Capítulo 8

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.1

1. Calcule el polinomio lineal por mínimos cuadrados para los datos del ejemplo 2.

2. Calcule el polinomio por mínimos cuadrados de grado 2 para los datos del ejemplo 1 y compare el error E para los dos polinomios.

3. Encuentre los polinomios por mínimos cuadrados de grados 1, 2 y 3 para los datos en la siguiente tabla. Calcule el error E en cada caso. Grafique los datos y los polinomios.

x_i	1.0	1.1	1.3	1.5	1.9	2.1
y_i	1.84	1.96	2.21	2.45	2.94	3.18

4. Encuentre los polinomios por mínimos cuadrados de grados 1, 2 y 3 para los datos en la siguiente tabla. Calcule el error E en cada caso. Grafique los datos y los polinomios.

x_i	0	0.15	0.31	0.5	0.6	0.75
y_i	1.0	1.004	1.031	1.117	1.223	1.422

5. Dados los datos:

x_i	4.0	4.2	4.5	4.7	5.1	5.5	5.9	6.3	6.8	7.1
y_i	102.56	113.18	130.11	142.05	167.53	195.14	224.87	256.73	299.50	326.72

a. Construya el polinomio por mínimos cuadrados de grado 1 y calcule el error.

b. Construya el polinomio por mínimos cuadrados de grado 2 y calcule el error.

c. Construya el polinomio por mínimos cuadrados de grado 3 y calcule el error.

d. Construya el polinomio por mínimos cuadrados de la forma be^{ax} y calcule el error.

e. Construya el polinomio por mínimos cuadrados de la forma bx^a y calcule el error.

6. Repita el ejercicio 5 para los siguientes datos.

x_i	0.2	0.3	0.6	0.9	1.1	1.3	1.4	1.6
y_i	0.050446	0.098426	0.33277	0.72660	1.0972	1.5697	1.8487	2.5015

EJERCICIOS APLICADOS

7. En el ejemplo principal de este capítulo se describió un experimento para determinar la constante k del resorte en la ley de Hooke:

$$F(l) = k(l - E).$$

La función F es la fuerza requerida para estirar el resorte l unidades, donde la constante $E = 5.3$ pulgadas, es la longitud del resorte sin estirar.

a. Suponga que se realizan las medidas de la longitud l, en pulgadas, para pesos aplicados $F(l)$, en libras, de acuerdo con la siguiente tabla.

$F(l)$	l
2	7.0
4	9.4
6	12.3

Encuentre la aproximación por mínimos cuadrados para k.

b. Se realizan mediciones adicionales, que proporcionan más datos:

$F(l)$	l
3	8.3
5	11.3
8	14.4
10	15.9

Calcule la nueva aproximación por mínimos cuadrados de k. ¿a) o b) se ajusta mejor a los datos experimentales totales?

8. La siguiente lista contiene calificaciones de tareas escolares y las calificaciones del examen final de 30 estudiantes de análisis numérico. Encuentre la ecuación de la recta por mínimos cuadrados para estos datos y úsela para determinar la calificación de tareas escolares que se requiere en la predicción de las calificaciones mínimas A (90%) y D (60%) en el examen final.

Tarea	Final	Tarea	Final
302	45	323	83
325	72	337	99
285	54	337	70
339	54	304	62
334	79	319	66
322	65	234	51
331	99	337	53
279	63	351	100
316	65	339	67
347	99	343	83
343	83	314	42
290	74	344	79
326	76	185	59
233	57	340	75
254	45	316	45

9. La siguiente tabla muestra los promedios de puntos del colegio de 20 especialistas en matemáticas y ciencias computacionales, junto con las calificaciones que recibieron estos estudiantes en la parte de matemáticas de la prueba ACT (Programa de Pruebas de Colegios Americanos) mientras estaban en secundaria. Grafique estos datos y encuentre la ecuación de la recta por mínimos cuadrados para estos datos.

Puntuación ACT	Promedio de puntos	Puntuación ACT	Promedio de puntos
28	3.84	29	3.75
25	3.21	28	3.65
28	3.23	27	3.87
27	3.63	29	3.75
28	3.75	21	1.66
33	3.20	28	3.12
28	3.41	28	2.96
29	3.38	26	2.92
23	3.53	30	3.10
27	2.03	24	2.81

10. El siguiente conjunto de datos, presentado al Subcomité Antimonopolio del Senado, muestra las características comparativas de supervivencia durante un choque de automóviles de diferentes clases. Encuentre la recta por mínimos cuadrados que aproxima estos datos (la tabla muestra el porcentaje de vehículos que participaron en un accidente en los que la lesión más grave fue fatal o seria).

Tipo	Peso promedio	Porcentaje de presentación
1. Regular lujoso doméstico	4800 lb	3.1
2. Regular intermediario doméstico	3700 lb	4.0
3. Regular económico doméstico	3400 lb	5.2
4. Compacto doméstico	2800 lb	6.4
5. Compacto extranjero	1900 lb	9.6

11. Para determinar una relación entre el número de peces y el número de especies de peces en muestras tomadas para una parte de la Gran Barrera de Coral, P. Sale y R. Dybdahl [SD] ajustaron polinomios lineales por mínimos cuadrados al siguiente conjunto de datos, los cuales se recopilaron en muestras durante un periodo de 2 años. Sea x el número de peces en la muestra y y el número de especies en la muestra.

x	y	x	y	x	y
13	11	29	12	60	14
15	10	30	14	62	21
16	11	31	16	64	21
21	12	36	17	70	24
22	12	40	13	72	17
23	13	42	14	100	23
25	13	55	22	130	34

Determine el polinomio lineal por mínimos cuadrados para estos datos.

12. Para determinar una relación funcional entre el coeficiente de atenuación y el espesor de una muestra de taconita, V. P. Singh [Si] ajustó un conjunto de datos al utilizar un polinomio lineal por mínimos cuadrados. El siguiente conjunto de datos se toma a partir de una gráfica en ese artículo. Encuentre el polinomio lineal por mínimos cuadrados que se ajusta a estos datos

Espesor (cm)	Coeficiente de atenuación (dB/cm)
0.040	26.5
0.041	28.1
0.055	25.2
0.056	26.0
0.062	24.0
0.071	25.0
0.071	26.4
0.078	27.2
0.082	25.6
0.090	25.0
0.092	26.8
0.100	24.8
0.105	27.0
0.120	25.0
0.123	27.3
0.130	26.9
0.140	26.2

13. En un artículo que trata de la eficiencia de la utilización de energía de una larva de polilla esfinge modesta (*Pachysphinx modesta*), L. Schroeder [Schr1] utilizó los siguientes datos para determinar una relación entre W, el peso vivo de la larva en gramos y R, el consumo de oxígeno de la larva en milímetros/hora. Por razones biológicas, se supone que existe una relación de la forma $R = bW^a$ entre W y R.

a. Encuentre el polinomio lineal por mínimos cuadrados mediante

$$\ln R = \ln b + a \ln W.$$

b. Calcule el error relacionado con la aproximación en la parte a):

$$E = \sum_{i=1}^{37} (R_i - bW_i^a)^2.$$

c. Modifique la ecuación logarítmica de mínimos cuadrados en la parte a) al sumar el término cuadrático $c(\ln W_i)^2$ y determine el polinomio logarítmico por mínimos cuadrados.

d. Determine la fórmula y calcule el error relacionado con la aproximación en la parte c).

W	R	W	R	W	R	W	R	W	R
0.017	0.154	0.025	0.23	0.020	0.181	0.020	0.180	0.025	0.234
0.087	0.296	0.111	0.357	0.085	0.260	0.119	0.299	0.233	0.537
0.174	0.363	0.211	0.366	0.171	0.334	0.210	0.428	0.783	1.47
1.11	0.531	0.999	0.771	1.29	0.87	1.32	1.15	1.35	2.48
1.74	2.23	3.02	2.01	3.04	3.59	3.34	2.83	1.69	1.44
4.09	3.58	4.28	3.28	4.29	3.40	5.48	4.15	2.75	1.84
5.45	3.52	4.58	2.96	5.30	3.88			4.83	4.66
5.96	2.40	4.68	5.10					5.53	6.94

EJERCICIOS TEÓRICOS

14. Muestre que las ecuaciones normales (8.3) que resultan de la aproximación discreta por mínimos cuadrados producen una matriz simétrica y no singular y, por tanto, tienen una solución única. [*Sugerencia*: Si $A = (a_{ij})$, donde

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} x_k^{i+j-2}$$

y $x_1, x_2, \ldots, x_m$ son distintos con $n < m - 1$. Suponga que A es singular y que $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ es tal que $\mathbf{c}^t A\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Muestre que el polinomio de enésimo grado cuyos coeficientes son las coordenadas de $\mathbf{c}$ tiene más de n raíces y utilícelas para establecer una contradicción.]

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Uno o dos valores atípicos pueden desviar en gran medida los resultados de un análisis de mínimos cuadrados. ¿Por qué sucede esto?

2. ¿Cómo podemos manejar los valores atípicos para garantizar que los resultados del análisis de mínimos cuadrados son válidos?

3. Existen dos tipos diferentes de error de redondeo (de corte y de redondeo) que existe al utilizar una computadora o calculadora. Analice cómo afecta cada uno la aproximación polinomial lineal por mínimos cuadrados.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.2

1. Encuentre la aproximación polinomial lineal por mínimos cuadrados para $f(x)$ en el intervalo indicado si

a. $f(x) = x^2 + 3x + 2, \quad [0, 1];$

b. $f(x) = x^3, \quad [0, 2];$

c. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad [1, 3];$

d. $f(x) = e^x, \quad [0, 2];$

e. $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{1}{3}\operatorname{sen} 2x, \quad [0, 1];$

f. $f(x) = x \ln x, \quad [1, 3].$

2. Encuentre la aproximación polinomial lineal por mínimos cuadrados en el intervalo $[-1, 1]$ para las siguientes funciones.

a. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ **b.** $f(x) = x^3$

c. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ **d.** $f(x) = e^x$

e. $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{1}{3}\operatorname{sen} 2x$ **f.** $f(x) = \ln(x+2)$

3. Encuentre la aproximación polinomial por mínimos cuadrados de grado 2 para las funciones y los intervalos en el ejercicio 1.

4. Encuentre la aproximación polinomial por mínimos cuadrados de grado 2 en el intervalo $[-1, 1]$ para las funciones en el ejercicio 3.

5. Calcule el error E para las aproximaciones en el ejercicio 3.

6. Calcule el error E para las aproximaciones en el ejercicio 4.

7. Utilice el proceso Gram-Schmidt para construir $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x)$ y $\phi_3(x)$ para los siguientes intervalos.

a. $[0, 1]$ **b.** $[0, 2]$ **c.** $[1, 3]$

8. Repita el ejercicio 1 con los resultados del ejercicio 7.

9. Obtenga el polinomio de aproximación por mínimos cuadrados de grado 3 para las funciones en el ejercicio 1 por medio de los resultados del ejercicio 7.

10. Repita el ejercicio 3 con los resultados del ejercicio 7.

11. Utilice el procedimiento Gram-Schmidt para calcular L_1, L_2 y L_3, donde $\{L_0(x), L_1(x), L_2(x), L_3(x)\}$ es un conjunto ortogonal de polinomios en $(0, \infty)$ respecto a las funciones de peso $w(x) = e^{-x}$ y $L_0(x) \equiv 1$. Los polinomios obtenidos a partir de este procedimiento reciben el nombre de **polinomios de Laguerre**.

12. Utilice los polinomios de Laguerre calculados en el ejercicio 11 para calcular los polinomios de mínimos cuadrados de grado 1, 2 y 3 en el intervalo $(0, \infty)$ respecto a la función de peso $w(x) = e^{-x}$ para las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^2$ **b.** $f(x) = e^{-x}$ **c.** $f(x) = x^3$ **d.** $f(x) = e^{-2x}$

EJERCICIOS TEÓRICOS

13. Suponga que $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ es cualquier conjunto linealmente independiente en $\prod_n$. Muestre que para cualquier elemento $Q \in \prod_n$, existen constantes únicas $c_0, c_1, \ldots, c_n$, tales que

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k(x).$$

14. Muestre que si $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ es un conjunto ortogonal de funciones en $[a, b]$ respecto a la función de peso w, entonces $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ es un conjunto linealmente independiente.

15. Muestre que las ecuaciones normales (8.6) tienen una solución única. [*Sugerencia*: Muestre que la única solución para la función $f(x) \equiv 0$ es $a_j = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Multiplique la ecuación (8.6) por a_j y sume sobre todas las j. Intercambie el signo de la integral y sumatoria para obtener $\int_a^b [P(x)]^2 dx = 0$. Por lo tanto, $P(x) \equiv 0$, por lo que $a_j = 0$, para $j = 0, \ldots, n$. Por lo tanto la matriz de coeficientes es no singular y existe una única solución para la ecuación (8.6)].

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Existen dos tipos diferentes de error (de corte y de redondeo) que existen al usar una computadora o calculadora. Analice cómo afecta cada uno la aproximación polinomial por mínimos cuadrados.

2. A través de ortogonalidad, ¿se resuelve el problema de error de redondeo?

3. Analice por lo menos una desventaja de utilizar la aproximación por mínimos cuadrados.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.3

1. Utilice los ceros de $\tilde{T}_3$ para construir un polinomio de interpolación de grado 2 para las siguientes funciones en el intervalo $[-1, 1]$.

   a. $f(x) = e^x$ **b.** $f(x) = \text{sen}\, x$ **c.** $f(x) = \ln(x+2)$ **d.** $f(x) = x^4$

2. Utilice los ceros de $\tilde{T}_4$ para construir un polinomio de interpolación de grado 3 para las funciones en el ejercicio 1.
3. Encuentre una cota para el error máximo de la aproximación en el ejercicio 1 en el intervalo $[-1, 1]$.
4. Repita el ejercicio 3 para las aproximaciones calculadas en el ejercicio 3.
5. Utilice los ceros de $\tilde{T}_3$ y transformaciones del intervalo provisto para construir un polinomio de interpolación de grado 2 para las siguientes funciones.

   a. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad [1, 3]$ **b.** $f(x) = e^{-x}, \quad [0, 2]$

   c. $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{1}{3}\,\text{sen}\, 2x, \quad [0, 1]$ **d.** $f(x) = x \ln x, \quad [1, 3]$

6. Encuentre el sexto polinomio de Maclaurin para xe^x y utilice economización de Chebyshev para obtener una aproximación polinomial de menor grado mientras se mantiene el error menor a 0.01 en $[-1, 1]$.
7. Encuentre el sexto polinomio de Maclaurin para sen x y utilice economización de Chebyshev para obtener una aproximación polinomial de menor grado mientras se mantiene el error menor a 0.01 en $[-1, 1]$.

EJERCICIOS APLICADOS

8. Los polinomios de Chebyshev $T_n(x)$ son soluciones para las ecuaciones diferenciales $(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Verifique este hecho para $n = 0, 1, 2, 3$.
9. Un hecho interesante es que $T_n(x)$ es igual al determinante de la matriz tridiagonal n por n

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2x \end{bmatrix}.$$

   Verifique este hecho para $n = 1, 2, 3$.

EJERCICIOS TEÓRICOS

10. Muestre que para cualquier entero positivo i y j con $i > j$, se tiene $T_i(x)T_j(x) = \frac{1}{2}[T_{i+j}(x) + T_{i-j}(x)]$.
11. Muestre que para cada polinomio de Chebyshev $T_n(x)$, se tiene

$$\int_{-1}^{1} \frac{[T_n(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

12. Muestre que para cada n, el polinomio de Chebyshev $T_n(x)$ tiene n ceros diferentes en $(-1, 1)$.
13. Muestre que para cada n, la derivada del polinomio de Chebyshev $T_n(x)$ tiene $n - 1$ ceros diferentes en $(-1, 1)$.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Al utilizar los ceros de los polinomios de Chebyshev como nodos para interpolación, ¿se introducen o se resuelven problemas de error de redondeo?
2. ¿La economización de Chebyshev se puede utilizar para reducir el grado de un polinomio de aproximación por mínimos cuadrados? Analice los pros y los contras.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.4

1. Determine todas las aproximaciones de Padé de grado 2 para $f(x) = e^{2x}$. Compare los resultados en $x_i = 0.2i$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, con los valores reales $f(x_i)$.
2. Determine todas las aproximaciones de Padé de grado 3 para $f(x) = x\ln(x+1)$. Compare los resultados en $x_i = 0.2i$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, con los valores reales $f(x_i)$.
3. Determine la aproximación de grado 5 con $n = 2$ y $m = 3$ para $f(x) = e^x$. Compare los resultados en $x_i = 0.2i$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, con los del quinto polinomio de Maclaurin.
4. Repita el ejercicio 3 por medio de la aproximación de Padé de grado 5 con $n = 3$ y $m = 2$. Compare los resultados en cada x_i con los calculados en el ejercicio 3.
5. Determine las aproximaciones de Padé de grado 5 con $n = m = 3$ para $f(x) = \text{sen}\, x$. Compare los resultados en $x_i = 0.1i$, para $i = 0, 1, \ldots, 5$, con los resultados exactos y con los resultados del sexto polinomio de Maclaurin.
6. Determine las aproximaciones de grado 4 con a) $n = 2, m = 4$ y b) $n = 4, m = 2$, para $f(x) = \text{sen}\, x$. Compare los resultados en cada x_i con los obtenidos en el ejercicio 5.
7. La tabla 8.10 enumera los resultados de la aproximación de Padé de grado 5 con $n = 3$ y $m = 2$, el quinto polinomio de Maclaurin y los valores exactos de $f(x) = e^{-x}$ cuando $x_i = 0.2i$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Compare estos resultados con los producidos a partir de las aproximaciones de Padé de grado 5.

   a. $n = 0, m = 5$ **b.** $n = 1, m = 4$ **c.** $n = 3, m = 2$ **d.** $n = 4, m = 1$

8. Exprese las siguientes funciones racionales en forma de fracción continuada:

   a. $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x + 1}$ **b.** $\dfrac{4x^2 + 3x - 7}{2x^3 + x^2 - x + 5}$

   c. $\dfrac{2x^3 - 3x^2 + 4x - 5}{x^2 + 2x + 4}$ **d.** $\dfrac{2x^3 + x^2 - x + 3}{3x^3 + 2x^2 - x + 1}$

9. Encuentre todas las aproximaciones racionales de Chebyshev de grado 2 para $f(x) = e^{-x}$. ¿Cuál da la mejor aproximación para $f(x) = e^{-x}$ en $x = 0.25, 0.5$ y 1?
10. Encuentre todas las aproximaciones racionales de Chebyshev de grado 3 para $f(x) = \cos x$. ¿Cuál da la mejor aproximación para $f(x) = \cos x$ en $x = \pi/4$ y $\pi/3$?
11. Encuentre la aproximación racional de Chebyshev de grado 4 con $n = m = 2$ para $f(x) = \text{sen}\, x$. Compare los resultados en $x_i = 0.1i$, para $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, a partir de esta aproximación con los obtenidos en el ejercicio 5 a través de la aproximación de Padé de grado 6.
12. Encuentre todas las aproximaciones racionales de Chebyshev de grado 5 para $f(x) = e^x$. Compare los resultados en $x_i = 0.2i$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, con los obtenidos en los ejercicios 3 y 4.

EJERCICIOS APLICADOS

13. Para aproximar con exactitud $f(x) = e^x$ para su inclusión en una biblioteca matemática, primero restringimos el dominio de f. Dado un número real x, divídalo entre $\ln\sqrt{10}$ para obtener la relación

$$x = M \cdot \ln\sqrt{10} + s,$$

donde M es un entero y s es un número real que satisface $|s| \leq \frac{1}{2}\ln\sqrt{10}$.

   a. Muestre que $e^x = e^s \cdot 10^{M/2}$.

   b. Construya una aproximación de función racional para e^s mediante $n = m = 3$. Calcule el error cuando $0 \leq |s| \leq \frac{1}{2}\ln\sqrt{10}$.

   c. Diseñe una implementación de e^x por medio de los resultados de las partes a) y b) y las aproximaciones

$$\frac{1}{\ln\sqrt{10}} = 0.8685889638 \quad \text{y} \quad \sqrt{10} = 3.162277660.$$

14. Para aproximar con exactitud sen x y cos x para inclusión en una biblioteca matemática, primero restrinja sus dominios. Dado un número real x, divida entre π para obtener la relación

$$|x| = M\pi + s, \quad \text{donde } M \text{ es un entero y } |s| \le \frac{\pi}{2}.$$

a. Muestre que sen $x = \operatorname{sgn}(x) \cdot (-1)^M \cdot \operatorname{sen} s$.

b. Construya una aproximación racional para sen s por medio de $n = m = 4$. Calcule el error cuando $0 \le |s| \le \pi/2$.

c. Diseñe una implementación de x por medio de los resultados de las partes a) y b).

d. Repita la parte c) para cos x mediante el hecho de que $\cos x = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. En esta sección analizamos la técnica de aproximación de Padé. Compare esta técnica con la de aproximación de Chisholm.

2. ¿Se puede aplicar una técnica de aproximación de Padé a una función armónica de valor complejo en el disco unidad?

3. ¿Qué es la interpolación baricéntrica tipo Padé y cómo se usa en sentido de mínimos cuadrados?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.5

1. Encuentre el polinomio trigonométrico de mínimos cuadrados continuos $S_2(x)$ para $f(x) = x^2$ en $[-\pi, \pi]$.

2. Encuentre el polinomio trigonométrico de mínimos cuadrados continuos $S_n(x)$ para $f(x) = x$ en $[-\pi, \pi]$.

3. Encuentre el polinomio trigonométrico de mínimos cuadrados continuos $S_3(x)$ para $f(x) = e^x$ en $[-\pi, \pi]$.

4. Encuentre el polinomio general trigonométrico de mínimos cuadrados continuos $S_n(x)$ para $f(x) = e^x$ en $[-\pi, \pi]$.

5. Encuentre el polinomio general trigonométrico de mínimos cuadrados continuos $S_n(x)$ para

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x \le 0, \\ 1, & \text{si } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

6. Encuentre el polinomio general trigonométrico de mínimos cuadrados continuos $S_n(x)$ para

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si} -\pi < x < 0. \\ 1, & \text{si } 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

7. Determine el polinomio trigonométrico de mínimos cuadrados discretos $S_n(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ para las siguientes funciones, por medio de los valores dados de m y n:

a. $f(x) = \cos 2x, \; m = 4, n = 2$

b. $f(x) = \cos 3x, \; m = 4, n = 2$

c. $f(x) = \operatorname{sen} \frac{x}{2} + 2\cos \frac{x}{3}, \; m = 6, n = 3$

d. $f(x) = x^2 \cos x, \; m = 6, n = 3$

8. Calcule el error $E(S_n)$ para cada una de las funciones del ejercicio 7.

9. Determine el polinomio trigonométrico de mínimos cuadrados discretos $S_3(x)$, por medio de $m = 4$ para $f(x) = e^x \cos 2x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Calcule el error $E(S_3)$.

10. Repita el ejercicio 9, con $m = 8$. Compare los valores de los polinomios de aproximación con los valores de f en los puntos $\xi_j = -\pi + 0.2j\pi$, para $0 \le j \le 10$. ¿Qué aproximación es mejor?

11. Si $f(x) = 2\tan x - \sec 2x$, para $2 \le x \le 4$. Determine los polinomios trigonométricos de mínimos cuadrados discretos $S_n(x)$, usando los valores de n y m como sigue y calcule el error en cada caso.

a. $n = 3, \quad m = 6$

b. $n = 4, \quad m = 6$

12. **a.** Determine el polinomio trigonométrico de mínimos cuadrados discretos $S_4(x)$ $m = 16$, para $f(x) = x^2$ sen x en el intervalo $[0, 1]$.

b. Calcule $\int_0^1 S_4(x)\, dx$.

c. Compare la integral en la parte b) $\int_0^1 x^2 \text{ sen } x\, dx$.

EJERCICIOS APLICADOS

13. La tabla lista los Promedios Industriales Dow Jones de cierre (DJIA) del primer día que abre el mercado para los meses de marzo de 2013 a junio de 2014.

Entrada	Mes	Año	DJIA
0	Marzo	2013	14090
1	Abril	2013	14573
2	Mayo	2013	14701
3	Junio	2013	15254
4	Julio	2013	14975
5	Agosto	2013	15628
6	Septiembre	2013	14834
7	Octubre	2013	15193
8	Noviembre	2013	15616
9	Diciembre	2013	16009
10	Enero	2014	16441
11	Febrero	2014	15373
12	Marzo	2014	16168
13	Abril	2014	16533
14	Mayo	2014	16559
15	Junio	2014	16744

a. Construya el polinomio trigonométrico de mínimos cuadrados discretos de grado 4 para los datos anteriores.

b. Aproxime los promedios de cierre el 8 de abril de 2013 y el 8 de abril de 2014 mediante el polinomio construido en la parte a).

c. El cierre en los días provistos en la parte b) fueron 14 613 y 16 256. En general, ¿Qué tan bien cree que este polinomio puede predecir los promedios de cierre?

d. Aproxime el cierre para 17 de junio de 2014. El cierre real fue 166 808. ¿Esta predicción fue útil?

14. La temperatura $u(x, t)$ en una barra de plata de longitud $L = 10$ cm, densidad $\rho = 10.6\dfrac{\text{gm}}{\text{cm}^3}$, conductividad térmica $K = 1.04\dfrac{\text{cal}}{\text{cm} * \text{deg} * \text{s}}$, y calor específico $\sigma = 0.056\dfrac{\text{cal}}{\text{gm} * \text{deg}}$ que está literalmente aislado y cuyos extremos se mantienen en $0°$C está regida por la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) = \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t$$

con condiciones de frontera $u(0, t) = 0$ y $u(L, t) = 0$ y condición inicial $u(x, 0) = f(x) = 10x - x^2$. La solución del problema está dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-\frac{\beta^2 n^2 \pi^2}{L^2}t\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

donde $\beta = \frac{K}{\rho\sigma}$ y los coeficientes provienen de la serie senoidal de Fourier $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ para $f(x)$ donde $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$.

a. Encuentre los cuatro términos diferentes de cero de la serie senoidal de Fourier de $f(x) = 10x - x^2$.

b. Compare f(x) con los primeros cuatro términos diferentes a cero de $a_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{10}\right) + a_2 \operatorname{sen}\left(2\frac{\pi x}{10}\right) + a_3 \operatorname{sen}\left(3\frac{\pi x}{10}\right) + a_4 \operatorname{sen}\left(4\frac{\pi x}{10}\right) + \cdots$ para $x = 3, 6, 9$.

c. Encuentre los primeros cuatro términos diferentes de cero de $u(x, t)$.

d. Aproxime $u(9, 0.5)$, $u(6, 0.75)$, $u(3, 1)$ usando la parte c).

EJERCICIOS TEÓRICOS

15. Muestre que para cualquier función impar continua f definida en el intervalo $[-a, a]$, se tiene $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

16. Muestre que para cualquier función par continua f definida en el intervalo $[-a, a]$, se tiene $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

17. Muestre que las funciones $\phi_0(x) = 1/2, \phi_1(x) = \cos x, \ldots, \phi_n(x) = \cos nx, \phi_{n+1}(x) = \operatorname{sen} x, \ldots, \phi_{2n-1}(x) = \operatorname{sen}(n-1)x$ son ortogonales en $[-\pi, \pi]$ respecto a $w(x) \equiv 1$.

18. En el ejemplo 1, se determinó la serie de Fourier para $f(x) = |x|$. Utilice esta serie y la suposición de que f está representa en cero para encontrar el valor de la serie infinita convergente $\sum_{k=0}^{\infty}(1/(2k+1)^2)$.

19. Muestre que la forma de las constantes a_k para $k = 0, \ldots, n$ en el teorema 8.13 es correcta de acuerdo con lo establecido.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Algunas veces, los problemas de procesamiento de señales implican la aproximación de una función conocida únicamente en algunos puntos medidos mediante un polinomio trigonométrico. Es posible usar una técnica llamada Fourier ventaneada en esta aproximación. Analice lo que significa.

2. Analice el uso de la serie de Fourier en la solución de ecuaciones diferenciales parciales.

3. ¿En qué condiciones converge la serie de Fourier con la función que representa?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 8.6

1. Determine el polinomio de interpolación trigonométrico $S_2(x)$ de grado 2 en $[-\pi, \pi]$ para las siguientes funciones y grafique $f(x) - S_2(x)$:

a. $f(x) = \pi(x - \pi)$

b. $f(x) = x(\pi - x)$

c. $f(x) = |x|$

d. $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x \le 0 \\ 1, & 0 < x \le \pi \end{cases}$

2. Determine el polinomio de interpolación trigonométrico de grado 4 para $f(x) = x(\pi - x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ mediante:

a. Cálculo directo;

b. El algoritmo de la transformada rápida de Fourier

3. Utilice el algoritmo de la transformada rápida de Fourier para el polinomio de interpolación trigonométrica de grado 4 en $[-\pi, \pi]$ para las siguientes funciones.

a. $f(x) = \pi(x - \pi)$

b. $f(x) = |x|$

c. $f(x) = \cos \pi x - 2 \operatorname{sen} \pi x$

d. $f(x) = x \cos x^2 + e^x \cos e^x$

4. **a.** Determine el polinomio de interpolación trigonométrica $S_4(x)$ para $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, 1]$.

b. Calcule $\int_0^1 S_4(x)\,dx$.

c. Compare la integral en la parte b) con $\int_0^1 x^2 \operatorname{sen} x\,dx$.

5. Utilice las aproximaciones obtenidas en el ejercicio 3 para las siguientes integrales y compare sus resultados con los valores reales.

a. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \pi(x - \pi)\,dx$

b. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx$

c. $\int_{-\pi}^{\pi} (\cos \pi x - 2 \operatorname{sen} \pi x)\, dx$ **d.** $\int_{-\pi}^{\pi} (x \cos x^2 + e^x \cos e^x)\, dx$

6. Utilice el algoritmo de la transformada rápida de Fourier para determinar el polinomio de interpolación trigonométrica de grado 16 para $f(x) = x^2 \cos x$ en $[-\pi, \pi]$.

7. Utilice el algoritmo de la transformada rápida de Fourier para determinar el polinomio de interpolación trigonométrica de grado 64 para $f(x) = x^2 \cos x$ en $[-\pi, \pi]$.

EJERCICIOS APLICADOS

8. Los siguientes datos representan las temperaturas para dos días consecutivos en el Aeropuerto Regional Youngston-Warren.

Hora	6 am	7 am	8 am	9 am	10 am	11 am	12 pm	1 pm	2 pm	3 pm	4 pm	5 pm	6 pm	7 pm	8 pm	9 pm
17 de junio	71	71	72	75	78	81	82	83	85	85	85	85	84	83	83	80
18 de junio	68	69	70	72	74	77	78	79	81	81	84	81	79	78	77	75

a. Utilice el algoritmo de la transformada rápida de Fourier para construir el polinomio de interpolación trigonométrica para los datos del 17 de junio.

b. Grafique el polinomio y los datos para el 18 de junio en el mismo. ¿Parece que el polinomio se podría usar de cualquier forma para predecir las temperaturas del 18 de junio cuando la temperatura de las 6:00 am es 68?

9. La tabla lista los Promedios Industriales Dow Jones de cierre (DJIA) del primer día que abre el mercado para los meses de marzo de 2013 a junio de 2014.

Entrada	Mes	Año	DJIA
0	Marzo	2013	14090
1	Abril	2013	14573
2	Mayo	2013	14701
3	Junio	2013	15254
4	Julio	2013	14975
5	Agosto	2013	15628
6	Septiembre	2013	14834
7	Octubre	2013	15193
8	Noviembre	2013	15616
9	Diciembre	2013	16009
10	Enero	2014	16441
11	Febrero	2014	15373
12	Marzo	2014	16168
13	Abril	2014	16533
14	Mayo	2014	16559
15	Junio	2014	16744

a. Construya el polinomio trigonométrico de interpolación mediante el algoritmo de la transformada rápida de Fourier para los datos anteriores.

b. Aproxime los promedios de cierre el 8 de abril de 2013 y el 8 de abril de 2014 mediante el polinomio de interpolación construido en la parte a).

c. El cierre en los días dados en la parte b) fueron 14 613 y 16 256. En general, ¿qué tan bien cree que este polinomio puede predecir los promedios de cierre?

d. Aproxime el cierre para 17 de junio de 2014. El cierre real fue 166808. ¿Esta predicción fue útil?

EJERCICIOS TEÓRICOS

10. Utilice una identidad trigonométrica para mostrar que $\sum_{j=0}^{2m-1}(\cos mx_j)^2 = 2m$.

11. Muestre que $c_0, \ldots, c_{2m-1}$ en el algoritmo 8.3 están determinados por

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{2m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta & \zeta^2 & \cdots & \zeta^{2m-1} \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \cdots & \zeta^{4m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \zeta^{2m-1} & \zeta^{4m-2} & \cdots & \zeta^{(2m-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{2m-1} \end{bmatrix},$$

donde $\zeta = e^{\pi i/m}$.

12. En el análisis precedente al algoritmo 8.3, se explicó un ejemplo para $m = 4$. Defina los vectores $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ y $\mathbf{y}$ como

$$\mathbf{c} = (c_0, \ldots, c_7)^t,\ \mathbf{d} = (d_0, \ldots, d_7)^t,\ \mathbf{e} = (e_0, \ldots, e_7)^t,\ \mathbf{f} = (f_0, \ldots, f_7)^t,\ \mathbf{y} = (y_0, \ldots, y_7)^t.$$

Encuentre las matrices A, B, C y D de tal forma que $\mathbf{c} = A\mathbf{d}$, $\mathbf{d} = B\mathbf{e}$, $\mathbf{e} = C\mathbf{f}$, y $\mathbf{f} = D\mathbf{y}$.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. La transformada rápida de Fourier es un tema muy importante en el procesamiento de señales digitales. ¿Porqué lo es?

2. Funcionalmente, la transformada rápida de Fourier descompone conjuntos de datos en una serie de conjuntos más pequeños. Explique cómo se realiza esto.

3. ¿Las transformadas rápidas de Fourier están limitadas a tamaños de potencias de dos?

PREGUNTAS DE ANÁLISIS (FINAL DEL CAPÍTULO)

1. FFTSS es una biblioteca para la transformada rápida de Fourier. Analice esta biblioteca.

2. Describa la biblioteca para la transformada rápida de Fourier de código abierto FFTW. Analice esta biblioteca.

3. Describa cómo se puede implementar la transformada rápida de Fourier en Excel.

CONCEPTOS CLAVE

Aproximación
Aproximación de Padé
Conjunto ortogonal de funciones
Desviación absoluta
Ecuaciones normales
Error de aproximación
Fracción continuada
Función de peso
Función racional de Chebyshev
Gram-Schmidt
Linealmente dependiente
Linealmente independiente
Minimax
Mínimos cuadrados lineales
Mínimos cuadrados polinomiales
Ortonormal
Polinomio de Legendre
Polinomio mónico
Polinomios de Chebyshev
Polinomios trigonométricos
Serie de Fourier
Transformada de Fourier
Transformada rápida de Fourier

REVISIÓN DEL CAPÍTULO

En este capítulo consideramos datos y funciones de aproximación con funciones fundamentales. Las funciones fundamentales que se usaron fueron polinomios, funciones racionales y polinomios trigonométricos. Consideramos dos tipos de aproximaciones: discretas y continuas. Las discretas surgen cuando se aproxima un conjunto definido de datos con una función fundamental. Las continuas se utilizan cuando se conoce la función que se va a aproximar.

Las técnicas de mínimos cuadrados discretos se recomiendan cuando la función se especifica por medio de un conjunto determinado de datos que no representa exactamente la función. Los mínimos cuadrados ajustados a los datos pueden tomar la forma de una aproximación polinomial lineal u otra o, incluso, una exponencial. Estas aproximaciones se calculan al resolver conjuntos de ecuaciones normales, como se establece en la sección 8.1.

Si los datos son periódicos, puede ser adecuado un ajuste de mínimos cuadrados trigonométricos. Debido a la ortonormalidad de las funciones básicas trigonométricas, la aproximación de mínimos cuadrados trigonométricos no requiere la solución de un sistema lineal. Para grandes cantidades de datos periódicos también se recomienda la interpolación mediante polinomios trigonométricos. Un método eficiente del cálculo del polinomio de interpolación trigonométrica se da mediante la transformada rápida de Fourier.

Cuando la función que se va a aproximar se puede evaluar en cualquier argumento requerido, las aproximaciones buscan minimizar una integral en lugar de una suma. Las aproximaciones de polinomios de mínimos cuadrados continuos se consideraron en la sección 8.2. El cálculo eficiente de los polinomios de mínimos cuadrados conducen a conjuntos ortonormales de polinomios, como los de Legendre y Chebyshev. La aproximación por medio de funciones racionales se estudió en la sección 8.4, junto con la aproximación de Padé como una generalización del polinomio de Maclaurin y se presentó su extensión para la aproximación racional de Chebyshev. Ambas permiten un método de aproximación más uniforme que los polinomios. La aproximación de mínimos cuadrados continuos mediante funciones trigonométricas se analizó en la sección 8.5, en especial porque se relaciona con la serie de Fourier.

Para más información sobre la teoría general de aproximación, consulte Powell [Pow], Davis [Da] o Cheney [Ch]. Una buena referencia para métodos de mínimos cuadrados es Lawson y Hanson [LH] e información sobre las transformadas de Fourier puede encontrarse en Van Loan [Van] y en Briggs y Hanson [BH].