Capítulo 7

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.1

1. Encuentre las normas l_∞ y l_2 de los vectores.

a. $\mathbf{x} = (3, -4, 0, \frac{3}{2})^t$
b. $\mathbf{x} = (2, 1, -3, 4)^t$
c. $\mathbf{x} = (\operatorname{sen} k, \cos k, 2^k)^t$ para un entero positivo fijo k
d. $\mathbf{x} = (4/(k+1), 2/k^2, k^2e^{-k})^t$ para un entero positivo fijo k

2. Encuentre las normas l_∞ y l_2 de los vectores.

a. $\mathbf{x} = (2, -2, 1)^t$
b. $\mathbf{x} = (-4/5, -2/5, 1/5, 2/5)^t$
c. $\mathbf{x} = ((2+k)/k, 1/\sqrt{k}, -3)^t$ para un entero positivo fijo k
d. $\mathbf{x} = ((3k+1)/(2k), 2, 0, 1/k)^t$ para un entero positivo fijo k

3. Pruebe que las siguientes sucesiones son convergentes y encuentre sus límites.

a. $\mathbf{x}^{(k)} = (1/k, e^{1-k}, -2/k^2)^t$
b. $\mathbf{x}^{(k)} = \left(e^{-k}\cos k, k \operatorname{sen}(1/k), 3 + k^{-2}\right)^t$
c. $\mathbf{x}^{(k)} = (ke^{-k^2}, (\cos k)/k, \sqrt{k^2+k} - k)^t$
d. $\mathbf{x}^{(k)} = (e^{1/k}, (k^2+1)/(1-k^2), (1/k^2)(1+3+5+\cdots+(2k-1)))^t$

4. Pruebe que las siguientes sucesiones son convergentes y encuentre sus límites.

a. $\mathbf{x}^{(k)} = (2+1/k, -2+1/k, 1+1/k^2)^t$
b. $\mathbf{x}^{(k)} = ((2+k)/k, k/(2+k), (2k+1)/k)^t$
c. $\mathbf{x}^{(k)} = ((3k+1)/k^2, (1/k)\ln k, k^2e^{-k}, 2k/(1+2k))^t$
d. $\mathbf{x}^{(k)} = \left(\frac{\cos k}{k}, \frac{\operatorname{sen} k}{k}, \frac{1-k}{k^2+1}, \frac{3k-2}{4k+1}\right)^t$

5. Encuentre la norma l_∞ de las matrices.

a. $\begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 15 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 7 \\ -1 & 4 & 0 \\ -7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

6. Encuentre la norma l_∞ de las matrices.

a. $\begin{bmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 11 & -11 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \pi & -1 & 2 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

7. Los siguientes sistemas lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tienen x como la solución real y $\tilde{\mathbf{x}}$ como una solución aproximada. Calcule $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty$ y $\|A\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_\infty$.

a. $$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = \frac{1}{63},$$
$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 = \frac{1}{168},$$
$$\mathbf{x} = \left(\frac{1}{7}, -\frac{1}{6}\right)^t,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (0.142, -0.166)^t.$$

b. $$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1,$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1,$$
$$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2,$$
$$\mathbf{x} = (0, -7, 5)^t,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (-0.33, -7.9, 5.8)^t.$$

c. $$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1,$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1,$$
$$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2,$$
$$\mathbf{x} = (0, -7, 5)^t,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (-0.2, -7.5, 5.4)^t.$$

d. $$0.04x_1 + 0.01x_2 - 0.01x_3 = 0.06,$$
$$0.2x_1 + 0.5x_2 - 0.2x_3 = 0.3,$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11,$$
$$\mathbf{x} = (1.827586, 0.6551724, 1.965517)^t,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (1.8, 0.64, 1.9)^t.$$

8. Los siguientes sistemas lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tienen x como la solución real y $\tilde{\mathbf{x}}$ como una solución aproximada. Calcule $\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty$ y $\|A\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_\infty$.

a. $$3.9x_1 + 1.5x_2 = 5.4,$$
$$6.8x_1 - 2.9x_2 = 3.9,$$
$$\mathbf{x} = (1, 1)^t,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (0.98, 1.02)^t.$$

b. $$x_1 + 2x_2 = 3,$$
$$1.001x_1 - x_2 = 0.001,$$
$$\mathbf{x} = (1, 1)^t,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (1.02, 0.98)^t.$$

c. $$x_1 + x_2 + x_3 = 2\pi,$$
$$-x_1 + x_2 - x_3 = 0,$$
$$x_1 + x_3 = \pi,$$
$$\mathbf{x} = (0, \pi, \pi)^t,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (0.1, 3.18, 3.10)^t.$$

d. $$0.04x_1 + 0.01x_2 - 0.01x_3 = 0.0478,$$
$$0.4x_1 + 0.1x_2 - 0.2x_3 = 0.413,$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0.14,$$
$$\mathbf{x} = (1.81, -1.81, 0.65)^t,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (2, -2, 1)^t.$$

EJERCICIOS TEÓRICOS

9. **a.** Verifique que la función $\|\cdot\|_1$, definida en $\mathbb{R}^n$ mediante

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

es una norma en $\mathbb{R}^n$.

b. Encuentre $\|\mathbf{x}\|_1$ para los vectores determinados en el ejercicio 1.

c. Pruebe eso para todas las $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{x}\|_1 \geq \|\mathbf{x}\|_2$.

10. La norma matricial $\|\cdot\|_1$, definida por $\|A\|_1 = \max\limits_{\|\mathbf{x}\|_1=1} \|A\mathbf{x}\|_1$, se puede calcular con la fórmula

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$$

donde la norma vectorial $\|\cdot\|_1$, se define en el ejercicio 9. Encuentre $\|\cdot\|_1$, para las matrices en el ejercicio 5.

11. Muestre con un ejemplo que $\|\cdot\|_\infty$, definida por $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$, no define una norma matricial.

12. Muestre que $\|\cdot\|_{①}$, definida por

$$\|A\|_{①} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

es una norma matricial. Encuentre $\|\cdot\|_{①}$, para las matrices en el ejercicio 5.

13. **a.** La norma de Frobenius (que no es una norma natural) se define para una matriz A $n \times n$ mediante

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

Muestre que $\|\cdot\|_F$ es una norma matricial.

b. Encuentre $\|\cdot\|_F$ para las matrices en el ejercicio 5.

c. Para cualquier matriz A, muestre que $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq n^{1/2}\|A\|_2$.

14. En el ejercicio 13 se definió la norma de Frobenius de una matriz. Muestre que para cualquier matriz A $n \times n$ y vector $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$, $\|A\mathbf{x}\|_2 \leq \|A\|_F \|\mathbf{x}\|_2$.

15. Si S es una matriz definida positiva $n \times n$. Para cualquier $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$ defina $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^t S\mathbf{x})^{1/2}$. Muestre que esto define una norma en $\mathbb{R}^n$. [*Sugerencia*: Utilice la factorización Cholesky para S y muestre que $\mathbf{x}^t S\mathbf{y} = \mathbf{y}^t S\mathbf{x} \leq (\mathbf{x}^t S\mathbf{x})^{1/2}(\mathbf{y}^t S\mathbf{y})^{1/2}$.]

16. Si S es una matriz real y no singular y si $\|\cdot\|$ es cualquier norma en $\mathbb{R}^n$. Defina $\|\cdot\|'$ por $\|\mathbf{x}\|' = \|S\mathbf{x}\|$. Muestre que $\|\cdot\|'$ también es una norma en $\mathbb{R}^n$.

17. Pruebe que si $\|\cdot\|$ es una norma vectorial en $\mathbb{R}^n$, entonces $\|A\| = \text{máx}_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|$ es una norma matricial.

18. El siguiente extracto de *Mathematics Magazine* [Sz] proporciona una forma alternativa de probar la desigualdad de Cauchy-Buniakowsky-Schwarz.

a. Muestre que cuando $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, tenemos

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}} = 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}} - \frac{y_i}{\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right)^{1/2}} \right)^2.$$

b. Utilice el resultado en la parte a) para mostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}.$$

19. Muestre que la desigualdad Cauchy-Buniakowsky-Schwarz se puede extender a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}.$$

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. El análisis del error para problemas relacionados con vectores y matrices implica medir el tamaño de los errores en un vector o matriz. Existen dos tipos comunes de análisis de error que se usan para este propósito. ¿Qué son y cómo se utilizan las normas vectoriales y matriciales?
2. ¿Cuál es la norma espectral y cómo difiere de las normas definidas en esta sección?
3. ¿Qué es una norma p y cómo difiere de las normas definidas en esta sección?
4. ¿Qué es una norma de Frobenius y cómo difiere de las normas definidas en esta sección?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.2

1. Calcule los eigenvalores y eigenvectores asociados de las siguientes matrices.

a. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **c.** $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **e.** $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ **f.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. Calcule los eigenvalores y eigenvectores asociados de las siguientes matrices.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ **c.** $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ **e.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 2 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ **f.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

3. Encuentre los eigenvalores complejos y eigenvectores asociados de las siguientes matrices.

a. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

4. Encuentre los eigenvalores complejos y eigenvectores asociados de las siguientes matrices.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

5. Encuentre el radio espectral para cada matriz en el ejercicio 1.

6. Encuentre el radio espectral para cada matriz en el ejercicio 2.

7. ¿Cuál de las matrices en el ejercicio 1 son convergentes?

8. ¿Cuál de las matrices en el ejercicio 2 son convergentes?

9. Encuentre la norma l_2 para las matrices en el ejercicio 1.

10. Encuentre la norma l_2 para las matrices en el ejercicio 2.

11. Si $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ y $A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 16 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Muestre que A_1 no es convergente, pero que A_2 es convergente.

12. Una matriz A $n \times n$ recibe el nombre de *nilpotente* si existe un entero m con $A^m = O$. Muestre que si λ es un eigenvalor de una matriz nilpotente, entonces $\lambda = 0$.

EJERCICIOS APLICADOS

13. En el ejercicio 11 de la sección 6.3, supusimos que la contribución de un escarabajo hembra de cierto tipo para la población de escarabajos de los años futuros se podía expresar en términos de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix},$$

donde la entrada en la i-ésima fila y la j-ésima columna representa la contribución probabilística de un escarabajo de edad j en la población hembra del siguiente año de edad i.

a. ¿La matriz A tiene algún eigenvalor real? En este caso, determínelo, así como cualquier eigenvector asociado.

b. Si se necesita una muestra de esta especie para propósitos de pruebas de laboratorio que tendría una proporción constante en cada grupo de edad año con año, ¿qué criterios se impondrían en la población inicial para garantizar la satisfacción de este requisito?

14. En el ejercicio 11 de la sección 6.5 se consideró una población de escarabajos hembra, lo cual condujo a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/8 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 \end{bmatrix},$$

donde las entradas a_{ij} denotan la contribución que un solo escarabajo hembra de edad j realizaría a la siguiente población de escarabajos hembra del siguiente año de edad i.

a. Encuentre el polinomio característico de A.

b. Encuentre el radio espectral $\rho(A)$.

c. Dada cualquier población inicial $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$, de escarabajos hembra, ¿qué sucederá al final?

EJERCICIOS TEÓRICOS

15. Muestre que el polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ para la matriz A $n \times n$ es de enésimo grado. [*Sugerencia*: Expanda $\det(A - \lambda I)$ a lo largo de la primera fila y utilice inducción matemática en n.]

16. **a.** Muestre que si A es una matriz $n \times n$, entonces

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_1,$$

donde $\lambda_i, \ldots, \lambda_n$ son los eigenvalores de A. [*Sugerencia*: Considere $p(0)$.]

b. Muestre que A es singular si y sólo si $\lambda = 0$ es un eigenvalor de A.

17. Sea λ un eigenvalor de la matriz A $n \times n$ y $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ un eigenvector asociado.

a. Muestre que λ también es un eigenvalor de A^t.

b. Muestre que para cualquier entero $k \geq 1$, λ^k es un eigenvalor de A^k con eigenvector $\mathbf{x}$.

c. Muestre que si existe A^{-1}, entonces $1/\lambda$ es un eigenvalor de $(A^{-1})^k$ con eigenvector $\mathbf{x}$.

d. Generalice las partes b) y c) para $(A^{-1})^k$ para enteros $k \geq 2$.

e. Dado el polinomio $q(x) = q_0 + q_1 x + \cdots + q_k x^k$, defina $q(A)$ para la matriz $q(A) = q_0 I + q_1 A + \cdots + q_k A^k$. Muestre que $q(\lambda)$ es un eigenvalor de $q(A)$ con eigenvector $\mathbf{x}$.

f. Sea $\alpha \neq \lambda$ dado. Muestre que si $A - \alpha I$ no es singular, entonces $1/(\lambda - \alpha)$ es un eigenvalor de $(A - \alpha I)^{-1}$ con eigenvector $\mathbf{x}$.

18. Muestre que si A es simétrica, entonces $||A||_2 = \rho(A)$.

19. Encuentre las matrices A y B para las que $\rho(A + B) > \rho(A) + \rho(B)$. (Esto muestra que $\rho(A)$ no puede ser una norma matricial.)

20. Muestre que si $||\cdot||$ es una norma natural, entonces $(||A^{-1}||)^{-1} \leq |\lambda| \leq ||A||$ para cualquier eigenvalor λ de la matriz no singular A.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Encuentre una aplicación en la que el eigenvalor de 1 tenga un significado importante.
2. Analice la importancia geométrica del radio espectral relativo para los eigenvalores de una matriz A.
3. ¿En qué circunstancias el radio espectral de una matriz también es un eigenvalor de la matriz?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.3

1. Encuentre las primeras dos iteraciones del método de Jacobi para los siguientes sistemas lineales, por medio de $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$:

a.
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4. \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 \phantom{{}- 2x_3} &= 9, \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 7, \\ -2x_2 + 10x_3 &= 6. \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 10x_1 + 5x_2 &= 6, \\ 5x_1 + 10x_2 - 4x_3 &= 25, \\ -4x_2 + 8x_3 - x_4 &= -11, \\ -x_3 + 5x_4 &= -11. \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 6, \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 6, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 &= 6, \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 &= 6, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 &= 6. \end{aligned}$$

2. Encuentre las primeras dos iteraciones del método de Jacobi para los siguientes sistemas lineales, por medio de $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$:

a.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= 5, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= -4, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 1. \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 &= 4, \\ x_1 - 2x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 &= -4, \\ x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -2, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 &= -1, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1. \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 0, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 \qquad\qquad\qquad &= 5, \\ - x_2 + 4x_3 \qquad\qquad\qquad &= 0, \\ + 4x_4 - x_5 \qquad &= 6, \\ - x_4 + 4x_5 - x_6 &= -2, \\ - x_5 + 4x_6 &= 6. \end{aligned}$$

3. Repita el ejercicio 1 usando el método de Gauss-Siedel.

4. Repita el ejercicio 2 usando el método de Gauss-Siedel.

5. Utilice el método de Jacobi para resolver los sistemas lineales en el ejercicio 1, con $TOL = 10^{-3}$ con la norma l_∞.

6. Utilice el método de Jacobi para resolver los sistemas lineales en el ejercicio 2, con $TOL = 10^{-3}$ con la norma l_∞.

7. Utilice el método de Gauss-Siedel para resolver los sistemas lineales en el ejercicio 1, con $TOL = 10^{-3}$ con la norma l_∞.

8. Utilice el método de Gauss-Siedel para resolver los sistemas lineales en el ejercicio 2, con $TOL = 10^{-3}$ con la norma l_∞.

9. El sistema lineal

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &= -5, \end{aligned}$$

tiene la solución $(1, 2, -1)^t$.

a. Muestre que $\rho(T_j) = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$.

b. Muestre que el método de Jacobi con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ falla al proporcionar una buena aproximación después de 25 iteraciones.

c. Muestre que $\rho(T_g) = \frac{1}{2}$.

d. Utilice el método de Gauss-Siedel con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ para aproximar la solución para el sistema lineal dentro de 10^{-5} con la norma l_∞.

10. El sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

tiene la solución $(1, 2, -1)^t$.

a. Muestre que $\rho(T_j) = 0$.

b. Utilice el método de Jacobi con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ para aproximar la solución para el sistema lineal dentro de 10^{-5} con la norma l_∞.

c. Muestre que $\rho(T_g) = 2$.

d. Muestre que el método de Gauss-Siedel aplicado como en la parte b) no proporciona una buena aproximación después de 25 iteraciones.

11. El sistema lineal

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & - & x_3 & = & 0.2, \\ -\frac{1}{2}x_1 & + & x_2 & - & \frac{1}{4}x_3 & = & -1.425, \\ x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & + & x_3 & = & 2, \end{array}$$

tiene la solución $(0.9, -0.8, 0.7)^t$.

a. ¿La matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

es estrictamente diagonalmente dominante?

b. Calcule el radio espectral de la matriz de Gauss-Siedel T_g.

c. Utilice el método iterativo de Gauss-Siedel para aproximar la solución para el sistema lineal con una tolerancia de 10^{-2} y un máximo de 300 iteraciones.

d. ¿Qué pasa en la parte c) cuando el sistema cambia por el siguiente?

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & - & 2x_3 & = & 0.2, \\ -\frac{1}{2}x_1 & + & x_2 & - & \frac{1}{4}x_3 & = & -1.425, \\ x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & + & x_3 & = & 2. \end{array}$$

12. Repita el ejercicio 11 usando el método de Jacobi.

13. Utilice **a)** el método de Jacobi y **b)** el método de Gauss-Siedel para resolver el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dentro de 10^{-5} con la norma l_∞, donde las entradas de A son

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2i, & \text{cuando } \; j = i \;\text{ y } i = 1, 2, \ldots, 80, \\ 0.5i, & \text{cuando } \begin{cases} j = i + 2 \text{ y } i = 1, 2, \ldots, 78, \\ j = i - 2 \text{ y } i = 3, 4, \ldots, 80, \end{cases} \\ 0.25i, & \text{cuando } \begin{cases} j = i + 4 \text{ y } i = 1, 2, \ldots, 76, \\ j = i - 4 \text{ y } i = 5, 6, \ldots, 80, \end{cases} \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y los de **b** son $b_i = \pi$, para cada $i = 1, 2, \ldots, 80$.

EJERCICIOS APLICADOS

14. Suponga que un objeto puede estar en cualquiera de los $n + 1$ puntos igualmente espaciados $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Cuando un objeto se encuentra en la ubicación x_i, es igualmente probable que se mueva ya sea hacia x_{i-1} o hacia x_{i+1} y no se puede mover directamente hacia cualquier otra ubicación. Considere las probabilidades $\{P_i\}_{i=0}^{n}$ de que un objeto que inicia en la ubicación x_i llegará al extremo izquierdo x_0 antes de llegar al extremo derecho x_n. Claramente, $P_0 = 1$ y $P_n = 0$. Puesto que el objeto se puede mover hacia x_i sólo desde x_{i-1} o x_{i+1} y lo hace con una probabilidad $\frac{1}{2}$ para cada una de estas ubicaciones,

$$P_i = \frac{1}{2}P_{i-1} + \frac{1}{2}P_{i+1}, \quad \text{para cada } \; i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

a. Muestre que

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \ddots & & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b. Resuelva este sistema usando $n = 10, 50$ y 100.

c. Cambie las probabilidades de α y $1 - \alpha$ para movimiento hacia la izquierda y derecha, respectivamente y derive el sistema lineal similar al de la parte a).

d. Repita la parte b) con $\alpha = \frac{1}{3}$.

15. Las fuerzas en un puente peatonal descritas en la apertura de este capítulo satisfacen las ecuaciones en la siguiente tabla:

Unión	Componente horizontal	Componente vertical
①	$-F_1+\frac{\sqrt{2}}{2}f_1+f_2=0$	$\frac{\sqrt{2}}{2}f_1-F_2=0$
②	$-\frac{\sqrt{2}}{2}f_1+\frac{\sqrt{3}}{2}f_4=0$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}f_1-f_3-\frac{1}{2}f_4=0$
③	$-f_2+f_5=0$	$f_3-10000=0$
④	$-\frac{\sqrt{3}}{2}f_4-f_5=0$	$\frac{1}{2}f_4-F_3=0$

Este sistema lineal se puede escribir en la forma matricial

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a. Explique porqué se reordenó el sistema de ecuaciones.

b. Aproxime la solución del sistema lineal resultante dentro de 10^{-2} con la norma l_∞ al utilizar como aproximación inicial el vector cuyas entradas sean 1 con **i)** el método de Jacobi y **ii)** el método de Gaus-Siedel.

16. Un cable coaxial está formado por un conductor interno de 0.1 pulgadas cuadradas y un conductor externo de 0.5 pulgadas cuadradas. El potencial en un punto en la sección transversal del cable se describe mediante la ecuación de Laplace.

Suponga que el conductor interno se mantiene en 0 volts y el conductor externo se mantiene en 110 volts. Aproximar el potencial entre los dos conductores requiere resolver el siguiente sistema lineal. (Consulte el ejercicio 5 de la sección 12.1.)

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{10} \\ w_{11} \\ w_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \\ 110 \\ 110 \\ 220 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 220 \\ 110 \\ 110 \\ 220 \end{bmatrix}.$$

a. ¿La matriz es estrictamente diagonalmente dominante?

b. Resuelva el sistema lineal usando el método de Jacobi con $\mathbf{x}^{(0)}=\mathbf{0}$ y $TOL=10^{-2}$.

c. Repita la parte c) mediante el método de Gauss-Siedel.

EJERCICIOS TEÓRICOS

17. Muestre que si A es estrictamente diagonalmente dominante, entonces $||T_j||_\infty < 1$.

18. **a.** Pruebe que

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \leq \|T\|^k \, \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\| \quad \text{y} \quad \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|,$$

donde T es una matriz $n \times n$ con $\|T\| < 1$ y

$$\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

con $\mathbf{x}^{(0)}$ arbitrario, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, y $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$.

b. Aplique las cotas del ejercicio 1, cuando sea posible, mediante la norma l_∞.

19. Suponga que A es definida positiva.

a. Muestre que podemos escribir $A = D - L - L^t$, donde D es diagonal con $d_{ii} > 0$ para cada $1 \leq i \leq n$ y L es triangular inferior. Además, muestre que $D - L$ es no singular.

b. Si $T_g = (D - L)^{-1}L^t$ y $P = A - T_g^t A T_g$. Muestre que P es simétrica.

c. Muestre que T_g también se puede escribir como $T_g = I - (D - L)^{-1}A$.

d. Si $Q = (D - L)^{-1}A$. Muestre que $T_g = I - Q$ y $P = Q^t[AQ^{-1} - A + (Q^t)^{-1}A]Q$.

e. Muestre que $P = Q^t DQ$ y P es definida positiva.

f. Sea λ un eigenvalor de T_g con eigenvector $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Utilice la parte b) para mostrar que $\mathbf{x}^t P\mathbf{x} > 0$ implica que $|\lambda| < 1$.

g. Muestre que T_g es convergente y prueba que el método de Gauss-Siedel converge.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. El GMRES es un método iterativo que se usa para la resolución de grandes sistemas lineales no simétricos dispersos. Compare ese método con los métodos iterativos analizados en esta sección.

2. ¿Los métodos directos, como la eliminación gaussiana o la factorización LU, son más eficientes que los métodos directos, como Jacobi o Gauss-Siedel, cuando el tamaño del sistema aumenta significativamente?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.4

1. Encuentre las primeras dos iteraciones del método SOR con $\omega = 1.1$ para los siguientes sistemas lineales, usando $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$:

a.
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1,\\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0,\\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4. \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 \phantom{{}- 2x_3} &= 9,\\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 7,\\ -2x_2 + 10x_3 &= 6. \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 10x_1 + 5x_2 &= 6,\\ 5x_1 + 10x_2 - 4x_3 &= 25,\\ -4x_2 + 8x_3 - x_4 &= -11,\\ -x_3 + 5x_4 &= -11. \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 6,\\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 6,\\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 &= 6,\\ -x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 &= 6,\\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 &= 6. \end{aligned}$$

2. Encuentre las primeras dos iteraciones del método SOR con $\omega = 1.1$ para los siguientes sistemas lineales, usando $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$:

a.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= 5,\\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= -4,\\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 1. \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 &= 4,\\ x_1 - 2x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 &= -4,\\ x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -2,\\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 &= -1,\\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0,\\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1. \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 \qquad\qquad\qquad &= 0,\\ -x_1 + 4x_2 - x_3 \qquad\qquad &= 5,\\ - x_2 + 4x_3 \qquad\qquad &= 0,\\ +4x_4 - x_5 \qquad &= 6,\\ - x_4 + 4x_5 - x_6 &= -2,\\ - x_5 + 4x_6 &= 6. \end{aligned}$$

3. Repita el ejercicio 1 usando $\omega = 1.3$.

4. Repita el ejercicio 2 usando $\omega = 1.3$.

5. Utilice el método SOR con $\omega = 1.2$ para resolver los sistemas lineales en el ejercicio 1 con una tolerancia $TOL = 10^{-3}$ con la norma l_∞.

6. Utilice el método SOR con $\omega = 1.2$ para resolver los sistemas lineales en el ejercicio 1 con una tolerancia $TOL = 10^{-3}$ con la norma l_∞.

7. Determine cuáles matrices en el ejercicio 1 son tridiagonales y definidas positivas. Repita el ejercicio 1 para estas matrices a través de la selección óptima de ω.

8. Determine cuáles matrices en el ejercicio 2 son tridiagonales y definidas positivas. Repita el ejercicio 1 para estas matrices a través de la selección óptima de ω.

9. Utilice el método SOR para resolver el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dentro de 10^{-5} con la norma l_∞, donde las entradas de A son

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2i, & \text{cuando } j = i \text{ y } i = 1, 2, \ldots, 80,\\ 0.5i, & \text{cuando } \begin{cases} j = i + 2 \text{ y } i = 1, 2, \ldots, 78,\\ j = i - 2 \text{ y } i = 3, 4, \ldots, 80,\end{cases}\\ 0.25i, & \text{cuando } \begin{cases} j = i + 4 \text{ y } i = 1, 2, \ldots, 76,\\ j = i - 4 \text{ y } i = 5, 6, \ldots, 80,\end{cases}\\ 0, & \text{en otro caso,}\end{cases}$$

y las de $\mathbf{b}$ son $b_i = \pi$, para cada $i = 1, 2, \ldots, 80$.

EJERCICIOS APLICADOS

10. Las fuerzas en los puentes peatonales descritas en la apertura de este capítulo satisfacen las ecuaciones en la siguiente tabla:

Unión	Componente horizontal	Componente vertical
①	$-F_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} f_1 + f_2 = 0$	$\frac{\sqrt{2}}{2} f_1 - F_2 = 0$
②	$-\frac{\sqrt{2}}{2} f_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} f_4 = 0$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} f_1 - f_3 - \frac{1}{2} f_4 = 0$
③	$-f_2 + f_5 = 0$	$f_3 - 10000 = 0$
④	$-\frac{\sqrt{3}}{2} f_4 - f_5 = 0$	$\frac{1}{2} f_4 - F_3 = 0$

Este sistema lineal se puede escribir en forma matricial

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1\\ F_2\\ F_3\\ f_1\\ f_2\\ f_3\\ f_4\\ f_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 10000\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}.$$

a. Explique por qué se reordenó el sistema de ecuaciones.

b. Aproxime la solución del sistema lineal resultante dentro de 10^{-2} con la norma l_∞ usando como aproximación inicial el vector cuyas entradas son números 1 y el método SOR con $\omega = 1.25$.

11. Suponga que un objeto puede estar en cualquiera de los $n + 1$ puntos igualmente espaciados $x_0, x_1, \dots, x_n$. Cuando un objeto se encuentra en la ubicación x_i, es igualmente probable que se mueva ya sea hacia x_{i-1} o hacia x_{i+1} y no se pueda mover directamente hacia cualquier otra ubicación. Considere las probabilidades $\{P_i\}_{i=0}^{n}$ de que un objeto que inicia en la ubicación x_i llegue al extremo izquierdo x_0 antes de llegar al derecho x_n. Claramente, $P_0 = 1$ y $P_n = 0$. Puesto que el objeto se puede mover hacia x_i sólo desde x_{i-1} o x_{i+1} y lo hace con una probabilidad $\frac{1}{2}$ para cada una de estas ubicaciones,

$$P_i = \frac{1}{2}P_{i-1} + \frac{1}{2}P_{i+1}, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

a. Muestre que

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \ddots & & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b. Resuelva este sistema usando $n = 10, 50$ y 100.

c. Cambie las probabilidades de α y $1 - \alpha$ para movimiento hacia la izquierda y hacia la derecha, respectivamente y derive el sistema lineal similar al de la parte a).

d. Repita la parte b) con $\alpha = \frac{1}{3}$.

12. Un cable coaxial está formado por un conductor interno de 0.1 pulgadas cuadradas y uno externo de 0.5 pulgadas cuadradas. El potencial en un punto en la sección transversal del cable se describe con la ecuación de Laplace.

Suponga que el conductor interno se mantiene en 0 volts y que el externo se mantiene en 110 volts. Aproximar el potencial entre los dos conductores requiere resolver el siguiente sistema lineal. (Consulte el ejercicio 7 de la sección 12.1.)

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{10} \\ w_{11} \\ w_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \\ 110 \\ 110 \\ 220 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 220 \\ 110 \\ 110 \\ 220 \end{bmatrix}.$$

a. ¿La matriz es definida positiva?

b. A pesar de que la matriz no es tridiagonal, sea

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(T_j)]^2}}.$$

Aproxime la solución para el sistema lineal usando el método SOR con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ y $TOL = 10^{-2}$.

c. ¿El método SOR supera a los métodos de Jacobi y Gauss-Siedel?

EJERCICIOS TEÓRICOS

13. Pruebe el teorema 7.24 de Kahan. [*Sugerencia*: Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son eigenvalores de T_ω, entonces $\det T_\omega = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$. Puesto que $D^{-1} = \det(D - \omega L)^{-1}$ y el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes de los factores, el resultado sigue la ecuación (7.18).]

14. En el ejercicio 19 de la sección 7.3 se describió una técnica para probar que el método de Gauss-Siedel converge cuando A es una matriz definida positiva. Extienda este método de prueba para mostrar que en este caso también existe convergencia para el método SOR con $0 < \omega < 2$.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. ¿El método de análisis en esta sección se puede aplicar a desigualdades lineales? ¿Por qué sí o por qué no?

2. ¿Por qué seleccionar $x_{i+1}^{(k)}$ para que una coordenada del vector residual sea cero no es necesariamente el método más eficiente para reducir la norma del vector $r_{i+1}^{(k)}$?

3. A menudo, es deseable acelerar (sobre-relajación) o frenar (sub-relajación) los cambios en los valores de la variable dependiente de iteración a iteración. El proceso de sobre-relajación se utiliza con frecuencia junto con el método de Gauss-Siedel. ¿Cuándo se usa el proceso de sub-relajación?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.5

1. Calcule números de condición de las siguientes matrices relativas a $\|\cdot\|_\infty$.

a. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 3.9 & 1.6 \\ 6.8 & 2.9 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.00001 & 2 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 1.003 & 58.09 \\ 5.550 & 321.8 \end{bmatrix}$

2. Calcule números de condición de las siguientes matrices relativas a $\|\cdot\|_\infty$.

a. $\begin{bmatrix} 0.03 & 58.9 \\ 5.31 & -6.10 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 58.9 & 0.03 \\ -6.10 & 5.31 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 0.04 & 0.01 & -0.01 \\ 0.2 & 0.5 & -0.2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

3. Los siguientes sistemas lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tienen x como la solución real y a $\tilde{\mathbf{x}}$ como una solución aproximada. Por medio de los resultados del ejercicio 1, calcule

$$\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty \quad \text{y} \quad K_\infty(A)\frac{\|\mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty}{\|A\|_\infty}.$$

a.
$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = \frac{1}{63},$$
$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 = \frac{1}{168},$$
$$\mathbf{x} = \left(\frac{1}{7}, -\frac{1}{6}\right)^t,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (0.142, -0.166)^t.$$

b.
$$3.9x_1 + 1.6x_2 = 5.5,$$
$$6.8x_1 + 2.9x_2 = 9.7,$$
$$\mathbf{x} = (1, 1)^t,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (0.98, 1.1)^t.$$

c.
$$x_1 + 2x_2 = 3,$$
$$1.0001x_1 + 2x_2 = 3.0001,$$
$$\mathbf{x} = (1, 1)^t,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (0.96, 1.02)^t.$$

d.
$$1.003x_1 + 58.09x_2 = 68.12,$$
$$5.550x_1 + 321.8x_2 = 377.3,$$
$$\mathbf{x} = (10, 1)^t,$$
$$\tilde{\mathbf{x}} = (-10, 1)^t.$$

4. Los siguientes sistemas lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tienen x como la solución real y a $\tilde{\mathbf{x}}$ como una solución aproximada. Por medio de los resultados del ejercicio 2, calcule

$$\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_\infty \quad \text{y} \quad K_\infty(A)\frac{\|\mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty}{\|A\|_\infty}.$$

a. $0.03x_1 + 58.9x_2 = 59.2,$

$5.31x_1 - 6.10x_2 = 47.0,$

$\mathbf{x} = (10, 1)^t,$

$\tilde{\mathbf{x}} = (30.0, 0.990)^t.$

b. $58.9x_1 + 0.03x_2 = 59.2,$

$-6.10x_1 + 5.31x_2 = 47.0,$

$\mathbf{x} = (1, 10)^t,$

$\tilde{\mathbf{x}} = (1.02, 9.98)^t.$

c. $x_1 - x_2 - x_3 = 2\pi,$

$x_2 - x_3 = 0,$

$-x_3 = \pi.$

$\mathbf{x} = (0, -\pi, -\pi)^t,$

$\tilde{\mathbf{x}} = (-0.1, -3.15, -3.14)^t.$

d. $0.04x_1 + 0.01x_2 - 0.01x_3 = 0.06,$

$0.2x_1 + 0.5x_2 - 0.2x_3 = 0.3,$

$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11,$

$\mathbf{x} = (1.827586, 0.6551724, 1.965517)^t,$

$\tilde{\mathbf{x}} = (1.8, 0.64, 1.9)^t.$

5. i) Utilice eliminación gaussiana y aritmética de tres dígitos para aproximar las soluciones de los siguientes sistemas lineales. ii) A continuación utilice una iteración de refinamiento iterativo para mejorar la aproximación y compare las aproximaciones con las soluciones reales.

a. $0.03x_1 + 58.9x_2 = 59.2,$
$5.31x_1 - 6.10x_2 = 47.0.$
Solución real $(10, 1)^t.$

b. $3.3330x_1 + 15920x_2 + 10.333x_3 = 7953,$
$2.2220x_1 + 16.710x_2 + 9.6120x_3 = 0.965,$
$-1.5611x_1 + 5.1792x_2 - 1.6855x_3 = 2.714.$
Solución real $(1, 0.5, -1)^t.$

c. $1.19x_1 + 2.11x_2 - 100x_3 + x_4 = 1.12,$
$14.2x_1 - 0.122x_2 + 12.2x_3 - x_4 = 3.44,$
$100x_2 - 99.9x_3 + x_4 = 2.15,$
$15.3x_1 + 0.110x_2 - 13.1x_3 - x_4 = 4.16.$
Solución real $(0.17682530, 0.01269269, -0.02065405, -1.18260870)^t.$

d. $\pi x_1 - ex_2 + \sqrt{2}x_3 - \sqrt{3}x_4 = \sqrt{11},$
$\pi^2 x_1 + ex_2 - e^2 x_3 + \frac{3}{7}x_4 = 0,$
$\sqrt{5}x_1 - \sqrt{6}x_2 + x_3 - \sqrt{2}x_4 = \pi,$
$\pi^3 x_1 + e^2 x_2 - \sqrt{7}x_3 + \frac{1}{9}x_4 = \sqrt{2}.$
Solución real $(0.78839378, -3.12541367, 0.16759660, 4.55700252)^t.$

6. Repita el ejercicio 5 mediante aritmética de redondeo de cuatro dígitos.

7. El sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{bmatrix}$$

tiene solución $(1, 1)^t$. Cambie A ligeramente por

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.9999 & 2 \end{bmatrix}$$

y considere el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.9999 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{bmatrix}.$$

Calcule la nueva solución mediante aritmética de redondeo de cinco dígitos y compare el error real con el cálculo (7.25). ¿A está mal condicionada?

8. El sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dado por

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.00001 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.00001 \end{bmatrix}$$

tiene solución $(1, 1)^t$. Utilice aritmética de redondeo de siete dígitos para encontrar la solución del sistema perturbado

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.000011 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.00001 \\ 3.00003 \end{bmatrix}$$

y compare el error real con el estimado (7.25). ¿A está mal condicionada?

9. La *matriz de Hilbert* $H^{(n)}$ $n = n$ (consulte la página 380) definida por

$$H_{ij}^{(n)} = \frac{1}{i + j - 1}, \quad 1 \le i, j \le n,$$

es una matriz mal condicionada que surge al resolver las ecuaciones normales de los coeficientes del polinomio de mínimos cuadrados (consulte el ejemplo 1 de la sección 8.2).

a. Muestre que

$$[H^{(4)}]^{-1} = \begin{bmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{bmatrix}$$

y calcule $K_\infty(H^{(4)})$.

b. Muestre que

$$[H^{(5)}]^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & -300 & 1050 & -1400 & 630 \\ -300 & 4800 & -18900 & 26880 & -12600 \\ 1050 & -18900 & 79380 & -117600 & 56700 \\ -1400 & 26880 & -117600 & 179200 & -88200 \\ 630 & -12600 & 56700 & -88200 & 44100 \end{bmatrix}$$

y calcule $K_\infty(H^{(5)})$.

c. Resuelva el sistema lineal

$$H^{(4)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

mediante aritmética de redondeo de cinco dígitos y compare el error real con el estimado en (7.25).

10. A través de aritmética de redondeo de cuatro dígitos calcule la inversa H^{-1} de la matriz de Hilbert H de tamaño 3×3 y, a continuación, calcule $\hat{H} = (H^{-1})^{-1}$. Determine $||H - \hat{H}||_\infty$.

EJERCICIOS TEÓRICOS

11. Muestre que si B es singular, entonces

$$\frac{1}{K(A)} \le \frac{||A - B||}{||A||}.$$

[*Sugerencia*: Existe un vector con $||\mathbf{x}|| = 1$, como $B\mathbf{x} = 0$. Derive la estimación mediante $||A\mathbf{x}|| \ge ||\mathbf{x}|| \,/\, ||A^{-1}||$.]

12. Usando el ejercicio 11, calcule los números de condición para las siguientes matrices:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 3.9 & 1.6 \\ 6.8 & 2.9 \end{bmatrix}$

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Se puede juzgar la precisión de una aproximación x para $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ al calcular la magnitud del vector residual $r = b - A\mathbf{x}$ mediante cualquier norma. Sin embargo, un residuo pequeño no necesariamente implica que el error en la solución es pequeño. ¿Por qué? ¿Qué se puede hacer para superar este problema?
2. ¿Cuál es el valor real del número de condición de una matriz A dependiente de la norma matricial que se usa para calcularlo? En ese caso, proporcione ejemplos para respaldar su respuesta.
3. ¿Por qué es difícil y/o poco práctico calcular con precisión el número de condición?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 7.6

1. El sistema lineal

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{5}{21},$$
$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = \frac{11}{84},$$

tiene la solución $(x_1, x_2)^t = (1/6, 1/7)^t$.

a. Resuelva el sistema lineal mediante eliminación gaussiana con aritmética de redondeo de dos dígitos.

b. Resuelva el sistema lineal usando el método de gradiente conjugado ($C = C^{-1} = I$) con aritmética de redondeo de dos dígitos.

c. ¿Qué método da la mejor respuesta?

d. Seleccione $C^{-1} = D^{-1/2}$. ¿Esta elección mejora el método de gradiente conjugado?

2. El sistema lineal

$$0.1x_1 + 0.2x_2 = 0.3,$$
$$0.2x_1 + 113x_2 = 113.2,$$

tiene solución $(x_1, x_2)^t = (1, 1)^t$. Repita las instrucciones del ejercicio 1 en este sistema lineal.

3. El sistema lineal

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{5}{6},$$
$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = \frac{5}{12},$$
$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = \frac{17}{60},$$

tiene solución $(1, -1, 1)^t$.

a. Resuelva el sistema lineal mediante eliminación gaussiana con aritmética de redondeo de tres dígitos.

b. Resuelva el sistema lineal usando el método de gradiente conjugado con aritmética de redondeo de tres dígitos.

c. ¿El pivoteo mejora la respuesta en a)?

d. Repita la parte b) mediante $C^{-1} = D^{-1/2}$. ¿Esto mejora la respuesta en b)?

4. Repita el ejercicio 3 por medio de aritmética de precisión única en una computadora.
5. Realice sólo dos pasos del método de gradiente conjugado con ($C = C^{-1} = I$) en cada uno de los siguientes sistemas lineales. Compare los resultados en las partes b) y c) para los resultados obtenidos en pares b) y c) del ejercicio 1 de la sección 7.3 y el ejercicio 1 de la sección 7.4.

a.
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1, \\ -x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 &= 4. \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 \qquad &= 9, \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 7, \\ -2x_2 + 10x_3 &= 6. \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned}10x_1 + 5x_2 \quad\quad &= 6,\\ 5x_1 + 10x_2 - 4x_3 \quad &= 25,\\ -4x_2 + 8x_3 - x_4 &= -11,\\ -x_3 + 5x_4 &= -11.\end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned}4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -2,\\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 &= -1,\\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0,\\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1.\end{aligned}$$

e.
$$\begin{aligned}4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 6,\\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 6,\\ x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 &= 6,\\ x_2 - x_3 + 4x_4 &= 6,\\ x_1 - x_3 + \quad + 4x_5 &= 6.\end{aligned}$$

f.
$$\begin{aligned}4x_1 - x_2 &= 0,\\ -x_1 + 4x_2 - x_3 &= 5,\\ -x_2 + 4x_3 &= 0,\\ +4x_4 - x_5 &= 6,\\ -x_4 + 4x_5 - x_6 &= -2,\\ -x_5 + 4x_6 &= 6.\end{aligned}$$

6. Repita el ejercicio 5 mediante $C^{-1} = D^{-1/2}$.

7. Repita el ejercicio 5 con $TOL = 10^{-3}$ con la norma l_∞. Compare los resultados en las partes b) y c) con los obtenidos en los ejercicios 5 y 7 de la sección 7.3 y el ejercicio 5 de la sección 7.4.

8. Repita el ejercicio 7 mediante $C^{-1} = D^{-1/2}$.

9. Aproxime las soluciones para los siguientes sistemas lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dentro de 10^{-5} con la norma l_∞.

i)

$$a_{i,j} = \begin{cases} 4, & \text{cuando } j = i \text{ y } i = 1, 2, \ldots, 16,\\ -1, & \text{cuando } \begin{cases} j = i+1 \text{ y } i = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15,\\ j = i-1 \text{ y } i = 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16,\\ j = i+4 \text{ y } i = 1, 2, \ldots, 12,\\ j = i-4 \text{ y } i = 5, 6, \ldots, 16, \end{cases}\\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y

$$\mathbf{b} = (1.902207, 1.051143, 1.175689, 3.480083, 0.819600, -0.264419, -0.412789, 1.175689, 0.913337, -0.150209, -0.264419, 1.051143, 1.966694, 0.913337, 0.819600, 1.902207)^t$$

ii)

$$a_{i,j} = \begin{cases} 4, & \text{cuando } j = i \text{ y } i = 1, 2, \ldots, 25,\\ -1, & \text{cuando } \begin{cases} j = i+1 \text{ y } i = \begin{cases} 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14,\\ 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, \end{cases}\\ j = i-1 \text{ y } i = \begin{cases} 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15,\\ 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, \end{cases}\\ j = i+5 \text{ y } i = 1, 2, \ldots, 20,\\ j = i-5 \text{ y } i = 6, 7, \ldots, 25, \end{cases}\\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y

$$\mathbf{b} = (1, 0, -1, 0, 2, 1, 0, -1, 0, 2, 1, 0, -1, 0, 2, 1, 0, -1, 0, 2, 1, 0, -1, 0, 2)^t$$

iii)

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2i, & \text{cuando } j = i \text{ y } i = 1, 2, \ldots, 40,\\ -1, & \text{cuando } \begin{cases} j = i+1 \text{ y } i = 1, 2, \ldots, 39,\\ j = i-1 \text{ y } i = 2, 3, \ldots, 40, \end{cases}\\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y $b_i = 1.5i - 6$, para cada $i = 1, 2, \ldots, 40$

a. Utilice el método de Jacobi.

b. Utilice el método Gauss-Siedel.

c. Utilice el método SOR con $\omega = 1.3$ en i), $\omega = 1.2$ en ii), y $\omega = 1.1$ en iii).

d. Utilice el método de gradiente conjugado y precondicionamiento con $C^{-1} = D^{-1/2}$.

10. Resuelva el sistema lineal en el ejercicio 14b) del conjunto de ejercicios 7.3 con el método de gradiente conjugado con $C^{-1} = I$.

11. Si

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad -I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{y}$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A partir de la matriz A de 16×16 en forma particionada

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & -I & O & O \\ -I & A_1 & -I & O \\ O & -I & A_1 & -I \\ O & O & -I & A_1 \end{bmatrix}.$$

Si $\mathbf{b} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)^t$.

a. Resuelva $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ usando el método de gradiente conjugado con tolerancia 0.05.

b. Resuelva $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ usando el método de gradiente conjugado precondicionado con tolerancia $C^{-1} = D^{-1/2}$ y tolerancia 0.05.

c. ¿Hay alguna tolerancia para la que los métodos de la parte a) y b) requieran un número diferente de iteraciones?

EJERCICIOS APLICADOS

12. Un cable coaxial está fabricado con un conductor interno de 0.1 pulgadas cuadradas y un conductor externo de 0.5 pulgadas cuadradas. El potencial en un punto en la sección transversal del cable está descrito por la ecuación de Laplace.

Suponga que un conductor interno se mantiene a 0 volts y el conductor externo se mantiene a 110 volts. Aproximar el potencial entre los dos conductores requiere resolver el siguiente sistema lineal. (Consulte el ejercicio 5 de la sección 12.1.)

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{10} \\ w_{11} \\ w_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \\ 110 \\ 110 \\ 220 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 110 \\ 220 \\ 110 \\ 110 \\ 220 \end{bmatrix}.$$

Resuelva el sistema lineal usando el método de gradiente conjugado con $TOL = 10^{-2}$ y $C^{-1} = D^{-1}$.

13. Suponga que un objeto puede estar en alguno de los $n+1$ puntos igualmente espaciados $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Cuando un objeto se encuentra en la ubicación x_i, es igualmente probable que se mueva ya sea hacia x_{i-1} o x_{i+1} y no se mueva directamente a cualquier otra ubicación. Considere las probabilidades $\{P_i\}_{i=0}^{n}$ de que un objeto que comienza en la ubicación x_i llegará al extremo izquierdo x_0 antes de llegar al extremo derecho x_n. Claramente, $P_0 = 1$ y $P_n = 1$. Puesto que el objeto se puede mover hacia x_i sólo desde x_{i-1} o x_{i+1} y lo hace con una probabilidad de $\frac{1}{2}$ para cada una de estas ubicaciones,

$$P_i = \frac{1}{2}P_{i-1} + \frac{1}{2}P_{i+1}, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

a. Muestre que

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \ddots & & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b. Resuelva este sistema usando $n = 10, 50$ y 100.

c. Cambie las probabilidades de α y $1-\alpha$ para movimiento hacia la izquierda y derecha, respectivamente y derive el sistema lineal de manera similar al de la parte a).

d. Repita la parte b) con $\alpha = \frac{1}{3}$.

EJERCICIOS TEÓRICOS

14. Utilice las propiedades de transposición dadas en el teorema 6.14 en la página 295 para probar el teorema 7.30.

15. a. Muestre que un conjunto de vectores diferentes de cero ortogonal a A relacionados con una matriz definida positiva es linealmente independiente.

b. Muestre que si $\{\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}\}$ es un conjunto de vectores diferentes a cero ortogonal a A en $\mathbb{R}$ y $\mathbf{z}^t\mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{0}$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, cuando $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

16. Pruebe el teorema 7.33 mediante inducción matemática de acuerdo con lo siguiente:

a. Muestre que $\langle \mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)} \rangle = 0$.

b. Suponga que $\langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{v}^{(j)} \rangle = 0$, para cada $k \le l$ y $j = 1, 2, \ldots, k$, y muestre que esto implica que $\langle \mathbf{r}^{(l+1)}, \mathbf{v}^{(j)} \rangle = 0$, para cada $j = 1, 2, \ldots, l$.

c. Muestre que $\langle \mathbf{r}^{(l+1)}, \mathbf{v}^{(l+1)} \rangle = 0$.

17. En el ejemplo 3, se encontraron los eigenvalores para la matriz A y la matriz condicionada $\tilde{A}$. Utilícelos para determinar los números de condición de A y $\tilde{A}$ con la norma l_2.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. El método de gradiente conjugado se puede usar para resolver el sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde A es una matriz semidefinida positiva simétrica y singular. Sin embargo, el método diverge en ciertas condiciones. ¿Cuáles son? ¿La divergencia se puede evitar?

2. El método de gradiente conjugado se puede usar como método directo o iterativo. Analice cómo se puede utilizar en cada instancia.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS (FINAL DEL CAPÍTULO)

1. PARALUTION es una biblioteca de código abierto para métodos iterativos dispersos con enfoque especial en tecnología multinúcleo y aceleradora como GPU. Proporcione una descripción general de este método.
2. Proporcione una descripción general del kit de herramientas BPKIT.
3. Proporcione una descripción general de la biblioteca SuperLU.
4. Proporcione una descripción general del proyecto CERFACS.

CONCEPTOS CLAVE

Bien condicionada
Condición de ortogonalidad de *A*
Desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwartz
Distancia
Distancia entre matrices
Eigenvalor
Eigenvector
Mal condicionada
Matriz convergente
Método de Gauss-Siedel
Método de gradiente conjugado
Método de Jacobi
Norma del vector entre vectores
Norma euclidiana
Norma infinita
Norma matricial
Número de condición
Polinomio característico
Precondicionamiento
Radio espectral
Refinamiento iterativo
Sobre-relajación
Stein-Rosenberg
Sub-relajación
Técnica iterativa SOR
Vector residual

REVISIÓN DEL CAPÍTULO

En este capítulo estudiamos técnicas iterativas para aproximar la solución de los sistemas lineales. Comenzamos con los métodos de Jacobi y Gauss-Siedel para introducir los métodos iterativos. Ambos requieren una aproximación inicial arbitraria $\mathbf{x}^{(0)}$ y generan una sucesión de vectores $\mathbf{x}^{(i+1)}$ mediante una ecuación de la forma

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = T\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{c}.$$

Se observó que el método converge si y sólo si el radio espectral de la matriz de iteración $\rho(T) < 1$, y mientras el radio espectral sea más pequeño, más rápida será la convergencia. El análisis de vectores residuales de la técnica de Gauss-Siedel condujo al método iterativo SOR, que implica un parámetro ω para acelerar la convergencia.

Estos métodos iterativos y modificaciones se utilizan ampliamente en la solución de sistemas lineales que surgen en la solución numérica de los problemas de valores en la frontera y ecuaciones diferenciales parciales (consulte los capítulos 11 y 12). A menudo, estos sistemas son muy grandes, en el orden de 10 000 ecuaciones en 10 000 incógnitas y están dispersos con sus entradas diferentes a cero en posiciones predecibles. Los métodos iterativos también son útiles para otros grandes sistemas dispersos y se adaptan fácilmente para uso eficiente en computadoras paralelas.

Más información sobre el uso de métodos iterativos para resolver sistemas lineales se pueden encontrar en Varga [Var1], Young [Y], Hageman y Young [HY] y Axelsson [Ax]. Los métodos iterativos para grandes sistemas se analizan en Barrett *et al*. [Barr], Hackbusch [Hac], Kelley [Kelley] y Saad [Sa2].