Capítulo 10

CONJUNTO DE EJERCICIOS 10.1

1. El sistema no lineal

$$-x_1(x_1+1)+2x_2=18, \quad (x_1-1)^2+(x_2-6)^2=25$$

tiene dos soluciones.

a. Aproxime las soluciones gráficamente.

b. Use las aproximaciones a partir de la parte a) como aproximaciones iniciales para una iteración de punto fijo adecuada y determine las soluciones dentro de 10^{-5} en la norma l_∞.

2. El sistema no lineal

$$x_2^2-x_1^2+4x_1-2=0, \quad x_1^2+3x_2^2-4=0$$

tiene dos soluciones.

a. Aproxime las soluciones gráficamente.

b. Use las aproximaciones a partir de la parte a) como aproximaciones iniciales para una iteración de punto fijo adecuada y determine las soluciones dentro de 10^{-5} en la norma l_∞.

3. El sistema no lineal

$$x_1^2-10x_1+x_2^2+8=0, \quad x_1x_2^2+x_1-10x_2+8=0$$

se puede transformar en el problema de punto fijo

$$x_1=g_1(x_1,x_2)=\frac{x_1^2+x_2^2+8}{10}, \quad x_2=g_1(x_1,x_2)=\frac{x_1x_2^2+x_1+8}{10}.$$

a. Use el teorema 10.6 para mostrar que $\mathbf{G}=(g_1,g_2)^t$ mapea $D\subset\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tiene un punto fijo único en

$$D=\{\,(x_1,x_2)^t \mid 0\le x_1,x_2\le 1.5\,\}.$$

b. Aplique la iteración de punto fijo para aproximar la solución dentro de 10^{-5} en la norma l_∞.

c. ¿El método Gauss-Siedel acelera la convergencia?

4. El sistema no lineal

$$5x_1^2-x_2^2=0, \quad x_2-0.25(\operatorname{sen} x_1+\cos x_2)=0$$

tiene una solución cerca de $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)^t$.

a. Encuentre una función $\mathbf{G}$ y un conjunto D en $\mathbb{R}^2$ de tal forma que $\mathbf{G}:D\to\mathbb{R}^2$ y $\mathbf{G}$ tiene un punto fijo único en D.

b. Aplique la iteración del punto fijo para aproximar la solución dentro de 10^{-5} en la norma l_∞.

c. ¿El método de Gauss-Siedel acelera la convergencia?

5. Use el teorema 10.6 para mostrar que $\mathbf{G}:D\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tiene un punto fijo único en D. Aplique la iteración de punto fijo para aproximar la solución dentro de 10^{-5} en la norma l_∞.

a. $$\mathbf{G}(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{\cos(x_2x_3)+0.5}{3}, \frac{1}{25}\sqrt{x_1^2+0.3125}-0.03, -\frac{1}{20}e^{-x_1x_2}-\frac{10\pi-3}{60}\right)^t;$$

$$D=\{\,(x_1,x_2,x_3)^t \mid -1\le x_i\le 1, i=1,2,3\,\}$$

b. $$\mathbf{G}(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{13-x_2^2+4x_3}{15}, \frac{11+x_3-x_1^2}{10}, \frac{22+x_2^3}{25}\right);$$

$$D=\{\,(x_1,x_2,x_3)^t \mid 0\le x_1\le 1.5, i=1,2,3\,\}$$

c. $\mathbf{G}(x_1, x_2, x_3) = (1 - \cos(x_1 x_2 x_3), 1 - (1 - x_1)^{1/4} - 0.05x_3^2 + 0.15x_3, x_1^2$
$+ 0.1x_2^2 - 0.01x_2 + 1)^t;$

$$D = \{ (x_1, x_2, x_3)^t \mid -0.1 \le x_1 \le 0.1, -0.1 \le x_2 \le 0.3, 0.5 \le x_3 \le 1.1 \}$$

d. $\mathbf{G}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{3}\cos(x_2 x_3) + \frac{1}{6}, -\frac{1}{9}\sqrt{x_1^2 + \operatorname{sen} x_3 + 1.06} - 0.1, \right.$
$\left. -\frac{1}{20}e^{-x_1 x_2} - \frac{10\pi - 3}{60}\right)^t;$

$$D = \{ (x_1, x_2, x_3)^t \mid -1 \le x_i \le 1, i = 1, 2, 3 \}$$

6. Use la iteración de punto fijo para encontrar soluciones para los siguientes sistemas no lineales, precisos dentro de 10^{-5} por medio de la norma l_∞.

a. $x_2^2 + x_2^2 - x_1 = 0$
$x_1^2 - x_2^2 - x_2 = 0.$

b. $3x_1^2 - x_2^2 = 0,$
$3x_1 x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0.$

c. $x_1^2 + x_2 - 37 = 0,$
$x_1 - x_2^2 - 5 = 0,$
$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0.$

d. $x_1^2 + 2x_2^2 - x_2 - 2x_3 = 0,$
$x_1^2 - 8x_2^2 + 10x_3 = 0,$
$\frac{x_1^2}{7x_2 x_3} - 1 = 0.$

7. Use el método Gauss-Siedel para aproximar los puntos fijos en el ejercicio 5 dentro de 10^{-5}, por medio de la norma l_∞.

8. Repita el ejercicio 6 con el método Gauss-Siedel.

EJERCICIOS APLICADOS

9. En el ejercicio 6 de la sección 5.9 consideramos el problema de predecir la población de dos especies que compiten por el mismo suministro de comida. En el problema suponemos que las poblaciones podrían predecirse al resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t)(4 - 0.0003x_1(t) - 0.0004x_2(t))$$

y

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t)(2 - 0.0002x_1(t) - 0.0001x_2(t)).$$

En este ejercicio nos gustaría considerar el problema de determinar las poblaciones de equilibrio de las dos especies. Los criterios matemáticos que deben satisfacerse para lograr que la población esté en equilibrio son que, simultáneamente,

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = 0.$$

Esto ocurre cuando la primera especie está extinta y la segunda especie tiene una población de 20 000 o cuando la segunda especie está extinta y la primera especie tiene una población de 13 333. ¿El equilibrio se puede presentar en otra situación?

10. La dinámica de poblaciones de las tres especies competidoras se pueden describir mediante

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = r_i x_i(t)\left[1 - \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ij} x_j(t)\right]$$

para cada $i = 1, 2, 3$ donde la población de la i-ésima especie en el tiempo t es $x_i(t)$. El índice de crecimiento de la i-ésima especie es r_i y α_{ij} mide el grado al que las especies j afectan el índice de crecimiento de la especie i. Suponga que los tres índices de crecimiento es igual a r. Al escalar el tiempo mediante el factor r, podemos realizar efectivamente $r = 1$. Además, suponemos que la especie 2 afecta a la 1 de la misma forma en que la 3 afecta a la 2 y que la 1 afecta a la 3. Por lo tanto, $\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{31}$, que permitimos que sea igual a α, y, de igual forma, $\alpha_{21} = \alpha_{32} = \alpha_{13} = \beta$. Las poblaciones se pueden escalar de modo que todas las $\alpha_{ii} = 1$. Esto resulta en el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x_1'(t) = x_1(t)\left[1 - x_1(t) - \alpha x_2(t) - \beta x_3(t)\right],$$
$$x_2'(t) = x_2(t)\left[1 - x_2(t) - \beta x_1(t) - \alpha x_3(t)\right], \text{ y}$$
$$x_3'(t) = x_3(t)\left[1 - x_3(t) - \alpha x_1(t) - \beta x_2(t)\right].$$

Si $\alpha = 0.3$ y $\beta = 0.6$, encuentre una solución estable $(x_1'(t) = x_2'(t) = x_3'(t) = 0)$ de las poblaciones escaladas $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ en $0.5 \leq x_1(t) \leq 1$, $0 \leq x_2(t) \leq 1$ y $0.5 \leq x_3(t) \leq 1$.

EJERCICIOS TEÓRICOS

11. Muestre que la función $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3, x_1 \cos x_2, x_2^2 + x_3)^t$$

es continua en cada punto de $\mathbb{R}^3$.

12. Proporcione un ejemplo de una función $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que es continua en cada punto de $\mathbb{R}^2$, excepto en $(1, 0)$.

13. Muestre que las primeras derivadas parciales en el ejemplo 2 son continuas en D.

14. Muestre que una función $\mathbf{F}$ que mapea $D \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ es continua en $\mathbf{x}_0 \in D$ precisamente cuando, dado cualquier número $\varepsilon > 0$, un número $\delta > 0$ se puede encontrar con la propiedad de que para cualquier norma vectorial $\|\cdot\|$,

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon,$$

siempre que $\mathbf{x} \in D$ y $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$.

15. Sea A una matriz $n \times n$ y $\mathbf{F}$ la función de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^n$ definida mediante $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Use el resultado en el ejercicio 14 para mostrar que $\mathbf{F}$ es continua en $\mathbb{R}^n$.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. En el capítulo 2 se desarrolló un proceso iterativo para resolver una ecuación $f(x) = 0$, al transformar primero la ecuación en la forma de punto fijo $x \equiv g(x)$. En este capítulo se desarrolla un procedimiento similar. ¿El método de Müller se puede transformar de esta manera?

2. En el capítulo 2 se desarrolló un proceso iterativo para resolver una ecuación $f(x) = 0$, al transformar primero la ecuación en la forma de punto fijo $x \equiv g(x)$. En este capítulo se desarrolla un procedimiento similar. ¿El método de secante se puede transformar de esta manera?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 10.2

1. Use el método con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ para calcular $\mathbf{x}^{(2)}$ para cada uno de los siguientes sistemas no lineales.

a.
$$4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0,$$
$$\frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0.$$

b.
$$\operatorname{sen}(4\pi x_1x_2) - 2x_2 - x_1 = 0,$$
$$\left(\frac{4\pi - 1}{4\pi}\right)(e^{2x_1} - e) + 4ex_2^2 - 2ex_1 = 0.$$

c.
$$x_1(1 - x_1) + 4x_2 = 12,$$
$$(x_1 - 2)^2 + (2x_2 - 3)^2 = 25.$$

d.
$$5x_1^2 - x_2^2 = 0,$$
$$x_2 - 0.25(\operatorname{sen} x_1 + \cos x_2) = 0.$$

2. Use el método de Newton con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ para calcular $\mathbf{x}^{(2)}$ para cada uno de los siguientes sistemas no lineales.

a.
$$3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0,$$
$$4x_1^2 - 625x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0,$$
$$e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0.$$

b.
$$x_1^2 + x_2 - 37 = 0,$$
$$x_1 - x_2^2 - 5 = 0,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0.$$

c.
$$15x_1 + x_2^2 - 4x_3 = 13,$$
$$x_1^2 + 10x_2 - x_3 = 11,$$
$$x_2^3 - 25x_3 = -22.$$

d.
$$10x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0,$$
$$8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 = 0,$$
$$8x_2x_3 + 4 = 0.$$

3. Use las facilidades de graficación de su CAS o calculadora para aproximar soluciones para los siguientes sistemas no lineales.

a.
$$4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0,$$
$$\frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0.$$

b.
$$\operatorname{sen}(4\pi x_1x_2) - 2x_2 - x_1 = 0,$$
$$\left(\frac{4\pi - 1}{4\pi}\right)(e^{2x_1} - e) + 4ex_2^2 - 2ex_1 = 0.$$

c.
$$x_1(1 - x_1) + 4x_2 = 12,$$
$$(x_1 - 2)^2 + (2x_2 - 3)^2 = 25.$$

d.
$$5x_1^2 - x_2^2 = 0,$$
$$x_2 - 0.25(\operatorname{sen} x_1 + \cos x_2) = 0.$$

4. Use las facilidades de graficación de su CAS o calculadora para aproximar las soluciones para los sistemas no lineales dentro de los límites dados.

a.
$$3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0,$$
$$4x_1^2 - 625x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0,$$
$$e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0.$$
$$-1 \le x_1 \le 1, -1 \le x_2 \le 1, -1 \le x_3 \le 1$$

b.
$$x_1^2 + x_2 - 37 = 0,$$
$$x_1 - x_2^2 - 5 = 0,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0.$$
$$-4 \le x_1 \le 8, -2 \le x_2 \le 2, -6 \le x_3 \le 0$$

c.
$$15x_1 + x_2^2 - 4x_3 = 13,$$
$$x_1^2 + 10x_2 - x_3 = 11,$$
$$x_2^3 - 25x_3 = -22.$$
$$0 \le x_1 \le 2, 0 \le x_2 \le 2, 0 \le x_3 \le 2$$
y $0 \le x_1 \le 2, 0 \le x_2 \le 2, -2 \le x_3 \le 0$

d.
$$10x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0,$$
$$8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 = 0,$$
$$8x_2x_3 + 4 = 0.$$
$$0 \le x_1 \le 2, -2 \le x_2 \le 0, 0 \le x_3 \le 2$$

5. Use las respuestas obtenidas en el ejercicio 3 como aproximaciones iniciales para el método de Newton. Itere hasta $\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\right\|_\infty < 10^{-6}$.

6. Use las respuestas obtenidas en el ejercicio 4 como aproximaciones iniciales para el método de Newton. Itere hasta $\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\right\|_\infty < 10^{-6}$.

7. Use el método de Newton para encontrar una solución para los siguientes sistemas no lineales en el dominio determinado. Itere hasta $\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\right\|_\infty < 10^{-6}$.

a.
$$3x_1^2 - x_2^2 = 0,$$
$$3x_1x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0.$$
Use $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1)^t$.

b.
$$\ln(x_1^2 + x_2^2) - \operatorname{sen}(x_1x_2) = \ln 2 + \ln \pi,$$
$$e^{x_1 - x_2} + \cos(x_1x_2) = 0.$$
Use $\mathbf{x}^{(0)} = (2, 2)^t$.

c.
$$x_1^3 + x_1^2x_2 - x_1x_3 + 6 = 0,$$
$$e^{x_1} + e^{x_2} - x_3 = 0,$$
$$x_2^2 - 2x_1x_3 = 4.$$
Use $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, -2, 1)^t$.

d.
$$6x_1 - 2\cos(x_2x_3) - 1 = 0,$$
$$9x_2 + \sqrt{x_1^2 + \operatorname{sen} x_3 + 1.06} + 0.9 = 0,$$
$$60x_3 + 3e^{-x_1x_2} + 10\pi - 3 = 0.$$
Use $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^t$.

8. El sistema no lineal

$$4x_1 - x_2 + x_3 = x_1x_4, \qquad -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = x_2x_4,$$
$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = x_3x_4, \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

tiene seis soluciones.

a. Muestre que si $(x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ es una solución, entonces $(-x_1, -x_2, -x_3, x_4)^t$ es una solución.

b. Use el método de Newton tres veces para aproximar todas las soluciones. Itere hasta $\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\right\|_\infty < 10^{-5}$.

9. El sistema no lineal

$$3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0,$$
$$x_1^2 - 625x_2^2 - \frac{1}{4} = 0,$$
$$e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0,$$

tiene una matriz jacobiana singular en la solución. Aplique el método de Newton con $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1 - 1)^t$. Note que la convergencia puede ser lenta o podría no presentarse después de un número razonable de iteraciones.

EJERCICIOS APLICADOS

10. La cantidad de presión requerida para hundir un objeto grande y pesado en tierra homogénea y suave que se encuentra sobre tierra de base dura se puede predecir mediante la cantidad de presión requerida para hundir objetos más pequeños en la misma tierra. Específicamente, la cantidad de presión p requerida para hundir una placa circular de radio r a una distancia d en tierra suave, donde la tierra de base dura se encuentra a una distancia $D > d$ debajo de la superficie, se puede aproximar con una ecuación de la forma

$$p = k_1 e^{k_2 r} + k_3 r,$$

donde k_1, k_2 y k_3 son constantes, con $k_2 > 0$, dependiendo de d y la consistencia de la tierra, pero no del radio de la placa. (Consulte [Bek], p. 89–94.)

a. Encuentre los valores de k_1, k_2 y k_3 si suponemos que una placa de radio de 1 pulgada requiere una presión de 10 lb/pulgada^2 para hundir 1 pie en un campo turbio, una placa con radio de 2 pulgadas requiere una presión de 12 lb/pulgada^2 para hundir 1 pie y una placa con radio de 3 pulgadas requiere una presión de 15 lb/pulgada^2 para hundir esta distancia (al suponer que el barro es de más de 1 pie de profundidad).

b. Use sus cálculos de la parte a) para predecir el tamaño mínimo de una placa circular que se requeriría para sostener una carga de 500 libras en este campo con hundimiento menor a 1 pie.

11. Al calcular la forma de un vertedero de flujo por gravedad que minimizará el tiempo de tránsito de partículas granuladas descargadas, C. Chiarella, W. Charlton y A. W. Roberts [CCR] resolvieron las siguientes ecuaciones con el método de Newton:

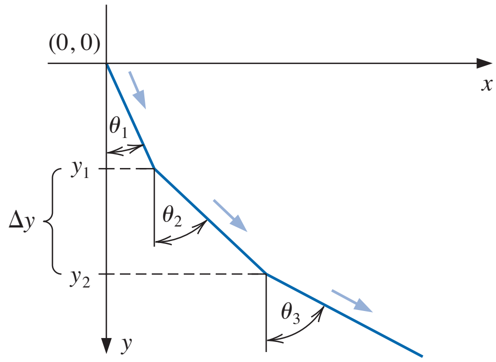
i) $f_n(\theta_1, \ldots, \theta_N) = \dfrac{\operatorname{sen}\theta_{n+1}}{v_{n+1}}(1 - \mu w_{n+1}) - \dfrac{\operatorname{sen}\theta_n}{v_n}(1 - \mu w_n) = 0$, para cada $n = 1, 2, \ldots, N - 1$.

ii) $f_N(\theta_1, \ldots, \theta_N) = \Delta y \sum_{i=1}^{N} \tan\theta_i - X = 0$, donde

a. $v_n^2 = v_0^2 + 2gn\Delta y - 2\mu\Delta y \sum_{j=1}^{n} \dfrac{1}{\cos\theta_j}$, para cada $n = 1, 2, \ldots, N$, y

b. $w_n = -\Delta y v_n \sum_{i=1}^{N} \dfrac{1}{v_i^3 \cos\theta_i}$, para cada $n = 1, 2, \ldots, N$.

La constante v_0 es la velocidad inicial del material granulado, X es la coordenada x del fin del vertedero, μ es la fuerza de fricción, N es el número de segmentos del vertedero y $g = 32.17\text{ft/s}^2$ es la constante gravitacional. La variable θ_i es un ángulo en el i-ésimo segmento del vertedero a partir de la vertical, como se muestra en la siguiente figura y v_i es la velocidad de la partícula en el i-ésimo segmento del vertedero. Resuelva i) y ii) para $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)^t$ con $\mu = 0$, $X = 2$, $\Delta y = 0.2$, $N = 20$, y $v_0 = 0$, donde los valores para v_n y w_n se pueden obtener directamente a partir de a) y b). Itere hasta $||\theta^{(k)} - \theta^{(k-1)}||_\infty < 10^{-2}$.



12. Un experimento biológico interesante (consulte [Schr2]) se preocupa por la determinación de la temperatura máxima del agua, X_M, en la que diferentes especies de hidra pueden sobrevivir sin acortar su expectativa de vida. Un enfoque para la solución de este problema usa un ajuste por mínimos cuadrados de la forma $f(x) = y = a/(x-b)^c$ para un conjunto de datos experimentales. Los valores x de los datos se refieren a la temperatura del agua. La constante b es la asíntota de la gráfica de f y, como tal, es una aproximación para X_M.

a. Muestre que seleccionar a, b y c para minimizar $\sum_{i=1}^{n}\left[w_i y_i - \frac{a}{(x_i-b)^c}\right]^2$ reduce la solución del sistema no lineal

$$a = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i y_i}{(x_i-b)^c} \Bigg/ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x_i-b)^{2c}},$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i y_i}{(x_i-b)^c} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x_i-b)^{2c+1}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i y_i}{(x_i-b)^{c+1}} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x_i-b)^{2c}},$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i y_i}{(x_i-b)^c} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\ln(x_i-b)}{(x_i-b)^{2c}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i y_i \ln(x_i-b)}{(x_i-b)^c} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x_i-b)^{2c}}.$$

b. Resuelva el sistema no lineal para las especies con los siguientes datos. Use los pesos $w_i = \ln y_i$.

i	1	2	3	4
y_i	2.40	3.80	4.75	21.60
x_i	31.8	31.5	31.2	30.2

EJERCICIOS TEÓRICOS

13. Muestre que cuando $n = 1$, el método de Newton dado por la ecuación (10.9) se reduce al método familiar de Newton dado en la sección 2.3.

14. ¿Qué reduce el método de Newton para el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dado por

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}$$

donde A es una matriz no singular?

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. A menudo, en el análisis del método de Newton para sistemas no lineales, se podría encontrar la frase "término forzado". ¿Qué significa eso y por qué es importante?

2. El método inexacto de Newton se usa ampliamente para resolver sistemas de ecuaciones no lineales. Se sabe que los términos forzados se deberían seleccionar relativamente grandes al inicio y volverse pequeños durante el proceso de iteración. Analice la forma de realizarlo.

3. ¿El método de Newton para los sistemas no lineales converge para cualquier valor inicial? ¿Por qué sí o por qué no?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 10.3

1. Use el método de Broyden para calcular $\mathbf{x}^{(2)}$ para cada uno de los siguientes sistemas no lineales.

a. $$4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0,$$
$$\frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0.$$
Use $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)^t$.

b. $$\operatorname{sen}(4\pi x_1x_2) - 2x_2 - x_1 = 0,$$
$$\left(\frac{4\pi - 1}{4\pi}\right)(e^{2x_1} - e) + 4ex_2^2 - 2ex_1 = 0.$$
Use $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)^t$.

c. $$3x_1^2 - x_2^2 = 0,$$
$$3x_1x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0.$$
Use $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1)^t$.

d. $$\ln(x_1^2 + x_2^2) - \operatorname{sen}(x_1x_2) = \ln 2 + \ln \pi,$$
$$e^{x_1 - x_2} + \cos(x_1x_2) = 0.$$
Use $\mathbf{x}^{(0)} = (2, 2)^t$.

2. Use el método de Broyden para calcular $\mathbf{x}^{(2)}$ para cada uno de los siguientes sistemas no lineales.

a. $$3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0,$$
$$4x_1^2 - 625x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0,$$
$$e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0.$$
Use $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^t$.

b. $$x_1^2 + x_2 - 37 = 0,$$
$$x_1 - x_2^2 - 5 = 0,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0.$$
Use $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^t$.

c. $$x_1^3 + x_1^2x_2 - x_1x_3 + 6 = 0,$$
$$e^{x_1} + e^{x_2} - x_3 = 0,$$
$$x_2^2 - 2x_1x_3 = 4.$$
Use $\mathbf{x}^{(0)} = (-1, -2, 1)^t$.

d. $$6x_1 - 2\cos(x_2x_3) - 1 = 0,$$
$$9x_2 + \sqrt{x_1^2 + \operatorname{sen} x_3 + 1.06} + 0.9 = 0,$$
$$60x_3 + 3e^{-x_1x_2} + 10\pi - 3 = 0.$$
Use $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^t$.

3. Use el método de Broyden para aproximar soluciones de los sistemas no lineales en el ejercicio 1 mediante las siguientes aproximaciones iniciales $\mathbf{x}^{(0)}$.

a. $(0, 0)^t$ **b.** $(0, 0)^t$ **c.** $(1, 1)^t$ **d.** $(2, 2)^t$

4. Use el método de Broyden para aproximar soluciones de los sistemas no lineales en el ejercicio 2 mediante las siguientes aproximaciones iniciales $\mathbf{x}^{(0)}$.

a. $(1, 1, 1)^t$ **b.** $(2, 1, -1)^t$ **c.** $(-1, -2, 1)^t$ **d.** $(0, 0, 0)^t$

5. Use el método de Broyden para aproximar las soluciones de los siguientes sistemas no lineales. Itere hasta $\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\right\|_\infty < 10^{-6}$.

a. $$x_1(1 - x_1) + 4x_2 = 12,$$
$$(x_1 - 2)^2 + (2x_2 - 3)^2 = 25.$$

b. $$5x_1^2 - x_2^2 = 0,$$
$$x_2 - 0.25(\operatorname{sen} x_1 + \cos x_2) = 0.$$

c. $$15x_1 + x_2^2 - 4x_3 = 13,$$
$$x_1^2 + 10x_2 - x_3 = 11,$$
$$x_2^3 - 25x_3 = -22.$$

d. $$10x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0,$$
$$8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 = 0,$$
$$8x_2x_3 + 4 = 0.$$

6. El sistema no lineal

$$4x_1 - x_2 + x_3 = x_1x_4,$$
$$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = x_2x_4,$$
$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = x_3x_4,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,$$

tiene seis soluciones.

a. Muestre que si $(x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ es una solución, entonces $(-x_1, -x_2, -x_3, x_4)^t$ es una solución.

b. Use el método de Broyden tres veces para aproximar cada solución. Itere hasta $\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\right\|_\infty < 10^{-5}$.

7. El sistema no lineal

$$3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0, \quad x_1^2 - 625x_2^2 - \frac{1}{4} = 0, \quad e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

tiene una matriz Jacobiana singular en la solución. Aplique el método de Broyden con $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1 - 1)^t$. Observe que la convergencia puede ser lenta y podría no presentarse dentro de un número razonable de iteraciones.

EJERCICIOS APLICADOS

8. La dinámica de población de tres especies rivales se pueden describir por medio de

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = r_ix_i(t)\left[1 - \sum_{i=1}^{3}\alpha_{ij}x_j(t)\right]$$

para cada $i = 1, 2, 3,$ donde la población de la i-ésima especie en el tiempo t es $x_i(t)$. El índice de crecimiento de la i-ésima especie es r_i, y a_{ij} mide el grado en el que la especie j afecta el índice de crecimiento de la especie i. Suponga que los tres índices de crecimiento son iguales a r. Al escalar el tiempo mediante el factor r podemos volver $r = 1$ efectivo. Además, suponemos que la especie 2 afecta a la 1, al igual que la 3 afecta a la 2 y la 1 afecta a la 3. Por lo tanto, $\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{31}$, que establecimos igual a α y, de igual forma, $\alpha_{21} = \alpha_{32} = \alpha_{13} = \beta$. Es posible escalar las poblaciones de tal forma que $\alpha_{ii} = 1$. Esto produce el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= x_1(t)\left[1 - x_1(t) - \alpha x_2(t) - \beta x_3(t)\right], \\
x_2'(t) &= x_2(t)\left[1 - x_2(t) - \beta x_1(t) - \alpha x_3(t)\right], \text{ y} \\
x_3'(t) &= x_3(t)\left[1 - x_3(t) - \alpha x_1(t) - \beta x_2(t)\right].
\end{aligned}$$

Si $\alpha = 0.5$ y $\beta = 0.25$, encuentre una solución estable ($x_1'(t) = x_2'(t) = x_3'(t) = 0$) en el conjunto $\{(x_1, x_2, x_3) | \ 0 \leq x_1(t) \leq 1, \ 0.25 \leq x_2(t) \leq 1, \ 0.25 \leq x_3(t) \leq 1\}$ mediante el método de Broyden.

9. El ejercicio 13 de la sección 8.1 abordaba la determinación de una relación de mínimos cuadrados exponenciales de la forma $R = bw^a$ para aproximar un conjunto de datos relacionados con el peso y la regla de respiración de las polillas *esfinge modestas*. En ese ejercicio, el problema se convirtió en una relación log-log y en la parte c) se introdujo un término cuadrático en un intento por mejorar la aproximación. En lugar de convertir el problema, determine las constantes a y b que minimizan $\sum_{i=1}^{n}(R_i - bw_i^a)^2$ para los datos enumerados en el ejercicio 13 de la sección 8.1. Calcule el error relacionado con esta aproximación y compárelo con el error de las aproximaciones previas para este problema.

EJERCICIOS TEÓRICOS

10. Muestre que si $\mathbf{0} \neq \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, entonces $\mathbf{z} = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$, donde $\mathbf{z}_1 = (\mathbf{y}^t\mathbf{z}/\|\mathbf{y}\|_2^2)\mathbf{y}$ es paralela a $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}_2$ es ortogonal a $\mathbf{y}$.

11. Muestre que si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, entonces $\det(I + \mathbf{u}\mathbf{v}^t) = 1 + \mathbf{v}^t\mathbf{u}$.

12. **a.** Use los resultados en el ejercicio 11 para mostrar que si existe A^{-1} y $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, entonces existe $(A + \mathbf{x}\mathbf{y}^t)^{-1}$ si y sólo si $\mathbf{y}^t A^{-1}\mathbf{x} \neq -1$.

b. Al multiplicar a la derecha por $A + \mathbf{x}\mathbf{y}^t$, muestre que cuando $\mathbf{y}^t A^{-1}\mathbf{x} \neq -1$, tenemos

$$(A + \mathbf{x}\mathbf{y}^t)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\mathbf{x}\mathbf{y}^t A^{-1}}{1 + \mathbf{y}^t A^{-1}\mathbf{x}}.$$

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Las implementaciones modernas de propósito general mejor conocidas de los métodos cuasi-Newton para resolver grandes sistemas no lineales están basadas en las fórmulas de corrección de rango 1 como BGM, BBM, COLUM e ICUM. ¿Cómo se implementan esta fórmulas de corrección?
2. La fórmula Sherman-Morrison describe la solución de $A+uvT$, cuando ya existe una factorización para A. ¿Qué es la fórmula Sherman-Morrison-Woodbury y cómo se diferencia?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 10.4

1. Use el método del descenso más rápido con $TOL = 0.05$ para aproximar las soluciones de los siguientes sistemas no lineales.

a. $$4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0,$$ $$\frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0.$$

b. $$3x_1^2 - x_2^2 = 0,$$ $$3x_1x_2^2 - x_1^3 - 1 = 0.$$

c. $$\ln(x_1^2 + x_2^2) - \operatorname{sen}(x_1x_2) = \ln 2 + \ln \pi,$$ $$e^{x_1 - x_2} + \cos(x_1x_2) = 0.$$

d. $$\operatorname{sen}(4\pi x_1x_2) - 2x_2 - x_1 = 0,$$ $$\left(\frac{4\pi - 1}{4\pi}\right)(e^{2x_1} - e) + 4ex_2^2 - 2ex_1 = 0.$$

2. Use el método del descenso más rápido con $TOL = 0.05$ para aproximar las soluciones de los siguientes sistemas no lineales.

a. $$15x_1 + x_2^2 - 4x_3 = 13,$$ $$x_1^2 + 10x_2 - x_3 = 11,$$ $$x_2^3 - 25x_3 = -22.$$

b. $$10x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0,$$ $$8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 = 0,$$ $$8x_2x_3 + 4 = 0.$$

c. $$x_1^3 + x_1^2x_2 - x_1x_3 + 6 = 0,$$ $$e^{x_1} + e^{x_2} - x_3 = 0,$$ $$x_2^2 - 2x_1x_3 = 4.$$

d. $$x_1 + \cos(x_1x_2x_3) - 1 = 0,$$ $$(1 - x_1)^{1/4} + x_2 + 0.05x_3^2 - 0.15x_3 - 1 = 0,$$ $$-x_1^2 - 0.1x_2^2 + 0.01x_2 + x_3 - 1 = 0.$$

3. Use los resultados en el ejercicio 1 y el método de Newton para aproximar las soluciones de los sistemas no lineales en el ejercicio 1 dentro de 10^{-6}.
4. Use los resultados en el ejercicio 2 y el método de Newton para aproximar las soluciones de los sistemas no lineales en el ejercicio 2 dentro de 10^{-6}.
5. Use el método del descenso más rápido para aproximar los mínimos dentro de 0.005 para las siguientes funciones.

a. $g(x_1, x_2) = \cos(x_1 + x_2) + \operatorname{sen} x_1 + \cos x_2$

b. $g(x_1, x_2) = 100(x_1^2 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2$

c. $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1 - 2.5x_2 - x_3 + 2$

d. $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + 2x_2^4 + 3x_3^4 + 1.01$

EJERCICIOS APLICADOS

6. El ejercicio 12 en la sección 10.2 se preocupa por un experimento biológico para determinar la temperatura máxima del agua a la que varias especies de hidra pueden sobrevivir sin acortar su expectativa de vida. En ese ejercicio, el método de Newton se usó para encontrar los valores de a, b y c para minimizar

$$\sum_{i=1}^{4}\left[y_i \ln y_i - \frac{a}{(x_i - b)^c}\right]^2.$$

Los datos provistos se dan en la tabla

i	1	2	3	4
y_i	2.40	3.80	4.75	21.60
x_i	31.8	31.5	31.2	30.2

Use el método de descenso más rápido para aproximar a, b y c dentro de 0.05.

7. Conforme las personan envejecen, tienden a preguntarse si vivirán más de lo que durará su dinero. La siguiente tabla representa las posibilidades de que su dinero alcance hasta cierta edad.

x_i	75	80	85	90	95
y_i	100%	99%	83.3%	61.2%	41.2%

Los datos están basados en una cuota inversión anual promedio de 1.9%, retiro a los 65 años, devoluciones de 6%, inflación de 2.5% y retiros iniciales de 4% de la cartera, que incrementa de manera anual con la inflación. Suponga que los datos se pueden aproximar mediante una función $y = bx^a$.

a. Use el método de descenso más rápido para encontrar a y b que minimiza $g(a, b) = \sum_{i=1}^{5}[y_i - bx_i^a]^2$.

b. Use el método dado en la sección 1.8 en el que la ecuación $y = \ln b + a \ln x$ adapta los datos a un ajuste lineal.

c. ¿Cuál de las opciones a) o b) da el error más pequeño $E = \sum_{i=1}^{5}[y_i - bx_i^a]^2$?

d. ¿Qué predicen las aproximaciones para los 100 años?

EJERCICIOS TEÓRICOS

8. a. Muestre que el polinomio cuadrático

$$P(\alpha) = g_1 + h_1\alpha + h_3\alpha(\alpha - \alpha_2)$$

interpola la función h definida en (10.18),

$$h(\alpha) = g\left(\mathbf{x}^{(0)} - \alpha\nabla g(\mathbf{x}^{(0)})\right),$$

en $\alpha = 0, \alpha_2$ y α_3.

b. Muestre que se presenta un punto crítico P en

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\left(\alpha_2 - \frac{h_1}{h_3}\right).$$

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Las modificaciones en el método de descenso más rápido han sugerido que la longitud de paso original conduce a la conducta de convergencia lenta del método. Barzilai y Borwein fueron los primeros en sugerir una longitud de paso nueva. Analice sus resultados.

2. El método de descenso más rápido puede sucumbir a un gran error residual si el problema es vulnerable al ruido, lo cual podría llevar a una solución aproximada incorrecta para el sistema. El método de descenso más rápido modificado no es sensible a los problemas mal planteados. Analice porqué éste es el caso.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 10.5

1. El sistema no lineal

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_2 = 0, \quad f_2(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2^2 - 6 = 0$$

tiene dos soluciones, $(0.625204094, 2.179355825)^t$ y $(2.109511920, -1.334532188)^t$. Use el método de continuación y el método de Euler con $N = 2$ para aproximar las soluciones donde

a. $\mathbf{x}(0) = (0, 0)^t$ **b.** $\mathbf{x}(0) = (1, 1)^t$ **c.** $\mathbf{x}(0) = (3, -2)^t$

2. Repita el ejercicio 1 usando el método de Runge-Kutta de orden 4 con $N = 1$.

3. Use el método de continuación y el método de Euler con $N = 2$ en los siguientes sistemas no lineales.

a.
$$4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0,$$
$$\frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0.$$

b.
$$\operatorname{sen}(4\pi x_1x_2) - 2x_2 - x_1 = 0,$$
$$\left(\frac{4\pi - 1}{4\pi}\right)(e^{2x_1} - e) + 4ex_2^2 - 2ex_1 = 0.$$

c.
$$3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0,$$
$$4x_1^2 - 625x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0,$$
$$e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0.$$

d.
$$x_1^2 + x_2 - 37 = 0,$$
$$x_1 - x_2^2 - 5 = 0,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0.$$

4. Use el método de continuación y el método de Runge-Kutta de orden 4 con $N = 1$ en los siguientes sistemas no lineales usando $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. ¿Las respuestas aquí son comparables con el método de Newton o son aproximaciones iniciales adecuadas para el método de Newton?

a.
$$x_1(1 - x_1) + 4x_2 = 12,$$
$$(x_1 - 2)^2 + (2x_2 - 3)^2 = 25.$$
Compare con 10.2(5c).

b.
$$5x_1^2 - x_2^2 = 0,$$
$$x_2 - 0.25(\operatorname{sen} x_1 + \cos x_2) = 0.$$
Compare con 10.2(5d).

c.
$$15x_1 + x_2^2 - 4x_3 = 13,$$
$$x_1^2 + 10x_2 - x_3 = 11.$$
$$x_2^3 - 25x_3 = -22$$
Compare con 10.2(6c).

d.
$$10x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 = 0,$$
$$8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 = 0.$$
$$8x_2x_3 + 4 = 0$$
Compare con 10.2(6d).

5. Repita el ejercicio 4 usando las aproximaciones iniciales obtenidas de acuerdo con lo siguiente.

a. A partir de 10.2(3c) **b.** A partir de 10.2(3d)

c. A partir de 10.2(4c) **d.** A partir de 10.2(4d)

6. Use el método de continuación y el método Runge-Kutta de orden 4 con $N = 1$ en el ejercicio 7 de la sección 10.2. ¿Los resultados son tan buenos como los obtenidos ahí?

7. Repita el ejercicio 5 usando $N = 2$.

8. Repita el ejercicio 8 de la sección 10.2 usando el método de continuación y el método de Runge-Kutta de orden 4 con $N = 1$.

9. Repita el ejercicio 9 de la sección 10.2 usando el método de continuación y el método de Runge-Kutta de orden 4 con $N = 2$.

EJERCICIOS APLICADOS

10. Al calcular la forma de una descarga de un vertedero de flujo por gravedad que minimizará el tiempo de tránsito de las partículas granulares descargadas, C. Chiarella, W. Charlton y A.W. Roberts [CCR] resolvieron las siguientes ecuaciones mediante el método de Newton:

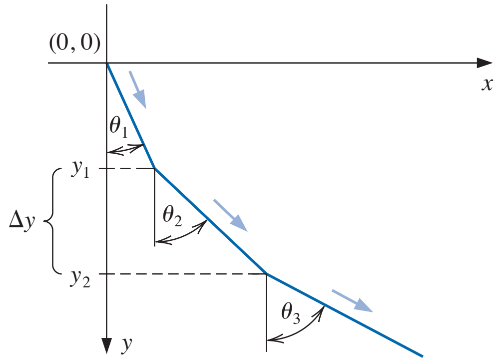
i) $f_n(\theta_1, \ldots, \theta_N) = \dfrac{\operatorname{sen}\theta_{n+1}}{v_{n+1}}(1 - \mu w_{n+1}) - \dfrac{\operatorname{sen}\theta_n}{v_n}(1 - \mu w_n) = 0$, para cada $n = 1, 2, \ldots, N - 1$.

ii) $f_N(\theta_1, \ldots, \theta_N) = \Delta y \sum_{i=1}^{N} \tan\theta_i - X = 0$, donde

a. $v_n^2 = v_0^2 + 2gn\Delta y - 2\mu\Delta y \sum_{j=1}^{n} \dfrac{1}{\cos\theta_j}$, para cada $n = 1, 2, \ldots, N$, y

b. $w_n = -\Delta y v_n \sum_{i=1}^{N} \dfrac{1}{v_i^3 \cos\theta_i}$, para cada $n = 1, 2, \ldots, N$.

La constante v_0 es la velocidad inicial del material granular, X es la coordenada x del final del vertedero, μ es la fuerza de fricción, N es el número de segmentos del vertedero y $g = 32.17$ pies/segundo^2 es la constante gravitacional. La variable θ_i es el ángulo del i-ésimo segmento del vertedero a partir de la vertical, como se muestra en la siguiente figura, y v_i es la velocidad de partícula en el i-ésimo segmento del vertedero. Resuelva i) y ii) para $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)^t$ con $\mu = 0$, $X = 2$, $\Delta y = 0.2$, $N = 20$, y $v_0 = 0$, donde los valores para v_n y w_n se pueden obtener directamente a partir de a) y b). Itere hasta $||\theta^{(k)} - \theta^{(k-1)}||_\infty < 10^{-2}$.



11. La dinámica de población de las tres especies rivales se puede describir mediante

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = r_i x_i(t)\left[1 - \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ij} x_j(t)\right]$$

para cada $i = 1, 2, 3$, donde la población de la i-ésima especie en el tiempo t es $x_i(t)$. La velocidad de crecimiento de la i-ésima especie es r_i, y α_{ij} mide el grado en el que la especie j afecta la velocidad de crecimiento de la especie i. Suponga que las tres velocidades de crecimiento son iguales a r. Al escalar el tiempo mediante el factor r podemos realizar efectivamente $r = 1$. También, asumimos que la especie 2 afecta a la 1 de la misma manera en que la 3 afecta a la 2 y la 1 afecta a la 3. Por lo tanto, $\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{31}$ que establecimos igual a α y, de igual forma, $\alpha_{21} = \alpha_{32} = \alpha_{13} = \beta$. Las poblaciones se pueden escalar de tal forma que todas las $\alpha_{ii} = 1$. Esto produce el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x_1'(t) = x_1(t)\left[1 - x_1(t) - \alpha x_2(t) - \beta x_3(t)\right]$$
$$x_2'(t) = x_2(t)\left[1 - x_2(t) - \beta x_1(t) - \alpha x_3(t)\right]$$
$$x_3'(t) = x_3(t)\left[1 - x_3(t) - \alpha x_1(t) - \beta x_2(t)\right].$$

Si $\alpha = 0.5$ y $\beta = 0.25$, encuentre una solución estable $(x_1'(t) = x_2'(t) = x_3'(t) = 0)$ en el conjunto $\{(x_1, x_2, x_3) |\ 0 \le x_1(t) \le 1,\ 0.25 \le x_2(t) \le 1,\ 0.25 \le x_3(t) \le 1\}$ usando el método de Broyden.

EJERCICIOS TEÓRICOS

12. Muestre que el método de continuación y el método de Euler con $N = 1$ dan el mismo resultado que el método de Newton para la primera iteración; es decir, con $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^{(0)}$, también obtenemos $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}^{(1)}$.

13. Muestre que la homotopía

$$G(\lambda, \mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) - e^{-\lambda} F(\mathbf{x}(0))$$

usada en el método de continuación con el método de Euler y $h = 1$ también duplica el método de Newton para cualquier $\mathbf{x}^{(0)}$; es decir, con $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^{(0)}$, tenemos $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}^{(1)}$.

14. Sea que el método de continuación con el método Runge-Kutta de orden 4 se abrevien como CMRK4. Después de completar los ejercicios 4, 5, 6, 7, 8 y 9, responda las siguientes preguntas.

- **a.** ¿CMRK4 es comparable con $N = 1$ para el método de Newton? Respalde su pregunta con los resultados de ejercicios anteriores.
- **b.** ¿CMRK4 con $N = 1$ se debería usar como un medio para obtener una aproximación inicial para el método de Newton? Respalde su respuesta con los resultados de ejercicios anteriores.
- **c.** Repita la parte a) para CMRK4 con $N = 2$.
- **d.** Repita la parte b) para CMRK4 con $N = 2$.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Proporcione una descripción general del método GMRES. ¿Cómo difiere de los métodos iterativos descritos en este capítulo?

2. El texto menciona que el método de continuación se puede usar como método independiente y no requiere un punto inicial particularmente bueno. ¿Cómo se puede usar este método junto con el método de Newton para obtener una mejor aproximación para el conjunto de solución?
3. El texto menciona que el método de continuación se puede usar como método independiente y no requiere un punto inicial particularmente bueno. ¿Cómo se puede usar este método junto con el método de Broyden para obtener una mejor aproximación para el conjunto de solución?

PREGUNTAS DE ANÁLISIS (FINAL DEL CAPÍTULO)

1. El paquete Hompack en netlib resuelve un sistema de ecuaciones no lineales al usar varios métodos de homotopía. Analice uno de estos métodos.
2. El método Levenberg-Marquardt es un promedio ponderado del método de Newton y el método de descenso más rápido. Analice con más detalle cómo es posible obtener el peso ponderado y comente la velocidad de convergencia.

CONCEPTOS CLAVE

Continuidad	Funciones coordenadas	Métodos de continuación
Derivada direccional	Matriz jacobiana	Métodos de homotopía
Descenso más rápido	Método de Broyden	Punto fijo
Fórmula Sherman-Morrison	Método de Newton	
Función gradiente	Métodos cuasi-Newton	

REVISIÓN DEL CAPÍTULO

En este capítulo consideramos las soluciones aproximadas para los sistemas no lineales

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

el método de Newton para sistemas requiere una buena aproximación inicial $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})^t$ y genera una sucesión

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} - J(\mathbf{x}^{(k-1)})^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k-1)}),$$

la cual converge rápidamente a una solución $\mathbf{x}$ si $\mathbf{p}^{(0)}$ es suficientemente cercana a $\mathbf{p}$. Sin embargo, el método de Newton requiere evaluar, o aproximar, n^2 derivadas parciales y resolver un sistema lineal $n \times n$ en cada paso. Resolver el sistema lineal requiere $O(n^3)$ cálculos.

El método de Broyden reduce la cantidad de cálculos en cada paso sin degradar significativamente la velocidad de convergencia. Esta técnica reemplaza la matriz jacobiana J con una matriz A_{k-1} cuya inversa está directamente determinada en cada paso. Esto reduce los cálculos aritméticos de $O(n^3)$ a $O(n^2)$. Además, las únicas evaluaciones de función escalar requeridas son la evaluación de f_i, lo cual ahorra n^2 funciones escalares por paso. El método de Broyden también requiere una buena aproximación inicial.

El método de descenso más rápido se presentó como una manera de obtener buenas aproximaciones iniciales para los métodos de Newton y Broyden. Aunque el descenso más rápido no provee una sucesión que converja rápidamente, no requiere una buena aproximación inicial. El método de descenso más rápido aproxima un mínimo de una función multivariable g. Para nuestra aplicación seleccionamos

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}[f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)]^2.$$

El valor mínimo de g es 0, que se presenta cuando las funciones f_i son simultáneamente 0.

Los métodos de homotopía y continuación también se usan para los sistemas no lineales y son el tema de la investigación actual (consulte [AG]). En estos métodos, un problema dado

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

está inserto en una familia de problemas de un parámetro que usan un parámetro λ que asume los valores en $[0, 1]$. El problema original corresponde a $\lambda = 1$, y un problema con una solución conocida corresponde a $\lambda = 0$. Por ejemplo, el conjunto de problemas

$$G(\lambda, \mathbf{x}) = \lambda\mathbf{F}(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)(\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x_0})) = \mathbf{0}, \quad \text{para } 0 \leq \lambda \leq 1,$$

con $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ fija forma una homotopía. Cuando $\lambda = 0$, la solución es $\mathbf{x}(\lambda = 0) = \mathbf{x}_0$. La solución para el problema original corresponde a $\mathbf{x}(\lambda = 1)$.

Un método de continuación intenta determinar $\mathbf{x}(\lambda = 1)$ al resolver la sucesión de problemas correspondientes a $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_m = 1$. La aproximación inicial a la solución de

$$\lambda_i\mathbf{F}(\mathbf{x}) + (1 - \lambda_i)(\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x_0})) = \mathbf{0}$$

sería la solución, $\mathbf{x}(\lambda = \lambda_{i-1})$, para el problema

$$\lambda_{i-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}) + (1 - \lambda_{i-1})(\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0)) = \mathbf{0}.$$

Un tratamiento exhaustivo de los métodos para resolver sistemas no lineales de ecuaciones se puede encontrar en Ortega y Rheinbolt [OR] y en Dennis y Schnabel [DenS]. Desarrollos recientes sobre métodos iterativos se pueden encontrar en Argyros y Szidarovszky [AS] e información sobre el uso de los métodos de continuación está disponible en Allgower y Georg [AG].