de superar dos tipos de obstáculos. Un tipo de falla recibe el nombre de *falla compleja* y se presenta cuando el vehículo intenta cruzar un obstáculo que causa que la parte inferior del vehículo toque el suelo. El otro tipo recibe el nombre de *falla de nariz* y se presenta cuando el vehículo desciende en una zanja y su nariz toca el suelo.

La figura de acompañamiento, adaptada de [Beck], muestra los componentes relacionados con la falla de nariz de un vehículo. En esta referencia, se muestra que el ángulo máximo a que un vehículo puede superar cuando β es el ángulo máximo en el que la falla compleja no ocurre satisface la ecuación

$$A \text{ sen } \alpha \cos \alpha + B \text{ sen}^2 \alpha - C \cos \alpha + E \text{ sen } \alpha = 0,$$

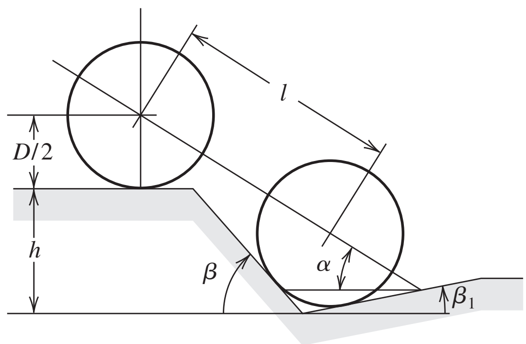
donde

$$A = l \text{ sen } \beta_1, \quad B = l \cos \beta_1, \quad C = (h + 0.5D) \text{ sen } \beta_1 - 0.5\, D \tan \beta_1,$$

$$\text{y} \quad E = (h + 0.5\, D) \cos \beta_1 - 0.5\, D.$$

a. Se establece que cuando $l = 89$ pulgadas, $h = 49$ pulgadas, $D = 55$ pulgadas y $\beta_1 = 11.5°$, el ángulo α es aproximadamente 33°. Verifique el resultado.

b. Encuentre a para la situación cuando l, h y β_1 son las mismas en la parte a) pero $D = 30$ pulgadas.



EJERCICIOS TEÓRICOS

30. La ecuación de iteración para el método de la secante se puede escribir en la forma más simple

$$p_n = \frac{f(p_{n-1})p_{n-2} - f(p_{n-2})p_{n-1}}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}.$$

Explique por qué, en general, es probable que esta ecuación de iteración sea menos precisa que la proporcionada en el algoritmo 2.4.

31. Lo siguiente describe gráficamente el método de Newton: suponga que $f'(x)$ existe en $[a, b]$ y que $f'(x) \neq 0$ en $[a, b]$. Además, suponga que existe una $p \in [a, b]$ por lo que $f(p) = 0$ y sea $p_0 \in [a, b]$

sea arbitraria. Si p_1 es el punto en el que la recta tangente a f en $(p_0, f(p_0))$ cruza el eje x. Para cada $n \geq 1$, sea p_n la intersección con el eje x de la recta tangente a f en $(p_{n-1}, f(p_{n-1}))$. Deduzca la fórmula que describe este método.

32. Deduzca la fórmula de error para el método de Newton

$$|p - p_{n+}| \leq \frac{M}{2|f'(p_n)|}|p - p_n|^2$$

suponiendo que la hipótesis del teorema 2.6 se mantiene, que $|f'(p_n)| \neq 0$, y $M = \text{máx}\,|f''(x)|$. [*Sugerencia:* Use el polinomio de Taylor como se hizo en la deducción del método de Newton al inicio de esta sección.]

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. ¿El método de Newton converge para cualquier aproximación inicial x_0? En este caso, ¿cuál es la razón de convergencia y cuál es el orden de convergencia? ¿El método sigue convergiendo cuando $f(x)$ tiene múltiples ceros en p?

2. Si la aproximación inicial no está suficientemente cerca de la raíz, el método de Newton puede no converger a una raíz errónea. Encuentre uno o dos ejemplos donde esto puede presentarse y proporcione una justificación sobre por qué lo hace.

3. La función $f(x) = 0.5x^3 - 6x^2 + 21.5x - 22$ tiene un cero en $x = 4$. Usando el punto de inicio $p_0 = 5$, $p_1 = 4.5$ para el método de la secante, compare los resultados de la secante y los métodos de Newton.

4. La función $f(x) = x^{(1/3)}$ tiene una raíz en $x = 0$. Usando el punto de inicio de $x = 1$ y $p_0 = 5, p_1 = 0.5$ para el método de secante, compare los resultados de los métodos de secante y Newton.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2.4

1. Use el método de Newton para encontrar soluciones precisas dentro de 10^{-5} para los siguientes problemas.

a. $x^2 - 2xe^{-x} + e^{-2x} = 0, \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1$

b. $\cos(x + \sqrt{2}) + x(x/2 + \sqrt{2}) = 0, \quad \text{para } -2 \leq x \leq -1$

c. $x^3 - 3x^2(2^{-x}) + 3x(4^{-x}) - 8^{-x} = 0, \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1$

d. $e^{6x} + 3(\ln 2)^2 e^{2x} - (\ln 8)e^{4x} - (\ln 2)^3 = 0, \quad \text{para } -1 \leq x \leq 0$

2. Use el método de Newton para encontrar soluciones precisas dentro de 10^{-5} para los siguientes problemas.

a. $1 - 4x\cos x + 2x^2 + \cos 2x = 0, \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1$

b. $x^2 + 6x^5 + 9x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 1 = 0, \quad \text{para } -3 \leq x \leq -2$

c. $\text{sen}\,3x + 3e^{-2x}\,\text{sen}\,x - 3e^{-x}\,\text{sen}\,2x - e^{-3x} = 0, \quad \text{para } 3 \leq x \leq 4$

d. $e^{3x} - 27x^6 + 27x^4e^x - 9x^2e^{2x} = 0, \quad \text{para } 3 \leq x \leq 5$

3. Repita el ejercicio 1 con el método modificado de Newton descrito en la ecuación (2.13). ¿Hay alguna mejora en la velocidad o la precisión en comparación con el ejercicio 1?

4. Repita el ejercicio 2 con el método modificado de Newton descrito en la ecuación (2.13). ¿Hay alguna mejora en la velocidad o la precisión en comparación con el ejercicio 2?

5. Use el método de Newton y el método modificado de Newton descrito en la ecuación (2.13) para encontrar una solución precisa dentro de 10^{-5} para el problema

$$e^{6x} + 1.441e^{2x} - 2.079e^{4x} - 0.3330 = 0, \quad \text{para } -1 \leq x \leq 0.$$

Éste es el mismo problema que en 1d) sólo que los coeficientes han sido reemplazados con aproximaciones de cuatro dígitos. Compare las soluciones con los resultados en 1d) y 2d).

EJERCICIOS TEÓRICOS

6. Muestre que las siguientes sucesiones convergen linealmente a $p = 0$. ¿Qué tan grande debe ser n antes de $|p_n - p| \leq 5 \times 10^{-2}$?

   a. $p_n = \dfrac{1}{n}, \quad n \geq 1$ **b.** $p_n = \dfrac{1}{n^2}, \quad n \geq 1$

7. **a.** Muestre que para cualquier entero k, la sucesión definida por $p_n = 1/n^k$ converge linealmente a $p = 0$.

   b. Para cada par de enteros k y m, determine un número N para el que $1/N^k < 10^{-m}$.

8. **a.** Muestre que la sucesión $p_n = 10^{-2^n}$ converge cuadráticamente a 0.

   b. Muestre que la sucesión $p_n = 10^{-n^k}$ no converge cuadráticamente a 0, independientemente del tamaño del exponente $k > 1$.

9. **a.** Construya una sucesión que converja a 0 de orden 3.

   b. Suponga que $\alpha > 1$. Construya una sucesión que converja en 0 de orden α.

10. Suponga que p es un cero de multiplicidad m de f, donde $f^{(m)}$ es continua en un intervalo abierto que contiene p. Muestre que el siguiente método de punto fijo tiene $g'(p) = 0$:

$$g(x) = x - \frac{mf(x)}{f'(x)}.$$

11. Muestre que el algoritmo de bisección 2.1 proporciona una sucesión con una cota de error que converge linealmente a 0.

12. Suponga que f tiene m derivadas continuas. Modifique la prueba del teorema 2.11 para mostrar que f tiene un cero de multiplicidad m en p si y sólo si

$$0 = f(p) = f'(p) = \cdots = f^{(m-1)}(p), \quad \text{pero } f^{(m)}(p) \neq 0.$$

13. El método iterativo para resolver $f(x) = 0$, dado por el método de punto fijo $g(x) = x$, donde

$$p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} - \frac{f''(p_{n-1})}{2f'(p_{n-1})}\left[\frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}\right]^2, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

tiene $g'(p) = g''(p) = 0$. En general, esto producirá convergencia cúbica ($\alpha = 3$). Amplíe el análisis del ejemplo 1 para comparar la convergencia cuadrática y cúbica.

14. Se puede demostrar (véase, por ejemplo, [DaB], pp. 228–229) que si $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ son aproximaciones de la solución $f(x) = 0$, obtenidas con el método de la secante, entonces existe una constante C con $|p_{n+1} - p| \approx C\,|p_n - p|\,|p_{n-1} - p|$ para los valores suficientemente grandes de n. Suponga que $\{p_n\}$ converge a p de orden α y muestre que $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$. (*Nota*: Esto implica que el orden de convergencia del método de la secante es aproximadamente 1.62).

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. La rapidez a la que converge la sucesión generada por un método iterativo recibe el nombre de razón de convergencia del método. Existen muchos tipos de razones de convergencia: lineal, superlineal, sublineal, logarítmica, cuadrática y así sucesivamente.

   El inconveniente de estas razones de convergencia es que no captan algunas sucesiones que siguen convergiendo con rapidez, pero cuya "velocidad" es variable. Seleccione una de las razones de convergencia y describa cómo se puede acelerar esa razón.

2. Analice cuándo el método de Newton provee convergencia lineal o cuadrática para la función $f(x) = x^2(x - 1)$.

3. Lea el documento que se encuentra en http://www.uark.edu/misc/arnold/publichtml/4363/OrderConv.pdf y explique en palabras propias lo que implica el error asintótico.

4. ¿Cuál es la diferencia entre la razón de convergencia y el orden de convergencia? ¿Están relacionados de alguna forma? ¿Dos sucesiones podrían tener las mismas razones de convergencia, pero diferentes órdenes de convergencia y viceversa?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2.5

1. Las siguientes sucesiones son linealmente convergentes. Genere los primeros cinco términos de la sucesión $\{\hat{p}_n\}$ con el método Δ^2 de Aitken.

a. $p_0 = 0.5, \quad p_n = (2 - e^{p_{n-1}} + p_{n-1}^2)/3, \quad n \geq 1$

b. $p_0 = 0.75, \quad p_n = (e^{p_{n-1}}/3)^{1/2}, \quad n \geq 1$

c. $p_0 = 0.5, \quad p_n = 3^{-p_{n-1}}, \quad n \geq 1$

d. $p_0 = 0.5, \quad p_n = \cos p_{n-1}, \quad n \geq 1$

2. Considere la función $f(x) = e^{6x} + 3(\ln 2)^2 e^{2x} - (\ln 8)e^{4x} - (\ln 2)^3$. Use el método de Newton con $p_0 = 0$ para aproximar cero de f. Genere términos hasta que $|p_{n+1} - p_n| < 0.0002$. Construya la sucesión $\{\hat{p}_n\}$. ¿Mejora la convergencia?

3. Sea $g(x) = \cos(x-1)$ y $p_0^{(0)} = 2$. Use el método de Steffensen para encontrar $p_0^{(1)}$.

4. Sea $g(x) = 1 + (\operatorname{sen} x)^2$ y $p_0^{(0)} = 1$. Use el método de Steffensen para encontrar $p_0^{(1)}$ y $p_0^{(2)}$.

5. El método de Steffensen se aplica a una función $g(x)$ usando $p_0^{(0)} = 1$ y $p_2^{(0)} = 3$ para obtener $p_0^{(1)} = 0.75$.¿Qué es $p_1^{(0)}$?

6. El método de Steffensen se aplica a una función $g(x)$ usando $p_0^{(0)} = 1$ y $p_1^{(0)} = \sqrt{2}$ para obtener $p_0^{(1)} = 2.7802$. ¿Qué es $p_2^{(0)}$?

7. Use el método de Steffensen para encontrar, con una precisión de 10^{-4}, la raíz de $x^3 - x - 1 = 0$ que se encuentra en $[1, 2]$ y compare esto con los resultados del ejercicio 8 de la sección 2.2.

8. Use el método de Steffensen para encontrar, con una precisión de 10^{-4}, la raíz de $x - 2^{x-1} = 0$ que se encuentra en $[0, 1]$ y compare esto con los resultados del ejercicio 10 de la sección 2.2.

9. Use el método de Steffensen con $p_0 = 2$ para calcular una aproximación para $\sqrt{3}$ precisa dentro de 10^{-4}. Compare este resultado con los resultados obtenidos en el ejercicio 11 de la sección 2.2 y el ejercicio 14 de la sección 2.1.

10. Use el método de Steffensen con $p_0 = 3$ para calcular una aproximación de $\sqrt[3]{25}$ precisa dentro de 10^{-4}. Compare este resultado con los obtenidos en el ejercicio 12 de la sección 2.2 y el ejercicio 13 de la sección 2.1

11. Use el método de Steffensen para aproximar las soluciones de las siguientes ecuaciones dentro de 10^{-5}.

a. $x = (2 - e^x + x^2)/3$, donde g es la función en el ejercicio 13a) de la sección 2.2

b. $x = 0.5(\operatorname{sen} x + \cos x)$, donde g es la función en el ejercicio 13f) de la sección 2.2

c. $x = (e^x/3)^{1/2}$, donde g es la función en el ejercicio 13c) de la sección 2.2

d. $x = 5^{-x}$, donde g es la función en el ejercicio 13d) de la sección 2.2

12. Use el método de Steffensen para aproximar las soluciones de las siguientes ecuaciones dentro de 10^{-5}.

a. $2 + \operatorname{sen} x - x = 0$, donde g es la función en el ejercicio 14a) de la sección 2.2

b. $x^3 - 2x - 5 = 0$, donde g es la función en el ejercicio 14b) de la sección 2.2

c. $3x^2 - e^x = 0$, donde g es la función en el ejercicio 14c) de la sección 2.2

d. $x - \cos x = 0$, donde g es la función en el ejercicio 14d) de la sección 2.2

EJERCICIOS TEÓRICOS

13. Las siguientes sucesiones convergen a 0. Use el método Δ^2 de Aitken para generar $\{\hat{p}_n\}$ hasta $|\hat{p}_n| \leq 5\times10^{-2}$:

a. $p_n = \dfrac{1}{n}, \quad n \geq 1$

b. $p_n = \dfrac{1}{n^2}, \quad n \geq 1$

14. Se dice que una sucesión $\{p_n\}$ es **superlinealmente** convergente en p si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|} = 0.$$

a. Muestre que si $p_n \to p$ de orden $\alpha > 1$, entonces $\{p_n\}$ es superlinealmente convergente a p.

b. Muestre que $p_n = \frac{1}{n^n}$ es superlinealmente convergente a 0 pero no converge en 0 de orden α para cualquier $\alpha > 1$.

15. Suponga que $\{p_n\}$ es superlinealmente convergente a p. Muestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p_n|}{|p_n - p|} = 1.$$

16. Pruebe el teorema 2.14 [*Sugerencia:* Si $\delta_n = (p_{n+1} - p)/(p_n - p) - \lambda$ y muestre que $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$. Entonces exprese $(\hat{p}_{n+1} - p)/(p_n - p)$ en términos de δ_n, δ_{n+1}, y λ.]

17. Sea $P_n(x)$ el enésimo polinomio de Taylor para $f(x) = e^x$ expandido alrededor de $x_0 = 0$.

a. Para x fija, muestre que $p_n = P_n(x)$ satisface la hipótesis del teorema 2.14.

b. Si $x = 1$, use el método Δ^2 de Aitken para generar la sucesión $\hat{p}_0, \ldots, \hat{p}_8$.

c. ¿El método Aitken acelera la convergencia en esta situación?

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Lea el artículo titulado *A Comparison of Iterative Methods for the Solution of Non-Linear Systems*, (*Una comparación de los métodos iterativos para la solución de sistemas no lineales*), de Noreen Jamil, que se encuentra en http://ijes.info/3/2/42543201.pdf. Observe algunas de las referencias. Resuma su lectura.

2. En algunas ocasiones, la bisección se empareja con los métodos de Newton y de secante hasta que se identifica un intervalo suficientemente pequeño cerca de la raíz para realizar una buena conjetura inicial. Otro enfoque es usar el método de Brent. Describa este método. ¿Acelera la convergencia, y, en este caso, por qué?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2.6

1. Encuentre las aproximaciones dentro de 10^{-4} para todos los ceros reales de los siguientes polinomios con el método de Newton.

a. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$

b. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$

c. $f(x) = x^3 - x - 1$

d. $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$

e. $f(x) = x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101$

f. $f(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 4$

2. Encuentre las aproximaciones dentro de 10^{-5} para todos los ceros de cada uno de los siguientes polinomios, primero al encontrar los ceros reales con el método de Newton y, después, al reducir los polinomios de grado inferior para determinar cualquier cero complejo.

a. $f(x) = x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 85x - 136$

b. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 16x - 40$

c. $f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2$

d. $f(x) = x^5 + 11x^4 - 21x^3 - 10x^2 - 21x - 5$

e. $f(x) = 16x^4 + 88x^3 + 159x^2 + 76x - 240$

f. $f(x) = x^4 - 4x^2 - 3x + 5$

g. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$

h. $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6$

3. Repita el ejercicio 1 con el método de Müller.

4. Repita el ejercicio 2 con el método de Müller.

5. Use el método de Müller para encontrar, dentro de 10^{-3}, los ceros y puntos críticos de las siguientes funciones. Utilice esta información para dibujar la gráfica de f.

a. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 12$ **b.** $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 12x - 5$

6. $f(x) = 10x^3 - 8.3x^2 + 2.295x - 0.21141 = 0$ tiene una raíz en $x = 0.29$. Use el método de Newton con una aproximación inicial $x_0 = 0.28$ para intentar encontrar esta raíz. Explique lo que pasa.

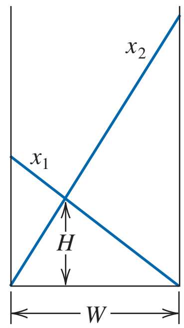
7. Use cada uno de los siguientes métodos para encontrar una solución en [0.1, 1] precisa dentro de 10^{-4} para

$$600x^4 - 550x^3 + 200x^2 - 20x - 1 = 0.$$

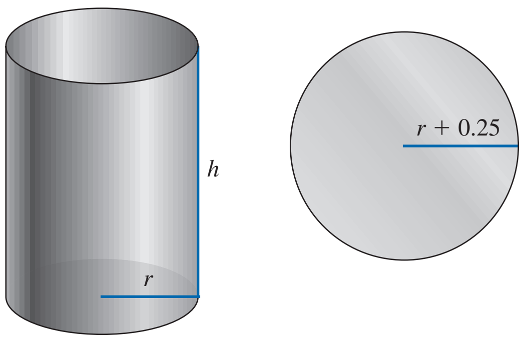
a. Método de bisección
b. Método de Newton
c. Método de la secante
d. Método de posición falsa
e. Método de Müller

EJERCICIOS APLICADOS

8. Dos escaleras se entrecruzan en un pasillo de ancho W. Cada escalera llega desde la base de una pared hasta algún punto en la pared opuesta. Las escaleras cruzan a una altura H sobre el pavimento. Encuentre W dado que las longitudes de las escaleras son $x_1 = 20$ pies y $x_2 = 30$ pies, y que $H = 8$ pies.



9. Una lata en forma de un cilindro circular recto se construye para contener 1 000 cm^3. Las partes superior e inferior de la lata deben tener un radio de 0.25 cm más que el radio de la lata, de tal forma que el exceso se pueda usar para formar un sello con la parte lateral. La hoja de material que se forma dentro de la parte lateral de la lata también debe ser 0.25 cm más grande que la circunferencia de la lata, de tal forma que se pueda formar un sello. Encuentre, dentro de 10^{-4}, la cantidad mínima de material necesario para construir la lata.



10. En 1224, Leonardo de Pisa, mejor conocido como Fibonacci, respondió el desafío matemático de Juan de Palermo en presencia del emperador Federico II: encontrar una raíz de la ecuación $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Primero mostró que la ecuación no tenía raíces racionales y ninguna raíz euclidiana irracional, es decir, ninguna raíz de ninguna de las formas $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, o $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, donde a y b son números racionales. A continuación, aproximó la única raíz real, probablemente con una técnica algebraica de Omar Khayyam, relacionada con la intersección de un círculo y una parábola. Su respuesta fue proporcionada en el sistema de numeración base 60 como

$$1 + 22\left(\frac{1}{60}\right) + 7\left(\frac{1}{60}\right)^2 + 42\left(\frac{1}{60}\right)^3 + 33\left(\frac{1}{60}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{60}\right)^5 + 40\left(\frac{1}{60}\right)^6.$$

¿Qué tan precisa fue su aproximación?

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Analice la posibilidad de combinar el método de posición falsa con el método de Müller para obtener un método para el que se acelera la convergencia. Compare esta aproximación con el método de Brent.
2. Analice la diferencia, si existe, entre el método de Müller y la interpolación cuadrática inversa.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS (FINAL DEL CAPÍTULO)

1. Analice las diferencias entre algunos de los paquetes de software disponibles para el cálculo numérico de una solución para $f(x) = 0$.
2. Compare y contraste las razones de convergencia en por lo menos dos de los métodos que se analizan en este capítulo.
3. Compare y contraste los métodos de Cauchy y de Müller.

CONCEPTOS CLAVE

Iteración de punto fijo	Método de Horner	Método de posición falsa
Medición del error	Método de la secante	Método de Steffensen
Método de bisección	Método de Müller	Razones de convergencia
Método de Δ^2 de Aitken	Método de Newton	

REVISIÓN DEL CAPÍTULO

Revisemos el capítulo 2 en términos de habilidades desarrolladas.

Hemos considerado el problema de resolver la ecuación $f(x) = 0$, donde f es una función continua determinada. Todos los métodos comenzaron con aproximaciones iniciales y generaron una sucesión que convergía a una raíz de la ecuación, si el método era exitoso. Si $[a, b]$ era un intervalo en el que $f(a)$ y $f(b)$ son de signo opuesto, entonces el método de bisección y el método de posición falsa convergían. Sin embargo, encontramos que la convergencia de estos métodos puede ser lenta. Aprendimos que la convergencia más rápida se obtenía por lo general con el método de secante o de Newton. Sin embargo, se requerían dos buenas aproximaciones iniciales para el método de la secante y una buena aproximación inicial para el método de Newton. Descubrimos que las técnicas de agrupación de raíz, como los métodos de bisección o de posición falsa, se pueden usar como métodos de inicio para el método de la secante o de Newton.

Observamos que el método de Müller proporcionaba convergencia rápida sin una buena aproximación inicial especial. Aunque no era tan eficiente como el método de Newton, su orden de convergencia cercano a la raíz fue de aproximadamente $\alpha = 1.84$, en comparación con el orden cuadrático, $\alpha = 2$ del método de Newton. Sin embargo, era mejor que el método de la secante, cuyo orden es aproximadamente $\alpha = 1.62$ y tiene la ventaja de que es capaz de aproximar raíces complejas.

En general, la deflación se usaba con los métodos de Newton o de Müller una vez que se había determinado la raíz de un polinomio. Descubrimos que después de una aproximación a la raíz de la ecuación deflactada éramos capaces de usar el método de Müller o el método de Newton sobre el polinomio original con esta raíz como aproximación inicial. Este procedimiento garantizaba que la raíz aproximada fuera una solución para la verdadera ecuación, no para la ecuación deflactada. Recomendamos el método de Müller para encontrar todos los ceros de los polinomios, reales o complejos. Observamos que el método de Müller también se podría usar para una función continua arbitraria.

Existen otros métodos de orden superior para determinar las raíces de los polinomios. Si este tema es de interés particular, recomendamos considerar el método de Laguerre, el cual proporciona convergencia cúbica y también aproxima raíces complejas (consulte [Ho], pp. 176–179 para un análisis completo), el método de Jenkins–Traub (consulte [JT]), y el método de Brent (consulte [Bre]).

Otro método de interés, el método de Cauchy, es similar al método de Müller, pero evita el problema de falla cuando $f(x_i) = f(x_{i+1}) = f(x_{i+2})$, para alguna i. Para un análisis interesante de este método, así como más detalles sobre el método de Müller, recomendamos [YG], secciones 4.10, 4.11 y 5.4.