Capítulo 12

CONJUNTO DE EJERCICIOS 12.1

1. Use el algoritmo 12.1 para aproximar la solución de la ecuación diferencial parcial elíptica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2;$$

$$u(x, 0) = x^2, \quad u(x, 2) = (x-2)^2, \quad 0 \le x \le 1;$$

$$u(0, y) = y^2, \quad u(1, y) = (y-1)^2, \quad 0 \le y \le 2.$$

Utilice $h = k = \frac{1}{2}$ y compare los resultados con la solución real $u(x, y) = (x - y)^2$.

2. Use el algoritmo 12.1 para aproximar la solución de la ecuación diferencial parcial elíptica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 1 < x < 2, \quad 0 < y < 1;$$

$$u(x, 0) = 2\ln x, \qquad u(x, 1) = \ln(x^2+1), \quad 1 \le x \le 2;$$

$$u(1, y) = \ln(y^2+1), \quad u(2, y) = \ln(y^2+4), \quad 0 \le y \le 1.$$

Use $h = k = \frac{1}{3}$ y compare los resultados con la solución real $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.

3. Aproxime las soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales elípticas, por medio del algoritmo 12.1:

a. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1;$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = x, \qquad 0 \le x \le 1;$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = y, \qquad 0 \le y \le 1.$$

Use $h = k = 0.2$ y compare los resultados con la solución real $u(x, y) = xy$.

b. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -(\cos(x+y) + \cos(x-y)), \qquad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2};$$

$$u(0, y) = \cos y, \quad u(\pi, y) = -\cos y, \qquad 0 \le y \le \frac{\pi}{2},$$

$$u(x, 0) = \cos x, \quad u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \qquad 0 \le x \le \pi.$$

Use $h = \pi/5$ y $k = \pi/10$ y compare los resultados con la solución real $u(x, y) = \cos x \cos y$.

c. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x^2+y^2)e^{xy}, \qquad 0 < x < 2,\ 0 < y < 1;$$

$$u(0, y) = 1, \quad u(2, y) = e^{2y}, \qquad 0 \le y \le 1;$$

$$u(x, 0) = 1, \quad u(x, 1) = e^{x}, \qquad 0 \le x \le 2.$$

Use $h = 0.2$ y $k = 0.1$ y compare los resultados con la solución real $u(x, y) = e^{xy}$.

d. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \qquad 1 < x < 2, \quad 1 < y < 2;$$

$$u(x, 1) = x\ln x, \quad u(x, 2) = x\ln(4x^2), \qquad 1 \le x \le 2;$$

$$u(1, y) = y\ln y, \quad u(2, y) = 2y\ln(2y), \qquad 1 \le y \le 2.$$

Use $h = k = 0.1$ y compare los resultados con la solución real $u(x, y) = xy\ln xy$.

4. Repita el ejercicio 3a) mediante extrapolación con $h_0 = 0.2, h_1 = h_0/2$, y $h_2 = h_0/4$.

EJERCICIOS APLICADOS

5. Un cable coaxial está hecho de un conductor interno cuadrado de 0.1-pulgada y un conductor externo cuadrado de 0.5 pulgada. El potencial en un punto en la sección transversal del cable se describe mediante la ecuación de Laplace. Suponga que el conductor interno se mantiene a 0 volts y el conductor externo se mantiene a 110 volts. Encuentre el potencial entre los dos conductores al colocar una cuadrícula con espaciado de malla horizontal $h = 0.1$ pulgada. y espaciado de malla vertical $k = 0.1$ pulgada. en la región

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le x, y \le 0.5\}.$$

Aproxime la solución de la ecuación de Laplace en cada punto de malla y use dos conjuntos de condiciones en la frontera para derivar un sistema lineal que se resolverá a través del método de Gauss-Seidel.

6. Una placa de plata rectangular de 6 cm $\times$ 5 cm tiene calor generado de manera uniforme en cada punto a una velocidad $q = 1.5$ cal/cm^3·sec. Si x representa la distancia a lo largo del borde de la placa de longitud 6 cm y y es la distancia a lo largo del borde de la placa de longitud 5 cm. Suponga que la temperatura u a lo largo de los bordes se mantiene en las siguientes temperaturas:

$$u(x, 0) = x(6 - x), \; u(x, 5) = 0, \quad 0 \le x \le 6,$$
$$u(0, y) = y(5 - y), \; u(6, y) = 0, \quad 0 \le y \le 5,$$

donde el origen se encuentra en una esquina de la placa con coordenadas $(0, 0)$ y los bordes se encuentran a lo largo de los ejes x y y positivos. La temperatura en estado estable $u = u(x, y)$ satisface la ecuación de Poisson:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{q}{K}, \quad 0 < x < 6, \; 0 < y < 5,$$

donde k, la conductividad térmica, es 1.04 cal/cm·deg·sec. Aproxime la temperatura $u(x, y)$ mediante el algoritmo 12.1 con $h = 0.4$ y $k = \frac{1}{3}$.

EJERCICIOS TEÓRICOS

7. Construya un algoritmo similar al algoritmo 12.1, sólo que utilice el método SOR con ω óptima en lugar del método Gauss-Seidel para resolver el sistema lineal.

8. Repita el ejercicio 3 por medio del algoritmo construido en el ejercicio 7.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. El texto describe la formación de líneas de cuadrícula verticales igualmente espaciadas y líneas de cuadrícula horizontales igualmente espaciadas. ¿Un tamaño de cuadrícula variable se puede usar en el método de diferencias finitas? En este caso, ¿cómo implementaría esta modificación?

2. ¿Cómo espaciaría las líneas de la cuadrícula en caso de un dominio de forma irregular?

3. Analice métodos de múltiples cuadrículas para resolver problemas elípticos.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 12.2

1. Aproxime la solución de la siguiente ecuación diferencial parcial con el método de diferencias regresivas

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 2, \; 0 < t;$$
$$u(0, t) = u(2, t) = 0, \quad 0 < t, \quad u(x, 0) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x, \quad 0 \le x \le 2.$$

Use $m = 4$, $T = 0.1$, y $N = 2$ y compare sus resultados con la solución real $u(x, t) = e^{-(\pi^2/4)t} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x$.

2. Aproxime la solución de la siguiente ecuación diferencial parcial con el método de diferencias regresivas

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{16}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \ 0 < t;$$
$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t, \quad u(x, 0) = 2 \operatorname{sen} 2\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Use $m = 3$, $T = 0.1$, y $N = 2$ y compare sus resultados con la solución real $u(x, t) = 2e^{-(\pi^2/4)t}$ $\operatorname{sen} 2\pi x$.

3. Repita el ejercicio 1 con el algoritmo Crank-Nicolson.

4. Repita el ejercicio 2 con el algoritmo Crank-Nicolson.

5. Use el método de diferencias progresivas para aproximar la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales parciales parabólicas.

a. $$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 2, \ 0 < t;$$
$$u(0, t) = u(2, t) = 0, \quad 0 < t,$$
$$u(x, 0) = \operatorname{sen} 2\pi x, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Use $h = 0.4$ y $k = 0.1$ y compare sus resultados en $t = 0.5$ con la solución real $u(x, t) = e^{-4\pi^2 t}$ $\operatorname{sen} 2\pi x$. A continuación, use $h = 0.4$ y $k = 0.05$ y compare las respuestas.

b. $$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, \ 0 < t;$$
$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 < t,$$
$$u(x, 0) = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Use $h = \pi/10$ y $k = 0.05$ y compare sus resultados en $t = 0.5$ con la solución real $u(x, t) = e^{-t} \operatorname{sen} x$.

6. Use el método de diferencias progresivas para aproximar la solución con las ecuaciones diferenciales parciales parabólicas.

a. $$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{4}{\pi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 4, \ 0 < t;$$
$$u(0, t) = u(4, t) = 0, \quad 0 < t,$$
$$u(x, 0) = \operatorname{sen} \tfrac{\pi}{4}x \left(1 + 2\cos \tfrac{\pi}{4}x\right), \quad 0 \leq x \leq 4.$$

Use $h = 2$ y $k = 0.04$ y compare sus resultados en $t = 0.4$ con la solución real $u(x, t) = e^{-t} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x + e^{-t/4} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}x$.

b. $$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\pi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \ 0 < t;$$
$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t,$$
$$u(x, 0) = \cos \pi \left(x - \tfrac{1}{2}\right), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Use $h = 0.1$ y $k = 0.04$ y compare sus resultados en $t = 0.4$ con la solución real $u(x, t) = e^{-t} \cos \pi(x - \frac{1}{2})$.

7. Repita el ejercicio 5 con el algoritmo de diferencias regresivas.

8. Repita el ejercicio 6 con el algoritmo de diferencias regresivas.

9. Repita el ejercicio 5 con el algoritmo Crank-Nicolson.

10. Repita el ejercicio 6 con el algoritmo Crank-Nicolson.

11. Repita el ejercicio 5 con el método de Richardson.

12. Repita el ejercicio 6 con el método de Richardson.

EJERCICIOS APLICADOS

13. La temperatura $u(x, t)$ de una varilla larga y delgada de sección transversal constante y material de conducción homogéneo está regida por la ecuación de calor unidimensional. Si se genera calor en el material, por ejemplo, mediante resistencia a la corriente o reacción nuclear, la ecuación de calor se vuelve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{Kr}{\rho C} = K\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t,$$

donde l es la longitud, ρ es la densidad, C es el calor específico y K es la capacidad de difusión de la varilla. La función $r = r(x, t, u)$ representa el calor generado por unidad de volumen. Suponga que

$$l = 1.5 \text{ cm}, \quad K = 1.04 \text{ cal/cm} \cdot \text{deg} \cdot \text{s}, \quad \rho = 10.6 \text{ g/cm}^3, \quad C = 0.056 \text{ cal/g} \cdot \text{deg},$$

y

$$r(x, t, u) = 5.0 \text{ cal/cm}^3 \cdot \text{s}.$$

Si los extremos de la varilla se mantienen a 0°C, entonces

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0.$$

Suponga que la distribución de temperatura inicial está dada por

$$u(x, 0) = \operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}, \quad 0 \le x \le l.$$

Use los resultados del ejercicio 17 para aproximar la distribución de temperatura con $h = 0.15$ y $k = 0.0225$.

14. Sagar y Payne [SP] analizaron las relaciones estrés-tensión y las propiedades del material de un cilindro sujeto alternativamente a calentamiento y enfriamiento y consideraron la ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{4K}\frac{\partial T}{\partial t}, \quad \frac{1}{2} < r < 1, \ 0 < T,$$

donde $T = T(r, t)$ es la temperatura, r es la distancia radial desde el centro del cilindro, t es el tiempo y K es un coeficiente de capacidad de difusión.

a. Encuentre las aproximaciones para $T(r, 10)$ para un cilindro con radio exterior 1, dadas las condiciones de frontera e iniciales:

$$T(1, t) = 100 + 40t, \quad T\left(\frac{1}{2}, t\right) = t, \quad 0 \le t \le 10;$$

$$T(r, 0) = 200(r - 0.5), \quad 0.5 \le r \le 1.$$

Use una modificación del método de diferencias regresivas con $K = 0.1$, $k = 0.5$, y $h = \Delta r = 0.1$.

b. Use la distribución de temperatura de la parte a) para calcular la tensión I al aproximar la integral

$$I = \int_{0.5}^{1} \alpha T(r, t) r \, dr,$$

donde $\alpha = 10.7$ y $t = 10$. Use el método trapezoidal compuesto con $n = 5$.

EJERCICIOS TEÓRICOS

15. Muestre que los eigenvalores para la matriz tridiagonal $(m - 1)$ por $(m - 1)$ A dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda, & j = i - 1 \text{ o } j = i + 1, \\ 1 - 2\lambda, & j = i, \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

son

$$\mu_i = 1 - 4\lambda\left(\operatorname{sen}\frac{i\pi}{2m}\right)^2, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \ldots, m - 1,$$

con eigenvectores correspondientes $\mathbf{v}^{(i)}$, donde $v_j^{(i)} = \operatorname{sen}\frac{ij\pi}{m}$.

16. Muestre que la matriz de método tridiagonal $(m-1)$ por $(m-1)$ A dada por

$$a_{ij}=\begin{cases}-\lambda, & j=i-1 \text{ o } j=i+1,\\ 1-2\lambda, & j=i,\\ 0, & \text{en otro caso}\end{cases}$$

donde $\lambda>0$, es definida positiva y diagonalmente dominante y tiene eigenvalores

$$\mu_i=1+4\lambda\left(\operatorname{sen}\frac{i\pi}{2m}\right)^2, \quad \text{para cada } i=1,2,\ldots,m-1,$$

con eigenvectores correspondientes $\mathbf{v}^{(i)}$, donde $v_j^{(i)}=\operatorname{sen}\frac{ij\pi}{m}$.

17. Modifique los algoritmos 12.2 y 12.3 para incluir la ecuación diferencial parcial parabólica

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=F(x), \quad 0<x<l,\ 0<t;$$
$$u(0,t)=u(l,t)=0, \quad 0<t;$$
$$u(x,0)=f(x), \quad 0\le x\le l.$$

18. Use los resultados del ejercicio 17 para aproximar la solución de

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2, \quad 0<x<1,\ 0<t;$$
$$u(0,t)=u(1,t)=0, \quad 0<t;$$
$$u(x,0)=\operatorname{sen}\pi x+x(1-x),$$

con $h=0.1$ y $k=0.01$. Compare su respuesta en $t=0.25$ con la solución real $u(x,t)=e^{-\pi^2 t}$ $\operatorname{sen}\pi x+x(1-x)$.

19. Cambie los algoritmos 12.2 y 12.3 para acomodar la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad 0<x<l,\ 0<t;$$
$$u(0,t)=\phi(t),\ u(l,t)=\Psi(t), \quad 0<t;$$
$$u(x,0)=f(x), \quad 0\le x\le l,$$

donde $f(0)=\phi(0)$ y $f(l)=\Psi(0)$.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Describa el método implícito de dirección alternativa (ADI).

2. ¿Se puede usar un elemento finito en problemas parabólicos?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 12.3

1. Aproxime la solución de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad 0<x<1, \quad 0<t;$$
$$u(0,t)=u(1,t)=0, \quad 0<t,$$
$$u(x,0)=\operatorname{sen}\pi x, \quad 0\le x\le 1,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0, \quad 0\le x\le 1,$$

por medio del algoritmo de diferencias finitas 12.4 con $m=4$, $N=4$, y $T=1.0$. Compare sus resultados en $t=1.0$ con la solución real $u(x,t)=\cos\pi t\operatorname{sen}\pi x$.

2. Aproxime la solución de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{16\pi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 0.5,\ 0 < t;$$

$$u(0,t) = u(0.5,t) = 0, \quad 0 < t,$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 0.5,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \operatorname{sen} 4\pi x, \quad 0 \le x \le 0.5,$$

usando el algoritmo de diferencias finitas 12.4 con $m = 4$, $N = 4$, y $T = 0.5$. Compare sus resultados en $t = 0.5$ con la solución real $u(x,t) = \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 4\pi x$.

3. Aproxime la solución de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi,\ 0 < t;$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad 0 < t,$$

$$u(x,0) = \operatorname{sen} x, \quad 0 \le x \le \pi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi,$$

usando el algoritmo de diferencias finitas con $h = \pi/10$ y $k = 0.05$, con y, después con $h = \pi/20$ y $k = 0.05$. Compare sus resultados en $t = 0.5$ con la solución real $u(x,t) = \cos t \operatorname{sen} x$.

4. Repita el ejercicio 3, usando en el paso 4 del algoritmo 12.4 la aproximación

$$w_{i,1} = w_{i,0} + kg(x_i), \quad \text{para cada } i = 1, \ldots, m-1.$$

5. Aproxime la solución de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1,\ 0 < t;$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t,$$

$$u(x,0) = \operatorname{sen} 2\pi x, \quad 0 \le x \le 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2\pi \operatorname{sen} 2\pi x, \quad 0 \le x \le 1,$$

usando el algoritmo 12.4 con $h = 0.1$ y $k = 0.1$. Compare sus resultados en $t = 0.3$ con la solución real $u(x,t) = \operatorname{sen} 2\pi x(\cos 2\pi t + \operatorname{sen} 2\pi t)$.

6. Aproxime la solución de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1,\ 0 < t;$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} < x \le 1, \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1.$$

usando el algoritmo 12.4 con $h = 0.1$ y $k = 0.1$.

EJERCICIOS APLICADOS

7. La presión del aire $p(x,t)$ en un tubo de órgano está regida por la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l,\ 0 < t,$$

donde l es la longitud del tubo y c es una constante física. Si el tubo está abierto, las condiciones en la frontera están determinadas por

$$p(0,t) = p_0 \quad \text{y} \quad p(l,t) = p_0.$$

Si el tubo está cerrado en el extremo donde $x = l$, las condiciones en la frontera son

$$p(0,t) = p_0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial p}{\partial x}(l,t) = 0.$$

Suponga que $c = 1, l = 1$ y que las condiciones iniciales son

$$p(x,0) = p_0 \cos 2\pi x, \quad \text{y} \quad \frac{\partial p}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 1.$$

a. Aproxime la presión para un tubo abierto con $p_0 = 0.9$ en $x = \frac{1}{2}$ para $t = 0.5$ y $t = 1$, usando el algoritmo 12.4 con $h = k = 0.1$.

b. Modifique el algoritmo 12.4 para el problema de tubo cerrado con $p_0 = 0.9$ y aproxime $p(0.5, 0.5)$ y $p(0.5, 1)$ mediante $h = k = 0.1$.

8. Una línea de transmisión eléctrica de longitud l que conduce corriente alterna de alta frecuencia (llamada línea "sin pérdida"), el voltaje V y la corriente i se describe mediante

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \ 0 < t;$$
$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, \ 0 < t;$$

donde L es la inductancia por unidad de longitud y C es la capacitancia por unidad de longitud. Suponga que la línea es 200 pies de largo y las constantes C y L están dadas por

$$C = 0.1 \text{ farads/pies} \quad \text{y} \quad L = 0.3 \text{ henries/pies}.$$

Suponga que el voltaje y la corriente también satisfacen

$$V(0,t) = V(200,t) = 0, \quad 0 < t;$$
$$V(x,0) = 110 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{200}, \quad 0 \le x \le 200;$$
$$\frac{\partial V}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 200;$$
$$i(0,t) = i(200,t) = 0, \quad 0 < t;$$
$$i(x,0) = 5.5\cos\frac{\pi x}{200}, \quad 0 \le x \le 200;$$

y

$$\frac{\partial i}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le 200.$$

Aproxime el voltaje y la corriente en $t = 0.2$ y $t = 0.5$ usando el algoritmo 12.4 con $h = 10$ y $k = 0.1$.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Analice el método de características para problemas hiperbólicos.

2. ¿Existe algún método de diferencias finitas implícita para problemas hiperbólicos y por qué se usaría?

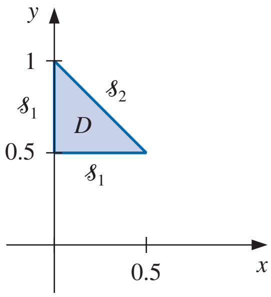
CONJUNTO DE EJERCICIOS 12.4

1. Use el algoritmo 12.5 para aproximar la solución de la siguiente ecuación diferencial parcial (consulte la figura):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(y^2\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right)-yu(x,y)=-x,\quad (x,y)\in D,$$

$$u(x,0.5)=2x,\quad 0\le x\le 0.5,\quad u(0,y)=0,\quad 0.5\le y\le 1,$$

$$y^2\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\cos\theta_1+y^2\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\cos\theta_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(y-x)\quad \text{para } (x,y)\in \mathcal{S}_2.$$



Sea que $M=2$; T_1 tiene vértices $(0,0.5)$, $(0.25,0.75)$, $(0,1)$; y T_2 tiene vértices $(0,0.5)$, $(0.5,0.5)$, y $(0.25,0.75)$.

2. Repita el ejercicio 1, por medio de los triángulos

$$\begin{aligned}T_1 &: \quad (0,0.75),\ (0,1),\ (0.25,0.75);\\ T_2 &: \quad (0.25,0.5),\ (0.25,0.75),\ (0.5,0.5);\\ T_3 &: \quad (0,0.5),\ (0,0.75),\ (0.25,0.75);\\ T_4 &: \quad (0,0.5),\ (0.25,0.5),\ (0.25,0.75).\end{aligned}$$

3. Aproxime la solución de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)-12.5\pi^2u(x,y)=-25\pi^2\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{2}x\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{2}y,\quad 0<x,\ y<0.4,$$

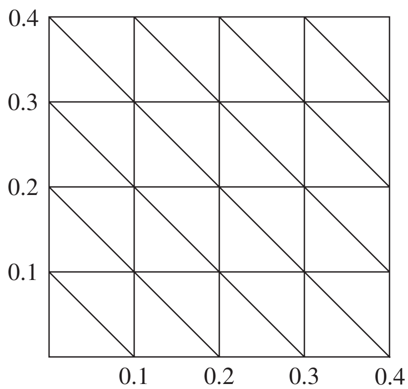
sujeta a la condición de frontera de Dirichlet

$$u(x,y)=0,$$

usando el algoritmo de elementos finitos 12.5 con los elementos determinados en la figura adjunta. Compare la solución aproximada con la solución real

$$u(x,y)=\text{sen}\,\frac{5\pi}{2}x\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{2}y,$$

en los vértices interior y en los puntos $(0.125,0.125)$, $(0.125,0.25)$, $(0.25,0.125)$, y $(0.25,0.25)$.



4. Repita el ejercicio 3, con $f(x, y) = -25\pi^2 \cos \frac{5\pi}{2} x \cos \frac{5\pi}{2} y$, por medio de la condición de frontera de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = 0.$$

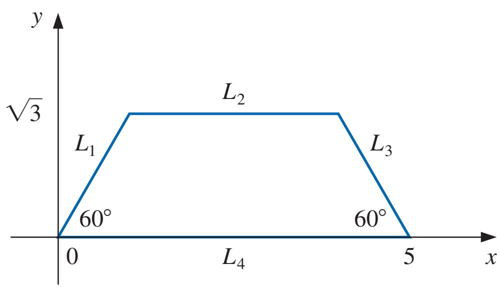
La solución real de este problema es

$$u(x, y) = \cos \frac{5\pi}{2} x \cos \frac{5\pi}{2} y.$$

EJERCICIOS APLICADOS

5. Una placa de plata de forma trapezoidal (consulte la figura adjunta) tiene calor generado de manera uniforme en cada punto a una velocidad de $q = 1.5$ cal/cm$^3 \cdot$ s. La temperatura en estado estable $u(x, y)$ de la placa satisface la ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \frac{-q}{k},$$



donde k, la conductividad térmica, es 1.04 cal/cm · deg · s. Suponga que la temperatura se mantiene en 15 ºC en L_2, que el calor se pierde en los bordes inclinados L_1 y L_3 de acuerdo con la condición de frontera $\partial u/\partial n = 4$, y que no se pierde calor en L_4; es decir, $\partial u/\partial n = 0$. Aproxime la temperatura de la placa en $(1, 0)$, $(4, 0)$ y $\left(\frac{5}{2}, \sqrt{3}/2\right)$ mediante el algoritmo 12.5.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Investigue el uso de rectángulos en lugar de triángulos en el método de elementos finitos.

2. Analice el enfoque de ingeniería para utilizar tensiones y cargas para desarrollar el método de elementos finitos.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS (FINAL DEL CAPÍTULO)

1. Proporcione una descripción general del paquete de software MUDPACK.
2. Proporcione una descripción general del paquete de software Chombo.
3. Proporcione una descripción general del paquete de software ReacTran.

CONCEPTOS CLAVE

Condiciones de frontera de Dirichlet
Diferencias finitas de ecuación de onda
Diferencias regresivas de la ecuación de calor
Ecuación de calor
Ecuación de difusión
Ecuación de Laplace
Ecuación de onda
Ecuación de Poisson
Ecuaciones elípticas
EDP elípticas
EDP hiperbólicas
EDP parabólicas
Estabilidad
Método de Crank-Nicolson
Método de diferencias finitas
Método de diferencias finitas de Poisson
Método de diferencias progresivas
Método de diferencias regresivas
Método de elementos finitos
Nodos
Triangulación

REVISIÓN DEL CAPÍTULO

En este capítulo, se consideraron los métodos para aproximar las soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales. Restringimos nuestra atención a la ecuación de Poisson como ejemplo de una ecuación diferencial parcial elíptica, la ecuación de calor o difusión como ejemplo de la ecuación diferencial parcial parabólica y la ecuación de onda como ejemplo de una ecuación diferencial parcial hiperbólica. Se analizaron las aproximaciones de diferencias finitas para estos tres ejemplos.

La ecuación de Poisson en un rectángulo requería la solución de un sistema lineal grande y disperso, para el que se recomiendan técnicas iterativas, como el método SOR. Los métodos de diferencias progresivas y de Richardson tenían problemas de estabilidad, por lo que se introdujeron los métodos de diferencias regresivas y de Crank-Nicolson. A pesar de que se debe resolver un sistema lineal tridiagonal en cada paso con estos métodos implícitos, son mucho más estables que los métodos explícitos de Richardson y de diferencia progresiva. El método de diferencias finitas para la ecuación de onda es explícito y también puede tener problemas de estabilidad para ciertas selecciones de discretización de tiempo y espacio.

En la última sección del capítulo, presentamos una introducción al método de elemento finito para ecuación diferencial parcial elíptica autoadjunta en un dominio polinomial. A pesar de que nuestros métodos funcionarán adecuadamente para los problemas y ejemplos del libro de texto, se requieren generalizaciones y modificaciones más poderosas de estas técnicas para aplicaciones comerciales.

Sólo hemos presentado una pequeña muestra de las muchas técnicas utilizadas para aproximar las soluciones de problemas que implican ecuaciones diferenciales parciales. Más información sobre el tema general se puede encontrar en Lapidus y Pinder [LP], Twizell [Tw], y el libro reciente de Morton y Mayers [MM]. Información sobre el software se puede encontrar en Rice y Boisvert [RB] y en Bank [Ban].

Los libros enfocados en los métodos de diferencias finitas incluyen Strikwerda [Stri], Thomas [Th] y Shashkov y Steinberg [ShS]. Strange y Fix [SF] y Zienkiewicz y Morgan [ZM] son buenas fuentes para información sobre el método de elementos finitos. Las ecuaciones dependientes del tiempo son abordadas en Schiesser [Schi] y en Gustafsson, Kreiss y Oliger [GKO]. Birkhoff y Lynch [BL] y Roache [Ro] analizan la solución de problemas elípticos.

Los métodos de múltiples cuadrículas utilizan aproximaciones de cuadrícula gruesa y técnicas iterativas para proporcionar aproximaciones para cuadrículas más finas. Las referencias sobre estas técnicas incluyen Briggs [Brigg], Mc Cormick [Mc] y Bramble [Bram].