Capítulo 5

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.1

1. Use el teorema 5.4 para mostrar que cada uno de los siguientes problemas tiene una sola solución y encuéntrela.

a. $y' = y\cos t,\ 0 \le t \le 1,\ y(0) = 1.$

b. $y' = \dfrac{2}{t}y + t^2 e^t,\ 1 \le t \le 2,\ y(1) = 0.$

c. $y' = -\dfrac{2}{t}y + t^2 e^t,\ 1 \le t \le 2,\ y(1) = \sqrt{2}e.$

d. $y' = \dfrac{4t^3 y}{1+t^4},\ 0 \le t \le 1,\ y(0) = 1.$

2. Muestre que cada uno de los siguientes problemas de valor inicial tiene una única solución y encuéntrela. ¿El teorema 5.4 se puede aplicar en cada caso?

a. $y' = e^{t-y},\ 0 \le t \le 1,\ y(0) = 1.$

b. $y' = t^{-2}(\operatorname{sen} 2t - 2ty),\ 1 \le t \le 2,\ y(1) = 2.$

c. $y' = -y + ty^{1/2},\ 2 \le t \le 3,\ y(2) = 2.$

d. $y' = \dfrac{ty+y}{ty+t},\ 2 \le t \le 4,\ dy(2) = 4.$

3. Para cada selección de $f(t, y)$ proporcionada en las partes a)−d):

i. ¿f satisface la condición de Lipschitz en $D = \{(t, y) \mid 0 \le t \le 1, -\infty < y < \infty\}$?

ii. ¿El teorema 5.6 se puede usar para mostrar que el problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1,$$

está bien planteado?

a. $f(t, y) = t^2 y + 1$ **b.** $f(t, y) = ty$ **c.** $f(t, y) = 1 - y$ **d.** $f(t, y) = -ty + \dfrac{4t}{y}$

4. Para cada selección de $f(t, y)$ proporcionada en las partes a)−d):

i. ¿f satisface la condición de Lipschitz en $D = \{(t, y) \mid 0 \le t \le 1, -\infty < y < \infty\}$?

ii. ¿El teorema 5.6 se puede utilizar para mostrar que el problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1,$$

está bien planteado?

a. $f(t, y) = e^{t-y}$

b. $f(t, y) = \dfrac{1+y}{1+t}$

c. $f(t, y) = \cos(yt)$

d. $f(t, y) = \dfrac{y^2}{1+t}$

5. Para los siguientes problemas de valor inicial, muestre que la ecuación dada define una solución de manera implícita. Aproxime $y(2)$ con el método de Newton.

a. $y' = -\dfrac{y^3+y}{(3y^2+1)t},\ 1 \le t \le 2, y(1) = 1; \quad y^3 t + yt = 2$

b. $y' = -\dfrac{y\cos t + 2te^y}{\operatorname{sen} t + t^2 e^y + 2},\ 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 0;\ y \operatorname{sen} t + t^2 e^y + 2y = 1$

6. Suponga que la perturbación $\delta(t)$ es proporcional para t, es decir, $\delta(t) = \delta t$ para alguna constante δ. Muestre directamente que los siguientes problemas de valor inicial están bien planteados.

a. $y' = 1 - y, 0 \le t \le 2, y(0) = 0$

b. $y' = t + y, 0 \le t \le 2, y(0) = -1$

c. $y' = \dfrac{2}{t}y + t^2 e^t, 1 \le t \le 2, y(1) = 0$

d. $y' = -\dfrac{2}{t}y + t^2 e^t, 1 \le t \le 2, y(1) = \sqrt{2}e$

EJERCICIOS TEÓRICOS

7. Muestre que cualquier punto en la recta que pasa por (t_1, y_1) y (t_2, y_2) corresponde a $((1-\lambda)t_1+\lambda t_2, (1-\lambda)y_1+\lambda y_2)$ para alguna elección de λ.

8. Pruebe el teorema 5.3 al aplicar el teorema de valor medio 1.8 para $f(t, y)$, al mantener t fija.

9. Muestre que, para cualquier constante a y b, el conjunto $D = \{ (t, y) \mid a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty \}$ es convexo.

10. El *método de Picard* para resolver el problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha,$$

se describe como sigue: Sea $y_0(t) = \alpha$ para cada t en $[a, b]$. Defina una sucesión $\{y_k(t)\}$ de funciones mediante

$$y_k(t) = \alpha + \int_a^t f(\tau, y_{k-1}(\tau))\, d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

a. Integre $y' = f(t, y(t))$ y utilice la condición inicial para deducir el método de Picard.

b. Genere $y_0(t), y_1(t), y_2(t)$, y $y_3(t)$ para el problema de valor inicial

$$y' = -y + t + 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1.$$

c. Compare el resultado en la parte b) para las series de Maclaurin de la solución real $y(t) = t + e^{-t}$.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Los métodos numéricos siempre se preocupan por resolver problemas perturbados ya que el error de redondeo introducido en la representación perturba el problema original. ¿Cómo puede decidir si su aproximación para un problema perturbado aproxima con precisión la solución al problema original?

2. El siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

en donde f es la función

$$f(x, y) = \begin{cases} y \operatorname{sen}(1/y) & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

es continua, pero no es Lipschitz alrededor de (0,0). ¿Por qué la solución es única?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.2

1. Use el método de Euler para aproximar las soluciones para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.

a. $y' = te^{3t} - 2y, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 0,$ con $h = 0.5$

b. $y' = 1 + (t - y)^2, \quad 2 \leq t \leq 3, \quad y(2) = 1,$ con $h = 0.5$

c. $y' = 1 + y/t, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 2,$ con $h = 0.25$

d. $y' = \cos 2t + \operatorname{sen} 3t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1,$ con $h = 0.25$

2. Utilice el método de Euler para aproximar las soluciones para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.

a. $y' = e^{t-y}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1,$ con $h = 0.5$

b. $y' = \dfrac{1+t}{1+y}, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 2,$ con $h = 0.5$

c. $y' = -y + ty^{1/2}, \quad 2 \leq t \leq 3, \quad y(2) = 2,$ con $h = 0.25$

d. $y' = t^{-2}(\operatorname{sen} 2t - 2ty), \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 2,$ con $h = 0.25$

3. Las soluciones reales para los problemas de valor inicial en el ejercicio 1 se proporcionan aquí. Compare el error real en cada paso con la cota de error.

a. $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$ **b.** $y(t) = t + \frac{1}{1-t}$

c. $y(t) = t \ln t + 2t$ **d.** $y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{4}{3}$

4. Las soluciones reales para los problemas de valor inicial en el ejercicio 2 se proporcionan aquí. Compare el error real en cada paso para con la cota de error si se puede aplicar el teorema 5.9.

a. $y(t) = \ln(e^t + e - 1)$ **b.** $y(t) = \sqrt{t^2 + 2t + 6} - 1$

c. $y(t) = \left(t - 2 + \sqrt{2}ee^{-t/2}\right)^2$ **d.** $y(t) = \frac{4 + \cos 2 - \cos 2t}{2t^2}$

5. Utilice el método de Euler para aproximar las soluciones para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.

a. $y' = y/t - (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 1,$ con $h = 0.1$
b. $y' = 1 + y/t + (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = 0,$ con $h = 0.2$
c. $y' = -(y+1)(y+3), \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = -2,$ con $h = 0.2$
d. $y' = -5y + 5t^2 + 2t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = \frac{1}{3},$ con $h = 0.1$

6. Use el método de Euler para aproximar las soluciones para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.

a. $y' = \frac{2 - 2ty}{t^2 + 1}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1,$ con $h = 0.1$
b. $y' = \frac{y^2}{1+t}, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = -(\ln 2)^{-1},$ con $h = 0.1$
c. $y' = t^{-1}(y^2 + y), \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = -2,$ con $h = 0.2$
d. $y' = -ty + 4ty^{-1}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1,$ con $h = 0.1$

7. Aquí se dan las soluciones reales para los problemas de valor inicial en el ejercicio 5. Calcule el error real en las aproximaciones del ejercicio 5.

a. $y(t) = \frac{t}{1 + \ln t}$ **b.** $y(t) = t\tan(\ln t)$

c. $y(t) = -3 + \frac{2}{1 + e^{-2t}}$ **d.** $y(t) = t^2 + \frac{1}{3}e^{-5t}$

8. Aquí se dan las soluciones reales para los problemas de valor inicial en el ejercicio 6. Calcule el error real en las aproximaciones del ejercicio 6.

a. $y(t) = \frac{2t + 1}{t^2 + 1}$ **b.** $y(t) = \frac{-1}{\ln(t+1)}$

c. $y(t) = \frac{2t}{1 - 2t}$ **d.** $y(t) = \sqrt{4 - 3e^{-t^2}}$

9. Dado el problema de valor inicial

$$y' = \frac{2}{t}y + t^2e^t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 0,$$

con solución exacta $y(t) = t^2(e^t - e)$:

a. Use el método de Euler con $h = 0.1$ para aproximar la solución y compárelos con los valores reales de y.

b. Utilice las respuestas generadas en la parte a) y la interpolación lineal para aproximar los siguientes valores de y, y compárelos con los valores reales.

i. $y(1.04)$ **ii.** $y(1.55)$ **iii.** $y(1.97)$

c. Calcule el valor de h necesario para $|y(t_i) - w_i| \le 0.1$, por medio de la ecuación (5.10).

10. Dado el problema del valor inicial

$$y' = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = -1,$$

con solución exacta $y(t) = -1/t$:

a. Use el método de Euler con $h = 0.05$ para aproximar la solución y compárelos con los valores reales de y.

b. Utilice las respuestas generadas en la parte a) y la interpolación lineal para aproximar los siguientes valores de y, y compárelos con los valores reales.

i. $y(1.052)$ **ii.** $y(1.555)$ **iii.** $y(1.978)$

c. Calcule el valor de h necesario para $|y(t_i) - w_i| \leq 0.05$, por medio de la ecuación (5.10).

11. Dado el problema de valor inicial

$$y' = -y + t + 1, \quad 0 \leq t \leq 5, \quad y(0) = 1,$$

con solución exacta $y(t) = e^{-t} + t$:

a. Aproxime $y(5)$ usando el método de Euler con $h = 0.2$, $h = 0.1$, y $h = 0.05$.

b. Determine el valor óptimo de h para usarlo en el cálculo de $y(5)$, al suponer que $\delta = 10^{-6}$ y que la ecuación (5.14) es válida.

12. Considere el problema de valor inicial

$$y' = -10y, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 1,$$

que tiene solución $y(t) = e^{-10t}$. ¿Qué pasa cuando se aplica el método de Euler a este problema con $h = 0.1$? ¿Esta conducta viola el teorema 5.9?

13. Utilice los resultados del ejercicio 5 y la interpolación lineal para aproximar los siguientes valores de $y(t)$. Compare las aproximaciones asignadas para los valores reales obtenidos mediante las funciones determinadas en el ejercicio 7.

a. $y(1.25)$ y $y(1.93)$ **b.** $y(2.1)$ y $y(2.75)$

c. $y(1.4)$ y $y(1.93)$ **d.** $y(0.54)$ y $y(0.94)$

14. Utilice los resultados del ejercicio 6 y la interpolación lineal para aproximar los siguientes valores de $y(t)$. Compare las aproximaciones logradas para los valores reales obtenidos mediante las funciones determinadas en el ejercicio 8.

a. $y(0.25)$ y $y(0.93)$ **b.** $y(1.25)$ y $y(1.93)$

c. $y(2.10)$ y $y(2.75)$ **d.** $y(0.54)$ y $y(0.94)$

15. Sea $E(h) = \dfrac{hM}{2} + \dfrac{\delta}{h}$.

a. Para el problema de valor inicial

$$y' = -y + 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 0,$$

calcule el valor de h para minimizar $E(h)$. Suponga $\delta = 5 \times 10^{-(n+1)}$ si usará aritmética de n dígitos en la parte c).

b. Para la h óptima calculada en la parte a), use la ecuación (5.13) para calcular el error mínimo obtenible.

c. Compare el error real obtenido con $h = 0.1$ y $h = 0.01$ para el error mínimo en la parte b). ¿Puede explicar los resultados?

EJERCICIOS APLICADOS

16. En un circuito con voltaje impreso $\mathcal{E}$ que tiene una resistencia R, inductancia L y capacitancia C en paralelo, la corriente i satisface la ecuación diferencial

$$\frac{di}{dt} = C\frac{d^2\mathcal{E}}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{1}{L}\mathcal{E}.$$

Suponga que $C = 0.3$ faradios, $R = 1.4$ ohms y $L = 1.7$ henrios, y que el voltaje está determinado por

$$\mathcal{E}(t) = e^{-0.06\pi t}\,\text{sen}(2t - \pi).$$

Si $i(0) = 0$, encuentre la corriente i para los valores $t = 0.1j$, donde $j = 0, 1, \ldots, 100$.

17. En un libro titulado *Looking at History Through Mathematics* (*Observando la historia a través de las matemáticas*), Rashevsky [Ra], pp. 103–110, propone un modelo para un problema relacionado con la producción de inconformistas en la sociedad. Suponga que una sociedad tiene una población de $x(t)$ individuos en el tiempo t, en años, y que todos los inconformistas que se unen a otros inconformistas tienen descendencia que también es inconformista, mientras una proporción fija r de todos los otros descendientes también son inconformistas. Si se supone que los índices de natalidad y mortalidad son las constantes b y d, respectivamente, y si los conformistas y los inconformistas se unen de manera aleatoria, el problema se puede expresar con las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx(t)}{dt} = (b-d)x(t) \quad \text{y} \quad \frac{dx_n(t)}{dt} = (b-d)x_n(t) + rb(x(t) - x_n(t)),$$

donde $x_n(t)$ denota el número de inconformistas en la población en el tiempo t.

a. Suponga que se introduce la variable $p(t) = x_n(t)/x(t)$ para representar la proporción de inconformistas en la sociedad en el tiempo t. Muestre que las ecuaciones pueden combinarse y simplificarse en la ecuación diferencial individual

$$\frac{dp(t)}{dt} = rb(1 - p(t)).$$

b. Al suponer que $p(0) = 0.01, b = 0.02, d = 0.015$, y $r = 0.1$, aproximan la solución $p(t)$ desde $t = 0$ hasta $t = 50$, cuando el tamaño de paso es $h = 1$ año.

c. Resuelva la ecuación diferencial $p(t)$ de manera exacta y compare su resultado en la parte b) cuando $t = 50$ con el valor exacto en ese tiempo.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Proporcione una descripción general del método de Euler mediante el sitio web http://www.mathscoop.com/calculus/differential-equations/euler-method.php como su punto de inicio. Observe cuidadosamente la medida del error. ¿Por qué este método no es práctico?

2. Describa la manera en la que se puede implementar el método de Euler en una hoja de cálculo, como Excel.

3. Use el método de Euler para aproximar una solución para el problema de valor inicial $dy/dt = e^t \cos t$ para t entre 0 y 5. Inicie con un tamaño de paso de 0.25, a continuación pruebe el tamaño de paso de 0.1 o incluso 0.05 o menor. Utilice una hoja de cálculo o un sistema de álgebra para computadora para los cálculos. ¿La solución es la que esperaba? ¿Qué está pasando y por qué?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.3

1. Use el método de Taylor de orden 2 para aproximar las soluciones para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.

a. $y' = te^{3t} - 2y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0, \text{ con } h = 0.5$

b. $y' = 1 + (t-y)^2, \quad 2 \le t \le 3, \quad y(2) = 1, \text{ con } h = 0.5$

c. $y' = 1 + y/t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2, \text{ con } h = 0.25$

d. $y' = \cos 2t + \operatorname{sen} 3t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1, \text{ con } h = 0.25$

2. Utilice el método de Taylor de orden 2 para aproximar las soluciones para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.

a. $y' = e^{t-y}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1, \text{ con } h = 0.5$

b. $y' = \dfrac{1+t}{1+y}, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2, \text{ con } h = 0.5$

c. $y' = -y + ty^{1/2}, \quad 2 \le t \le 3, \quad y(2) = 2, \text{ con } h = 0.25$

d. $y' = t^{-2}(\operatorname{sen} 2t - 2ty), \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2, \text{ con } h = 0.25$

3. Repita el ejercicio 1 con el método de Taylor de orden 4.

4. Repita el ejercicio 2 con el método de Taylor de orden 4.

5. Utilice el método de Taylor de orden 2 para aproximar las soluciones para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.

a. $y' = y/t - (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 1.2, \quad y(1) = 1, \text{ con } h = 0.1$

b. $y' = \operatorname{sen} t + e^{-t}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0, \text{ con } h = 0.5$

c. $y' = (y^2 + y)/t, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = -2, \text{ con } h = 0.5$

d. $y' = -ty + 4ty^{-1}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1, \text{ con } h = 0.25$

6. Utilice el método de Taylor de orden 2 para aproximar las soluciones para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.

a. $y' = \dfrac{2 - 2ty}{t^2 + 1}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1, \text{ con } h = 0.1$

b. $y' = \dfrac{y^2}{1 + t}, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = -(\ln 2)^{-1}, \text{ con } h = 0.1$

c. $y' = (y^2 + y)/t, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = -2, \text{ con } h = 0.2$

d. $y' = -ty + 4t/y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1, \text{ con } h = 0.1$

7. Repita el ejercicio 5 con el método de Taylor de orden 4.

8. Repita el ejercicio 6 con el método de Taylor de orden 4.

9. Dado el problema de valor inicial

$$y' = \frac{2}{t}y + t^2 e^t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 0,$$

con solución exacta $y(t) = t^2(e^t - e)$:

a. Utilice el método de Taylor de orden 2 con $h = 0.1$ para aproximar la solución y compárela con los valores reales de y.

b. Use las respuestas generadas en la parte a) e interpolación lineal para aproximar y en los siguientes valores y compárelos con los valores reales de y.

i. $y(1.04)$ **ii.** $y(1.55)$ **iii.** $y(1.97)$

c. Utilice el método de Taylor de orden 4 con $h = 0.1$ para aproximar la solución y compárela con los valores reales de y.

d. Use las respuestas generadas en la parte c) y la interpolación cúbica por tramos de Hermite para aproximar y en los siguientes valores y compárelas con los valores reales de y.

i. $y(1.04)$ **ii.** $y(1.55)$ **iii.** $y(1.97)$

10. Dado el problema de valor inicial

$$y' = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = -1,$$

con solución exacta $y(t) = -1/t$:

a. Use el método de Taylor de orden 2 con $h = 0.05$ para aproximar la solución y compárela con los valores reales de y.

b. Use las respuestas generadas en la parte a) y la interpolación lineal para aproximar y en los siguientes valores, y compárelos con los valores reales de y.

i. $y(1.052)$ **ii.** $y(1.555)$ **iii.** $y(1.978)$

c. Utilice el método de Taylor de orden 4 con $h = 0.05$ para aproximar la solución y compárela con los valores reales de y.

d. Use las respuestas generadas en la parte c) y la interpolación cúbica por tramos de Hermite para aproximar y en los siguientes valores, y compárelos con los valores reales de y.

i. $y(1.052)$ **ii.** $y(1.555)$ **iii.** $y(1.978)$

11. Utilice el método de Taylor de orden 2 con $h = 0.1$ para aproximar la solución de

$$y' = 1 + t\operatorname{sen}(ty), \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0.$$

EJERCICIOS APLICADOS

12. Un proyectil de masa $m = 0.11$ kg disparado verticalmente hacia arriba con velocidad inicial $v(0) = 8$ m/s desacelera debido a la fuerza de gravedad $F_g = -mg$, y debido a la resistencia del aire, $F_r = -kv|v|$, donde $g = 9.8$ m/s^2 y $k = 0.002$ kg/m. La ecuación diferencial para la velocidad v está determinada por

$$mv' = -mg - kv|v|.$$

a. Encuentre la velocidad después de $0.1, 0.2, \ldots, 1.0$ s.

b. Para la décima de segundo más cercana, determine cuándo alcanza el proyectil su máxima altura y comienza a caer.

13. Un tanque grande almacena 1000 galones de agua que contienen 50 libras de sal disuelta. Suponga que una solución de agua salada con una concentración de 0.02 libras de sal por galón de agua fluye hacia el tanque a una velocidad de 5 galones por minuto. La solución en el tanque está bien agitada y fluye fuera de un orificio en el fondo del tanque a una velocidad constante de 3 galones por minuto.

Sea $x(t)$ la cantidad de sal en libras en el tanque en el tiempo t, donde $x(0) = 50$ libras. La ecuación diferencial que proporciona la razón de cambio $x'(t)$ de sal medida en libras por minuto en el tanque es

$$x'(t) = 0.1 - \frac{3x(t)}{1000 + 2t}.$$

a. Encuentre el momento en el que tanque almacenará 1 010 galones de agua salada.

b. Con el método de Taylor de orden 4 con $h = 0.5$, encuentre la concentración de sal cuando el tanque almacena 1 010 galones de agua.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Analice las similitudes y diferencias entre el método de Euler y el método de Taylor. ¿Un método es mejor que el otro?

2. Use el método de Taylor de orden cuatro para aproximar la solución al problema de valor inicial $dy/dt = e^t \operatorname{sen}(t)$, para t entre 0 y 5. Inicie con un tamaño de paso de 0.25, a continuación pruebe un tamaño de paso de 0.1 y 0.025. Use una hoja de cálculo o un sistema de álgebra para computadora para los cálculos. ¿La solución hace lo que usted esperaba? ¿Qué está pasando y por qué?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.4

1. Utilice el método modificado de Euler para aproximar las soluciones para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial y compare los resultados con los valores reales.

a. $y' = te^{3t} - 2y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0$, con $h = 0.5$; solución real $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$.

b. $y' = 1 + (t - y)^2, \quad 2 \le t \le 3, \quad y(2) = 1$, con $h = 0.5$; solución real $y(t) = t + \frac{1}{1-t}$.

c. $y' = 1 + y/t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2$, con $h = 0.25$; solución real $y(t) = t\ln t + 2t$.

d. $y' = \cos 2t + \operatorname{sen} 3t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$, con $h = 0.25$; solución real $y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{4}{3}$.

2. Use el método modificado de Euler para aproximar las soluciones para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial y compare los resultados con los valores reales.

a. $y' = e^{t-y}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$, con $h = 0.5$; solución real $y(t) = \ln(e^t + e - 1)$.

b. $y' = \dfrac{1+t}{1+y}, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2$, con $h = 0.5$; solución real $y(t) = \sqrt{t^2 + 2t + 6} - 1$.

c. $y' = -y + ty^{1/2}, \quad 2 \le t \le 3, \quad y(2) = 2$, con $h = 0.25$; solución real $y(t) = (t - 2 + \sqrt{2}ee^{-t/2})^2$.

d. $y' = t^{-2}(\operatorname{sen} 2t - 2ty), \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2$, con $h = 0.25$; solución real $y(t) = \dfrac{4 + \cos 2 - \cos 2t}{2t^2}$.

3. Utilice el método modificado de Euler para aproximar las soluciones para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial y compare los resultados con los valores reales.

a. $y' = y/t - (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 1$, con $h = 0.1$; solución real $y(t) = t/(1 + \ln t)$.

b. $y' = 1 + y/t + (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = 0$, con $h = 0.2$; solución real $y(t) = t \tan(\ln t)$.

c. $y' = -(y+1)(y+3), \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = -2$, con $h = 0.2$; solución real $y(t) = -3 + 2(1 + e^{-2t})^{-1}$.

d. $y' = -5y + 5t^2 + 2t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = \frac{1}{3}$, con $h = 0.1$; solución real $y(t) = t^2 + \frac{1}{3}e^{-5t}$.

4. Utilice el método modificado de Euler para aproximar las soluciones para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial y compare los resultados con los valores reales.

a. $y' = \dfrac{2 - 2ty}{t^2 + 1}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$, con $h = 0.1$; solución real $y(t) = \dfrac{2t + 1}{t^2 + 1}$.

b. $y' = \dfrac{y^2}{1 + t}, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = \frac{-1}{\ln 2}$, con $h = 0.1$; solución real $y(t) = \dfrac{-1}{\ln(t + 1)}$.

c. $y' = \dfrac{(y^2 + y)}{t}, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = -2$, con $h = 0.2$; solución real $y(t) = \dfrac{2t}{1 - 2t}$.

d. $y' = -ty + 4t/y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1$, con $h = 0.1$; solución real $y(t) = \sqrt{4 - 3e^{-t^2}}$.

5. Repita el ejercicio 1 usando el método de punto medio.
6. Repita el ejercicio 2 usando el método de punto medio.
7. Repita el ejercicio 3 usando el método de punto medio.
8. Repita el ejercicio 4 usando el método de punto medio.
9. Repita el ejercicio 1 usando el método de Heun.
10. Repita el ejercicio 2 usando el método de Heun.
11. Repita el ejercicio 3 usando el método de Heun.
12. Repita el ejercicio 4 usando el método de Heun.
13. Repita el ejercicio 1 usando el método Runge-Kutta de orden 4.
14. Repita el ejercicio 2 usando el método Runge-Kutta de orden 4.
15. Repita el ejercicio 3 usando el método Runge-Kutta de orden 4.
16. Repita el ejercicio 4 usando el método Runge-Kutta de orden 4.
17. Use los resultados del ejercicio 3 y la interpolación lineal para aproximar valores de $y(t)$ y compare los resultados para los valores reales.

a. $y(1.25)$ y $y(1.93)$ **b.** $y(2.1)$ y $y(2.75)$
c. $y(1.3)$ y $y(1.93)$ **d.** $y(0.54)$ y $y(0.94)$

18. Utilice los resultados del ejercicio 4 y la interpolación lineal para aproximar valores de $y(t)$ y compare los resultados con los valores reales.

a. $y(0.54)$ y $y(0.94)$ **b.** $y(1.25)$ y $y(1.93)$
c. $y(1.3)$ y $y(2.93)$ **d.** $y(0.54)$ y $y(0.94)$

19. Repita el ejercicio 17 usando los resultados del ejercicio 7.
20. Repita el ejercicio 18 usando los resultados del ejercicio 8.
21. Repita el ejercicio 17 usando los resultados del ejercicio 11.
22. Repita el ejercicio 18 usando los resultados del ejercicio 12.
23. Repita el ejercicio 17 usando los resultados del ejercicio 15.
24. Repita el ejercicio 18 usando los resultados del ejercicio 16.
25. Use los resultados del ejercicio 15 y la interpolación cúbica de Hermite para aproximar los valores de $y(t)$, y compare las aproximaciones para los valores reales.

a. $y(1.25)$ y $y(1.93)$ **b.** $y(2.1)$ y $y(2.75)$
c. $y(1.3)$ y $y(1.93)$ **d.** $y(0.54)$ y $y(0.94)$

26. Utilice los resultados del ejercicio 16 y la interpolación cúbica de Hermite para aproximar los valores de $y(t)$ y compare las aproximaciones para los valores reales.

a. $y(0.54)$ y $y(0.94)$ **b.** $y(1.25)$ y $y(1.93)$
c. $y(1.3)$ y $y(2.93)$ **d.** $y(0.54)$ y $y(0.94)$

EJERCICIOS APLICADOS

27. La reacción química irreversible en la que dos moléculas de dicromato de potasio sólido ($K_2Cr_2O_7$), dos moléculas de agua (H_2O), y tres átomos de sulfuro sólido (S) se combinan para producir tres moléculas del gas de dióxido de sulfuro (SO_2), cuatro moléculas de hidróxido de potasio sólido (KOH), y dos moléculas de óxido crómico sólido (Cr_2O_3) se puede representar de manera simbólica mediante la *ecuación estequiométrica*:

$$2K_2Cr_2O_7 + 2H_2O + 3S \longrightarrow 4KOH + 2Cr_2O_3 + 3SO_2.$$

Si n_1 moléculas de $K_2Cr_2O_7$, n_2 moléculas de H_2O, y n_3 moléculas de S están originalmente disponibles, la siguiente ecuación diferencial describe la cantidad $x(t)$ de KOH después del tiempo t:

$$\frac{dx}{dt} = k\left(n_1 - \frac{x}{2}\right)^2\left(n_2 - \frac{x}{2}\right)^2\left(n_3 - \frac{3x}{4}\right)^3,$$

donde k es la velocidad constante de la reacción. Si $k = 6.22 \times 10^{-19}$, $n_1 = n_2 = 2 \times 10^3$, y $n_3 = 3 \times 10^3$, use el método Runge-Kutta de orden 4 para determinar la forma en la que muchas unidades de hidróxido de potasio se habrán formado después de 0.2 s.

28. El agua fluye desde un tanque cónico invertido con un orificio circular a una velocidad de

$$\frac{dx}{dt} = -0.6\pi r^2\sqrt{2g}\frac{\sqrt{x}}{A(x)},$$

donde r es el radio del orificio, x es la altura del nivel de líquido desde el vértice del cono y $A(x)$ es el área de la sección transversal del tanque x unidades por encima del orificio. Suponga que $r = 0.1$ pies, $g = 32.1$ pies/s^2, y el tanque tiene un nivel inicial de agua de 8 pies y un volumen inicial de $512(\pi/3)$ pies^3. Utilice el método Runge-Kutta de orden 4 para encontrar lo siguiente:

a. El nivel de agua después de 10 min con $h = 20$ s.
b. Cuándo se vaciará el tanque, con una exactitud de 1 min.

EJERCICIOS TEÓRICOS

29. Muestre que el método de punto medio y el método modificado de Euler dan las mismas aproximaciones para el problema de valor inicial

$$y' = -y + t + 1, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1,$$

para cualquier selección de h. ¿Por qué esto es verdad?

30. Muestre que el método de diferencia

$$w_0 = \alpha,$$
$$w_{i+1} = w_i + a_1 f(t_i, w_i) + a_2 f(t_i + \alpha_2, w_1 + \delta_2 f(t_i, w_i)),$$

para cada $i = 0, 1, \ldots, N-1$, no puede tener error de truncamiento local $O(h^3)$ para ninguna elección de constantes a_1, a_2, α_2, y δ_2.

31. Muestre que el método de Heun se puede expresar en forma de diferencia, similar al método Runge-Kutta de orden cuatro, ya que

$$w_0 = \alpha,$$
$$k_1 = hf(t_i, w_i),$$
$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{3}, w_i + \frac{1}{3}k_1\right),$$
$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{2h}{3}, w_i + \frac{2}{3}k_2\right),$$
$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_3),$$

para cada $i = 0, 1, \ldots, N-1$.

32. El método Runge-Kutta de orden 4 se puede escribir de la forma

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \alpha, \\
w_{i+1} &= w_i + \frac{h}{6} f(t_i, w_i) + \frac{h}{3} f(t_i + \alpha_1 h, w_i + \delta_1 h f(t_i, w_i)) \\
&\quad + \frac{h}{3} f(t_i + \alpha_2 h, w_i + \delta_2 h f(t_i + \gamma_2 h, w_i + \gamma_3 h f(t_i, w_i))) \\
&\quad + \frac{h}{6} f(t_i + \alpha_3 h, w_i + \delta_3 h f(t_i + \gamma_4 h, w_i + \gamma_5 h f(t_i + \gamma_6 h, w_i + \gamma_7 h f(t_i, w_i)))).
\end{aligned}
$$

Encuentre los valores de las constantes

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_4,\ \gamma_5,\ \gamma_6,\ \text{y}\ \gamma_7.$$

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Describa el método de punto medio y el método modificado de Euler. ¿Cuál es la relación entre ellos?

2. En muchos de los métodos analizados hasta ahora, conforme h disminuye, los cálculos aumentan, pero son más precisos. Sin embargo, disminuir demasiado h podría causar errores significativos. ¿Por qué sucede esto?

3. Analice la manera en la que una hoja de cálculo se puede utilizar para implementar el método Runge-Kutta.

4. Analice las diferencias entre el método Runge-Kutta y el método de Euler.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.5

1. Use el método Runge-Kutta-Fehlberg con tolerancia $TOL = 10^{-4}$, $hmáx = 0.25$, y $hmín = 0.05$ para aproximar las soluciones de los siguientes problemas de valor inicial. Compare los resultados con los valores reales.

a. $y' = te^{3t} - 2y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0;$ solución real $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$.

b. $y' = 1 + (t - y)^2, \quad 2 \le t \le 3, \quad y(2) = 1;$ solución real $y(t) = t + 1/(1 - t)$.

c. $y' = 1 + y/t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2;$ solución real $y(t) = t \ln t + 2t$.

d. $y' = \cos 2t + \operatorname{sen} 3t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1;$ solución real $y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{4}{3}$.

2. Utilice el método Runge-Kutta-Fehlberg $TOL = 10^{-4}$ para aproximar la solución de los siguientes problemas de valor inicial.

a. $y' = (y/t)^2 + y/t, \quad 1 \le t \le 1.2, \quad y(1) = 1,$ con $hmáx = 0.05$ y $hmín = 0.02$.

b. $y' = \operatorname{sen} t + e^{-t}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0,$ con $hmáx = 0.25$ y $hmín = 0.02$.

c. $y' = (y^2 + y)/t, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = -2,$ con $hmáx = 0.5$ y $hmín = 0.02$.

d. $y' = t^2, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0,$ con $hmáx = 0.5$ y $hmín = 0.02$.

3. Utilice el método Runge-Kutta-Fehlberg con tolerancia $TOL = 10^{-6}$, $hmáx = 0.5$, y $hmín = 0.05$ para aproximar las soluciones a los siguientes problemas de valor inicial. Compare los resultados con los valores reales.

a. $y' = y/t - (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 4, \quad y(1) = 1;$ solución real $y(t) = t/(1 + \ln t)$.

b. $y' = 1 + y/t + (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = 0;$ solución real $y(t) = t \tan(\ln t)$.

c. $y' = -(y+1)(y+3), \quad 0 \le t \le 3, \quad y(0) = -2;$ solución real $y(t) = -3 + 2(1 + e^{-2t})^{-1}$.

d. $y' = (t + 2t^3)y^3 - ty, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = \frac{1}{3};$ solución real $y(t) = (3 + 2t^2 + 6e^{t^2})^{-1/2}$.

4. Utilice el método Runge-Kutta-Fehlberg con $TOL = 10^{-6}$, $hmáx = 0.5$, y $hmín = 0.05$ para aproximar las soluciones para los siguientes problemas de valor inicial. Compare los resultados con los valores reales.

a. $y' = \frac{2-2ty}{t^2+1}$, $0 \leq t \leq 3$, $y(0) = 1$; solución real $y(t) = (2t+1)/(t^2+1)$.

b. $y' = \frac{y^2}{1+t}$, $1 \leq t \leq 4$, $y(1) = -(\ln 2)^{-1}$; solución real $y(t) = \frac{-1}{\ln(t+1)}$.

c. $y' = -ty + 4t/y$, $0 \leq t \leq 1$, $y(0) = 1$; solución real $y(t) = \sqrt{4 - 3e^{-t^2}}$.

d. $y' = -y + ty^{1/2}$, $2 \leq t \leq 4$, $y(2) = 2$; solución real $y(t) = (t - 2 + \sqrt{2}e\, e^{-t/2})^2$.

EJERCICIOS APLICADOS

5. En la teoría de la propagación de enfermedad contagiosa (consulte [Ba1] o [Ba2]), una ecuación diferencial relativamente fundamental se puede utilizar para predecir el número de individuos de la población infectados en cualquier tiempo, siempre que se hagan las suposiciones de simplificación adecuadas. En particular, suponga que todos los individuos en una población fija tienen la misma probabilidad de resultar infectados y, una vez que lo son, permanecer en ese estado. Suponga que $x(t)$ denota el número de individuos susceptibles en el tiempo t y $y(t)$ denota el número de individuos infectados. Es razonable suponer que la velocidad con que cambia el número de individuos infectados es proporcional al producto de $x(t)$ y $y(t)$ porque la velocidad depende tanto del número de individuos infectados como del número de individuos susceptibles presentes en ese tiempo. Si la población es suficientemente grande como para suponer que $x(t)$ y $y(t)$ son variables continuas, el problema se puede expresar como

$$y'(t) = kx(t)y(t),$$

donde k es una constante y $x(t) + y(t) = m$, la población total. Esta ecuación se puede reescribir para que contenga solamente $y(t)$ como

$$y'(t) = k(m - y(t))y(t).$$

a. Suponiendo que $m = 100\,000$, $y(0) = 1000$, que $k = 2 \times 10^{-6}$, y que el tiempo se mide en días, encuentre una aproximación para el número de individuos infectados al cabo de 30 días.

b. La ecuación diferencial en la parte a) recibe el nombre de *ecuación de Bernoulli* y se puede transformar en una ecuación diferencial lineal en $u(t) = (y(t))^{-1}$. Utilice esta técnica para encontrar la solución exacta para la ecuación, bajo las mismas suposiciones de la parte a) y compare el valor verdadero de $y(t)$ con la aproximación aquí dada. ¿Qué es $\lim_{t\to\infty} y(t)$? ¿Esto concuerda con su intuición?

6. En el ejercicio previo, todos los individuos infectados permanecieron en la población para propagar la enfermedad. Una propuesta más realista es introducir una tercera variable $z(t)$ para representar el número de individuos retirados de la población afectada en un tiempo t determinado mediante aislamiento, recuperación e inmunidad consiguiente o muerte. Naturalmente, esto complica bastante el problema, pero se puede mostrar (consulte [Ba2]) que es posible proporcionar una solución aproximada de la forma

$$x(t) = x(0)e^{-(k_1/k_2)z(t)} \quad \text{y} \quad y(t) = m - x(t) - z(t),$$

donde k_1 es la rapidez de infección, k_2 es la rapidez de aislamiento y $z(t)$ se determina a partir de la ecuación diferencial

$$z'(t) = k_2\left(m - z(t) - x(0)e^{-(k_1/k_2)z(t)}\right).$$

Los autores no están conscientes de ninguna técnica para resolver este problema directamente, por lo que se debe aplicar un procedimiento numérico. Encuentre una aproximación para $z(30)$, $y(30)$, y $x(30)$, al suponer que $m = 100000$, $x(0) = 99\,000$, $k_1 = 2 \times 10^{-6}$, y $k_2 = 10^{-4}$.

EJERCICIOS TEÓRICOS

7. El método Runge-Kutta-Verner (consulte [Ve]) está basado en las fórmulas

$$w_{i+1} = w_i + \frac{13}{160}k_1 + \frac{2375}{5984}k_3 + \frac{5}{16}k_4 + \frac{12}{85}k_5 + \frac{3}{44}k_6 \quad \text{y}$$

$$\tilde{w}_{i+1} = w_i + \frac{3}{40}k_1 + \frac{875}{2244}k_3 + \frac{23}{72}k_4 + \frac{264}{1955}k_5 + \frac{125}{11592}k_7 + \frac{43}{616}k_8,$$

donde

$$k_1 = hf(t_i, w_i),$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{6}, w_i + \frac{1}{6}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{4h}{15}, w_i + \frac{4}{75}k_1 + \frac{16}{75}k_2\right),$$

$$k_4 = hf\left(t_i + \frac{2h}{3}, w_i + \frac{5}{6}k_1 - \frac{8}{3}k_2 + \frac{5}{2}k_3\right),$$

$$k_5 = hf\left(t_i + \frac{5h}{6}, w_i - \frac{165}{64}k_1 + \frac{55}{6}k_2 - \frac{425}{64}k_3 + \frac{85}{96}k_4\right),$$

$$k_6 = hf\left(t_i + h, w_i + \frac{12}{5}k_1 - 8k_2 + \frac{4015}{612}k_3 - \frac{11}{36}k_4 + \frac{88}{255}k_5\right),$$

$$k_7 = hf\left(t_i + \frac{h}{15}, w_i - \frac{8263}{15000}k_1 + \frac{124}{75}k_2 - \frac{643}{680}k_3 - \frac{81}{250}k_4 + \frac{2484}{10625}k_5\right),$$

y

$$k_8 = hf\left(t_i + h, w_i + \frac{3501}{1720}k_1 - \frac{300}{43}k_2 + \frac{297275}{52632}k_3 - \frac{319}{2322}k_4 + \frac{24068}{84065}k_5 + \frac{3850}{26703}k_7\right).$$

El método de sexto orden $\tilde{w}_{i+1}$ se usa para calcular el error en el método de quinto orden w_{i+1}. Construya un algoritmo similar al algoritmo de Runge-Kutta-Fehlberg y repita el ejercicio 3 con este nuevo método.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. El método Runge-Kutta-Fehlberg es adaptable, ¿Qué significa esto?
2. ¿Qué es el método RK56 y cómo difiere del método RKF45?
3. ¿Qué es el método Runge-Kutta-Marson y cómo difiere del método Runge-Kutta-Fehlberg?
4. ¿Qué es el cuadro de Butcher y cómo se relaciona con los métodos de Runge-Kutta?
5. El método Runge-Kutta-Fehlberg tiene dos métodos: uno de orden 4 y el otro de orden 5. Analice el cuadro ampliado de Butcher para cada uno.
6. Cuando se ha controlado el error, uno tiene una aproximación a partir de un método de orden 4 y otra a partir del método de orden 5. El procedimiento acepta la aproximación a partir del método de orden 4. ¿Por qué no aceptar la aproximación a partir del método de orden 5 en su lugar?
7. Un método Runge-Kutta se identifica de manera única mediante su cuadro de Butcher. Describa el cuadro de Butcher para el método Runge-Kutta-Verner descrito en el ejercicio 7.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.6

1. Use todos los métodos de Adams–Bashforth para aproximar las soluciones para los siguientes problemas de valor inicial. En cada caso, utilice los valores iniciales exactos y compare los resultados con los valores reales.
   a. $y' = te^{3t} - 2y, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 0,$ con $h = 0.2;$ solución real $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}.$
   b. $y' = 1 + (t - y)^2, \quad 2 \leq t \leq 3, \quad y(2) = 1,$ con $h = 0.2;$ solución real $y(t) = t + \frac{1}{1-t}.$
   c. $y' = 1 + y/t, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 2,$ con $h = 0.2;$ solución real $y(t) = t \ln t + 2t.$
   d. $y' = \cos 2t + \operatorname{sen} 3t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1,$ con $h = 0.2;$ solución real $y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{4}{3}.$

2. Use todos los métodos de Adams–Bashforth para aproximar las soluciones para los siguientes problemas de valor inicial. En cada caso, utilice los valores iniciales exactos y compare los resultados con los valores reales.

a. $y' = 1 + y/t + (y/t)^2$, $1 \le t \le 1.5$, $y(1) = 0$, con $h = 0.1$; solución real $y(t) = t\ \tan(\ln t)$.

b. $y' = \operatorname{sen} t + e^{-t}$, $0 \le t \le 0.5$, $y(0) = 0$, con $h = 0.1$; solución real $y(t) = 2 - \cos t - e^{-t}$.

c. $y' = \frac{y+1}{t}$, $1 \le t \le 1.5$, $y(1) = 1$, con $h = 0.1$; solución real $y(t) = 2t - 1$.

d. $y' = t^2$, $0 \le t \le 0.5$, $y(0) = 0$, con $h = 0.1$; solución real $y(t) = \frac{1}{3}t^3$.

3. Use cada uno de los métodos de Adams-Bashforth para aproximar las soluciones para los siguientes problemas de valor inicial. En cada caso, utilice los valores iniciales obtenidos a partir del método Runge-Kutta de orden cuatro. Compara los resultados con los valores reales.

a. $y' = y/t - (y/t)^2$, $1 \le t \le 2$, $y(1) = 1$, con $h = 0.1$; solución real $y(t) = \dfrac{t}{1 + \ln t}$.

b. $y' = 1 + y/t + (y/t)^2$, $1 \le t \le 3$, $y(1) = 0$, con $h = 0.2$; solución real $y(t) = t \tan(\ln t)$.

c. $y' = -(y + 1)(y + 3)$, $0 \le t \le 2$, $y(0) = -2$, con $h = 0.1$; solución real $y(t) = -3 + 2/(1 + e^{-2t})$.

d. $y' = -5y + 5t^2 + 2t$, $0 \le t \le 1$, $y(0) = 1/3$, con $h = 0.1$; solución real $y(t) = t^2 + \frac{1}{3}e^{-5t}$.

4. Use cada uno de los métodos de Adams-Bashforth para aproximar las soluciones para los siguientes problemas de valor inicial. En cada caso, utilice los valores iniciales obtenidos a partir del método Runge-Kutta de orden cuatro. Compare los resultados con los valores reales.

a. $y' = \dfrac{2 - 2ty}{t^2 + 1}$, $0 \le t \le 1$, $y(0) = 1$, con $h = 0.1$ solución real $y(t) = \dfrac{2t + 1}{t^2 + 1}$.

b. $y' = \dfrac{y^2}{1 + t}$, $1 \le t \le 2$, $y(1) = \frac{-1}{\ln 2}$, con $h = 0.1$ solución real $y(t) = \dfrac{-1}{\ln(t + 1)}$.

c. $y' = (y^2 + y)/t$, $1 \le t \le 3$, $y(1) = -2$, con $h = 0.2$ solución real $y(t) = \dfrac{2t}{1 - 2t}$.

d. $y' = -ty + 4t/y$, $0 \le t \le 1$, $y(0) = 1$, con $h = 0.1$ solución real $y(t) = \sqrt{4 - 3e^{-t^2}}$.

5. Use todos los métodos de Adams-Moulton para aproximar las soluciones para los ejercicios 1a), 1c) y 1d). En cada caso, utilice los valores iniciales exactos y resuelva de manera explícita para w_{i+1}. Compare los resultados con los valores reales.

6. Use todos los métodos de Adams-Moulton para aproximar las soluciones para los ejercicios 2b), 2c) y 2d). En cada caso, utilice los valores iniciales exactos y resuelva de manera explícita para w_{i+1}. Compare los resultados con los valores reales.

7. Use el algoritmo 5.4 para aproximar las soluciones para los problemas en el ejercicio 1.

8. Use el algoritmo 5.4 para aproximar las soluciones a los problemas del valor inicial en el ejercicio 2.

9. Use el algoritmo 5.4 para aproximar las soluciones a los problemas del valor inicial en el ejercicio 3.

10. Use el algoritmo 5.4 para aproximar las soluciones a los problemas del valor inicial en el ejercicio 4.

11. Use el método indicador corrector de Milne-Simpson para aproximar las soluciones a los problemas de valor inicial en el ejercicio 3.

12. Use el método indicador-corrector de Milne-Simpson para aproximar las soluciones a los problemas de valor inicial en el ejercicio 4.

13. El problema de valor inicial

$$y' = e^y, \quad 0 \le t \le 0.20, \quad y(0) = 1,$$

tiene la solución

$$y(t) = 1 - \ln(1 - et).$$

La aplicación del método Adams-Moulton de tres pasos en este problema es equivalente a encontrar el punto fijo w_{i+1} de

$$g(w) = w_i + \frac{h}{24}\left(9e^w + 19e^{w_i} - 5e^{w_{i-1}} + e^{w_{i-2}}\right).$$

a. Con $h = 0.01$. obtenga w_{i+1} por medio de iteración funcional para $i = 2, \ldots, 19$ usando los valores iniciales exactos w_0, w_1, y w_2. En cada paso, utilice w_i para aproximar inicialmente w_{i+1}.

b. ¿El método de Newton acelera la convergencia sobre iteración funcional?

EJERCICIOS APLICADOS

14. La ecuación diferencial de Gompertz

$$N'(t) = \alpha \ln \frac{K}{N(t)} N(t)$$

sirve como modelo para el crecimiento de tumores, donde $N(t)$ es el número de células en un tumor en el tiempo t. El número máximo de células que puede estar respaldado es K y α es la constante relacionada con la habilidad proliferativa de células.

En un tipo particular de cáncer, $\alpha = 0.0439$, $k = 12000$, y t se mide en meses. En el tiempo $(t = 0)$ el tumor se detecta, $N(0) = 4000$. Con el método indicador-corrector de Adams con $h = 0.5$, encuentre el número de meses para que $N(t) = 11000$ células, el cual es el número letal para este cáncer.

EJERCICIOS TEÓRICOS

15. Cambie el algoritmo 5.4 de tal forma que el corrector se puede iterar para un número determinado p de iteraciones. Repita el ejercicio 9 con $p = 2, 3$ y 4 iteraciones. ¿Qué elección de p da la mejor respuesta para cada problema de valor inicial?

16. **a.** Derive el método de dos pasos de Adams-Bashforth mediante la forma de Lagrange del polinomio de interpolación.

b. Derive el método de dos pasos de Adams-Bashforth mediante la forma de diferencia regresiva de Newton del polinomio de interpolación.

17. Derive el método de tres pasos de Adams-Bashforth con el siguiente método. Establezca

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + ahf(t_i, y(t_i)) + bhf(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + chf(t_{i-2}, y(t_{i-2})).$$

Amplíe $y(t_{i+1})$, $f(t_{i-2}, y(t_{i-2}))$ y $f(t_{i-1}, y(t_{i-1}))$ en la serie de Taylor sobre $(t_i, y(t_i))$ y equipare los coeficientes de h, h^2 y h^3 para obtener a, b y c.

18. Derive el método de dos pasos de Adams–Moulton y su error de truncamiento local por medio de una forma adecuada de un polinomio de interpolación.

19. Derive el método de Simpson al aplicar la regla de Simpson a la integral

$$y(t_{i+1}) - y(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\, dt.$$

20. Derive el método de Milne al aplicar la fórmula abierta de Newton-Cotes (4.29) a la integral

$$y(t_{i+1}) - y(t_{i-3}) = \int_{t_{i-3}}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\, dt.$$

21. Verifique las entradas en la tabla 5.12 en la página 305.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. El método indicador-corrector de Adams-Bashforth/Adams-Moulton requiere cuatro valores iniciales, uno de los cuales se da mediante la condición inicial. Normalmente, los otros valores iniciales se obtienen a partir del método Runge-Kutta de orden 4. ¿El método mejoraría con el uso de valores iniciales de orden superior?

2. Considere la posibilidad de cambiar el orden de un método Adams-Bashforth con base en su representación de diferencia regresiva. ¿Eso se puede hacer de manera eficiente?

3. Considere el método indicador-corrector con base en el uso de un método de un paso para proporcionar el predictor para el método corrector implícito multipasos. ¿Ésta es una combinación factible?

4. En un método indicador corrector, normalmente, existe solo una corrección por medio de un método implícito. Analice corregir más de una vez mediante la corrección anterior como una predicción nueva.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.7

1. Use el algoritmo indicador-corrector del tamaño de paso variable de Adams con tolerancia $TOL = 10^{-4}$, $hmáx = 0.25$, y $hmín = 0.025$ para aproximar las soluciones para los problemas de valor inicial determinados.

a. $y' = te^{3t} - 2y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0;$ solución real $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$.

b. $y' = 1 + (t - y)^2, \quad 2 \le t \le 3, \quad y(2) = 1;$ solución real $y(t) = t + 1/(1 - t)$.

c. $y' = 1 + y/t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2;$ solución real $y(t) = t \ln t + 2t$.

d. $y' = \cos 2t + \operatorname{sen} 3t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1;$ solución real $y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{4}{3}$.

2. Use el algoritmo indicador-corrector de tamaño de paso variable de Adams con tolerancia $TOL = 10^{-4}$ para aproximar las soluciones para los siguientes problemas de valor inicial:

a. $y' = (y/t)^2 + y/t, \quad 1 \le t \le 1.2, \quad y(1) = 1,$ con $hmáx = 0.05$ y $hmín = 0.01$.

b. $y' = \operatorname{sen} t + e^{-t}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0,$ con $hmáx = 0.2$ y $hmín = 0.01$.

c. $y' = (1/t)(y^2 + y), \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = -2,$ con $hmáx = 0.4$ y $hmín = 0.01$.

d. $y' = t^2, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0,$ con $hmáx = 0.5$ y $hmín = 0.02$.

3. Use el algoritmo indicador-corrector de tamaño de paso variable de Adams con tolerancia $TOL = 10^{-6}$, $hmáx = 0.5$, y $hmín = 0.02$ para aproximar las soluciones para los problemas de valor inicial determinados. Compare los resultados con los valores reales.

a. $y' = y/t - (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 4, \quad y(1) = 1;$ solución real $y(t) = t/(1 + \ln t)$.

b. $y' = 1 + y/t + (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = 0;$ solución real $y(t) = t \tan(\ln t)$.

c. $y' = -(y + 1)(y + 3), \quad 0 \le t \le 3, \quad y(0) = -2;$ solución real $y(t) = -3 + 2(1 + e^{-2t})^{-1}$.

d. $y' = (t + 2t^3)y^3 - ty, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = \frac{1}{3};$ solución real $y(t) = (3 + 2t^2 + 6e^{t^2})^{-1/2}$.

4. Use el algoritmo indicador-corrector del tamaño de paso variable de Adams con tolerancia $TOL = 10^{-5}$, $hmáx = 0.2$ y $hmín = 0.02$ para aproximar las soluciones para los problemas de valor inicial determinados. Compare los resultados con los valores reales.

a. $y' = \dfrac{2 - 2ty}{t^2 + 1}, \quad 0 \le t \le 3, \quad y(0) = 1;$ solución real $y(t) = (2t + 1)/(t^2 + 1)$.

b. $y' = \dfrac{y^2}{1 + t}, \quad 1 \le t \le 4, \quad y(1) = -(\ln 2)^{-1};$ solución real $y(t) = \dfrac{-1}{\ln(t + 1)}$.

c. $y' = -ty + \dfrac{4t}{y}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1;$ solución real $y(t) = \sqrt{4 - 3e^{-t^2}}$.

d. $y' = -y + ty^{1/2}, \quad 2 \le t \le 4, \quad y(2) = 2;$ solución real $y(t) = (t - 2 + \sqrt{2}\, e\, e^{-t/2})^2$.

EJERCICIOS APLICADOS

5. Un circuito eléctrico consiste en un capacitor de capacitancia constante de $C = 1.1$ faradios que está en serie con un resistor de resistencia constante $R_0 = 2.1$ ohms. Un voltaje $\mathcal{E}(t) = 110 \operatorname{sen} t$ se aplica en el tiempo $t = 0$. Cuando el resistor se calienta, la resistencia se vuelve una función de la corriente i,

$$R(t) = R_0 + ki, \quad \text{donde } k = 0.9,$$

y la ecuación diferencial para $i(t)$ se convierte en

$$\left(1 + \frac{2k}{R_0}i\right)\frac{di}{dt} + \frac{1}{R_0C}i = \frac{1}{R_0C}\frac{d\mathcal{E}}{dt}.$$

Encuentre $i(2)$, al suponer que $i(2) = 0$.

6. La temperatura dentro de una camioneta es $T(0) = 100°\text{F}$, mientras la temperatura afuera es una constante $M(t) = M_0 = 80°$. El propietario la aborda y configura el aire acondicionado en $T_1 = 66°$. Con base en la ley de enfriamiento de Newton, la temperatura $T(t)$ en el tiempo t satisface la ecuación diferencial

$$T'(t) = K_1[M(t) - T(t)] + K_2[T_1 - T(t)],$$

donde las constantes K_1 y K_2 están basadas en las propiedades de la camioneta y del aire acondicionado. Suponga que $K_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{hr}$ y $K_2 = \frac{7}{2}\frac{1}{hr}$. Encuentre cuánto tiempo tarda la temperatura en el interior de la camioneta en enfriarse a 70 ºF. Utilice $TOL = 0.1$, $hmín = 0.01$, y $hmáx = 0.2$ en el método indicador-corrector de tamaño de paso variable de Adams.

7. Sea $P(t)$ el número de individuos en una población en el tiempo t, medido en años. Si el índice de natalidad b es constante y el índice de mortalidad d es proporcional al tamaño de la población (debido a la superpoblación), entonces el índice de crecimiento de la población está dado por la **ecuación logística**

$$\frac{dP(t)}{dt} = bP(t) - k[P(t)]^2,$$

donde $d = kP(t)$. Suponga $P(0) = 50, 976$, $b = 2.9 \times 10^{-2}$, y $k = 1.4 \times 10^{-7}$ Encuentre la población después de cinco años.

EJERCICIOS TEÓRICOS

8. Construya un algoritmo indicador-corrector de tamaño de paso variable de Adams con base en el método Adams-Bashforth de cinco pasos y el método Adams-Moulton de cuatro pasos. Repita el ejercicio 3 con este método nuevo.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Analice la variación del orden además de la variación del tamaño de paso en un método indicador corrector con base en la representación de diferencia regresiva.

2. Analice la posibilidad de un método indicador-corrector de tamaño de paso variable que sólo permite reducir a la mitad o duplicar el tamaño de paso. ¿Esto es más fácil de implementar que el algoritmo 5.5?

3. Analice el error implicado en un método indicador-corrector de Milne-Simpson con valores iniciales Runge-Kutta en comparación con el error relacionado con el método indicador-corrector de tamaño de paso variable de Adams por medio de valores iniciales Runge-Kutta.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.8

1. Use el algoritmo de extrapolación con tolerancia $TOL = 10^{-4}$, $hmáx = 0.25$, y $hmín = 0.05$ para aproximar las soluciones para los siguientes problemas de valor inicial. Compare los resultados con los valores reales.

a. $y' = te^{3t} - 2y, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0;$ solución real $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$.

b. $y' = 1 + (t - y)^2, \quad 2 \le t \le 3, \quad y(2) = 1;$ solución real $y(t) = t + 1/(1 - t)$.

c. $y' = 1 + y/t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2;$ solución real $y(t) = t \ln t + 2t$.

d. $y' = \cos 2t + \operatorname{sen} 3t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1;$ solución real $y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{4}{3}$.

2. Utilice el algoritmo de extrapolación con tolerancia $TOL = 10^{-4}$ para aproximar las soluciones para los siguientes problemas de valor inicial.

a. $y' = (y/t)^2 + y/t, \quad 1 \le t \le 1.2, \quad y(1) = 1$, con $hmáx = 0.05$ y $hmín = 0.02$.

b. $y' = \operatorname{sen} t + e^{-t}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 0$, con $hmáx = 0.25$ y $hmín = 0.02$.

c. $y' = (y^2 + y)/t, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(0) = -2$, con $hmáx = 0.5$ y $hmín = 0.02$.

d. $y' = t^2, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 0$, con $hmáx = 0.5$ y $hmín = 0.02$.

3. Use el algoritmo de extrapolación con tolerancia $TOL = 10^{-6}$, $hmáx = 0.5$, y $hmín = 0.05$ para aproximar soluciones para los siguientes problemas de valor inicial. Compare los resultados con los valores reales.

a. $y' = y/t - (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 4, \quad y(1) = 1;$ solución real $y(t) = t/(1 + \ln t)$.

b. $y' = 1 + y/t + (y/t)^2, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = 0;$ solución real $y(t) = t \tan(\ln t)$.

c. $y' = -(y + 1)(y + 3), \quad 0 \le t \le 3, \quad y(0) = -2;$ solución real $y(t) = -3 + 2(1 + e^{-2t})^{-1}$.

d. $y' = (t + 2t^3)y^3 - ty, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = \frac{1}{3};$ solución real $y(t) = (3 + 2t^2 + 6e^{t^2})^{-1/2}$.

4. Use el algoritmo de extrapolación con tolerancia $TOL = 10^{-6}$, $hmáx = 0.5$, y $hmín = 0.05$ para aproximar soluciones para los siguientes problemas de valor inicial. Compare los resultados con los valores reales.

a. $y' = \dfrac{2-2ty}{t^2+1}, \quad 0 \le t \le 3, \quad y(0) = 1;$ solución real $y = \dfrac{(2t+1)}{(t^2+1)}$.

b. $y' = \dfrac{y^2}{1+t}, \quad 1 \le t \le 4, \quad y(1) = -(\ln 2)^{-1};$ solución real $y(t) = \dfrac{-1}{\ln(t+1)}$.

c. $y' = -ty + \dfrac{4t}{y}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = 1;$ solución real $y(t) = \sqrt{4 - 3e^{-t^2}}$.

d. $y' = -y + ty^{1/2}, \quad 2 \le t \le 4, \quad y(2) = 2;$ solución real $y(t) = (t - 2 + \sqrt{2}\, e\, e^{-t/2})^2$.

EJERCICIOS APLICADOS

5. Suponga que un lobo persigue a un conejo. La trayectoria del lobo hacia el conejo recibe el nombre de curva de persecución. Suponga que el lobo corre a una velocidad constante α y el conejo a una velocidad constante β. Si el lobo comienza en el tiempo $t = 0$ en el origen y el conejo en el punto $(0, 1)$. Suponga que el conejo sube por la línea $x = 1$. Si $(x(t), y(t))$ denota la posición del lobo en el tiempo t.

La ecuación diferencial que describe la curva de persecución es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[(1-x)^{-\beta/\alpha} - (1-x)^{\beta/\alpha}\right]$$

Suponga que el lobo corre a una velocidad de 35 millas por hora y el conejo a 25 millas por hora. Encuentre la ubicación $(x(t), y(t))$ en la que el lobo atrapa al conejo con el método de extrapolación con $TOL = 10^{-10}$, $hmín = 10^{-12}$, y $hmáx = 0.1$.

6. El modelo de población de Gompertz se describió en el ejercicio 26 de la sección 2.3. La población está provista por

$$P(t) = P_L e^{-ce^{-kt}}$$

donde P_L, c y $k > 0$ son constante y $P(t)$ es la población en el tiempo t. $P(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$P'(t) = k\,[\ln P_L - \ln P(t)]\, P(t).$$

a. Por medio de $t = 0$ y los datos provistos en la tabla en la página 103, aproxime P_L, c y k.

b. Aplique el método de extrapolación con $TOL = 1$ a la ecuación diferencial para aproximar $P(1990)$, $P(2000)$, y $P(2010)$.

c. Compare las aproximaciones para los valores de la función de Gompertz y la población real.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Compare la precisión del método de extrapolación en el algoritmo 5.6 para el método Runge-Kutta de cuarto orden para un número determinado de evaluaciones de función.

2. Analice las similitudes y diferencias entre el método en el algoritmo 5.6 y el método Bulirsch-Stoer.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.9

1. Use el método Runge-Kutta en los sistemas para aproximar las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden y compare los resultados con las soluciones reales.

a. $u_1' = 3u_1 + 2u_2 - (2t^2+1)e^{2t}, \quad u_1(0) = 1;$
$u_2' = 4u_1 + u_2 + (t^2 + 2t - 4)e^{2t}, \quad u_2(0) = 1; \quad 0 \le t \le 1; \quad h = 0.2;$
soluciones reales $u_1(t) = \frac{1}{3}e^{5t} - \frac{1}{3}e^{-t} + e^{2t}$ y $u_2(t) = \frac{1}{3}e^{5t} + \frac{2}{3}e^{-t} + t^2e^{2t}$.

b. $u_1' = -4u_1 - 2u_2 + \cos t + 4\,\text{sen}\, t, \quad u_1(0) = 0;$
$u_2' = 3u_1 + u_2 - 3\,\text{sen}\, t, \quad u_2(0) = -1; \quad 0 \le t \le 2; \quad h = 0.1;$
soluciones reales $u_1(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t} + \text{sen}\, t$ y $u_2(t) = -3e^{-t} + 2e^{-2t}$.

c. $u_1' = u_2, \quad u_1(0) = 1;$
$u_2' = -u_1 - 2e^t + 1, \quad u_2(0) = 0;$
$u_3' = -u_1 - e^t + 1, \quad u_3(0) = 1; \quad 0 \le t \le 2; \quad h = 0.5;$
soluciones reales $u_1(t) = \cos t + \operatorname{sen} t - e^t + 1, \quad u_2(t) = -\operatorname{sen} t + \cos t - e^t$, y $u_3(t) = -\operatorname{sen} t + \cos t$.

d. $u_1' = u_2 - u_3 + t, \quad u_1(0) = 1;$
$u_2' = 3t^2, \quad u_2(0) = 1;$
$u_3' = u_2 + e^{-t}, \quad u_3(0) = -1; \quad 0 \le t \le 1; \quad h = 0.1;$
soluciones reales $u_1(t) = -0.05t^5 + 0.25t^4 + t + 2 - e^{-t}, \quad u_2(t) = t^3 + 1$, y $u_3(t) = 0.25t^4 + t - e^{-t}$.

2. Use el método Runge-Kutta para sistemas para aproximar las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden y compare los resultados con las soluciones reales.

a. $u_1' = u_1 - u_2 + 2, \quad u_1(0) = -1;$
$u_2' = -u_1 + u_2 + 4t, \quad u_2(0) = 0; \quad 0 \le t \le 1; \quad h = 0.1;$
soluciones reales $u_1(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} + t^2 + 2t - \frac{1}{2}$ y $u_2(t) = \frac{1}{2}e^{2t} + t^2 - \frac{1}{2}$.

b. $u_1' = \frac{1}{9}u_1 - \frac{2}{3}u_2 - \frac{1}{9}t^2 + \frac{2}{3}, \quad u_1(0) = -3;$
$u_2' = u_2 + 3t - 4, \quad u_2(0) = 5; \quad 0 \le t \le 2; \quad h = 0.2;$
soluciones reales $u_1(t) = -3e^t + t^2$ y $u_2(t) = 4e^t - 3t + 1$.

c. $u_1' = u_1 + 2u_2 - 2u_3 + e^{-t}, \quad u_1(0) = 3;$
$u_2' = u_2 + u_3 - 2e^{-t}, \quad u_2(0) = -1;$
$u_3' = u_1 + 2u_2 + e^{-t}, \quad u_3(0) = 1; \quad 0 \le t \le 1; \quad h = 0.1;$
soluciones reales $u_1(t) = -3e^{-t} - 3\operatorname{sen} t + 6\cos t, \quad u_2(t) = \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{10}\operatorname{sen} t - \frac{21}{10}\cos t - \frac{2}{5}e^{2t}$, y $u_3(t) = -e^{-t} + \frac{12}{5}\cos t + \frac{9}{5}\operatorname{sen} t - \frac{2}{5}e^{2t}$.

d. $u_1' = 3u_1 + 2u_2 - u_3 - 1 - 3t - 2\operatorname{sen} t, \quad u_1(0) = 5;$
$u_2' = u_1 - 2u_2 + 3u_3 + 6 - t + 2\operatorname{sen} t + \cos t, \quad u_2(0) = -9;$
$u_3' = 2u_1 + 4u_3 + 8 - 2t, \quad u_3(0) = -5; \quad 0 \le t \le 2\ ; \quad h = 0.2;$
soluciones reales $u_1(t) = 2e^{3t} + 3e^{-2t} + t, \quad u_2(t) = -8e^{-2t} + e^{4t} - 2e^{3t} + \operatorname{sen} t$, y $u_3(t) = 2e^{4t} - 4e^{3t} - e^{-2t} - 2$.

3. Use el algoritmo del método Runge-Kutta destinado a sistemas para aproximar las siguientes ecuaciones diferenciales de orden superior y compare los resultados con las soluciones reales.

a. $y'' - 2y' + y = te^t - t, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = y'(0) = 0$, con $h = 0.1$; solución real $y(t) = \frac{1}{6}t^3e^t - te^t + 2e^t - t - 2$.

b. $t^2y'' - 2ty' + 2y = t^3 \ln t, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$, con $h = 0.1$; solución real $y(t) = \frac{7}{4}t + \frac{1}{2}t^3 \ln t - \frac{3}{4}t^3$.

c. $y''' + 2y'' - y' - 2y = e^t, \quad 0 \le t \le 3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 0$, con $h = 0.2$; solución real $y(t) = \frac{43}{36}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{4}{9}e^{-2t} + \frac{1}{6}te^t$.

d. $t^3y''' - t^2y'' + 3ty' - 4y = 5t^3 \ln t + 9t^3, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1, \quad y''(1) = 3$, con $h = 0.1$; solución real $y(t) = -t^2 + t\cos(\ln t) + t\operatorname{sen}(\ln t) + t^3 \ln t$.

4. Use el algoritmo del método Runge-Kutta para un sistemas para aproximar las siguientes ecuaciones diferenciales de orden superior y compare los resultados con las soluciones reales.

a. $y'' - 3y' + 2y = 6e^{-t}, \quad 0 \le t \le 1, \quad y(0) = y'(0) = 2$, con $h = 0.1$; solución real $y(t) = 2e^{2t} - e^t + e^{-t}$.

b. $t^2y'' + ty' - 4y = -3t, \quad 1 \le t \le 3, \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = 3$, con $h = 0.2$; solución real $y(t) = 2t^2 + t + t^{-2}$.

c. $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0, \quad 0 \le t \le 2, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 9$, con $h = 0.2$; solución real $y(t) = e^{-t} + e^{2t} + e^{-2t}$.

d. $t^3y''' + t^2y'' - 2ty' + 2y = 8t^3 - 2, \quad 1 \le t \le 2, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 8, \quad y''(1) = 6$, con $h = 0.1$; solución real $y(t) = 2t - t^{-1} + t^2 + t^3 - 1$.

EJERCICIOS APLICADOS

5. El estudio de modelos matemáticos para predecir la dinámica de una población de especies competentes tiene su origen en los trabajos independientes publicados en la primera época del siglo XX por A. J. Lotka y V. Volterra (consulte, por ejemplo, [Lo1], [Lo2] y [Vo]).

Considere el problema de predecir la población de dos especies, una de las cuales es un depredador, cuya población en el tiempo t es $x_2(t)$, que se alimenta de la otra, que es la presa, cuya población es $x_1(t)$. Supondremos que la presa siempre tiene un suministro de comida adecuado y que su índice de natalidad en cualquier tiempo es proporcional al número de presas vivas en ese momento; es decir, el índice de natalidad (presa) es $k_1x_1(t)$. El índice de mortalidad de la presa depende tanto del número de presas como de depredadores vivos en ese momento. Para simplicidad, suponemos un índice de mortalidad (presa) $= k_2x_1(t)x_2(t)$. El índice de natalidad del depredador, por otro lado, depende de su suministro de comida, $x_1(t)$, así como del número de depredadores disponible para propósitos de reproducción. Por esta razón, suponemos que el índice de natalidad (depredador) es $k_3x_1(t)x_2(t)$. El índice de mortalidad del depredador será tomado como simplemente proporcional al número de depredadores vivos en ese momento; es decir, el índice de mortalidad (depredador) $= k_4x_2(t)$.

Puesto que $x_1'(t)$ y $x_2'(t)$ representan el cambio en las poblaciones de presas y depredadores, respectivamente, en relación con el tiempo, el problema se expresa mediante el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales

$$x_1'(t) = k_1x_1(t) - k_2x_1(t)x_2(t) \quad \text{y} \quad x_2'(t) = k_3x_1(t)x_2(t) - k_4x_2(t).$$

Resuelva este sistema para $0 \leq t \leq 4$, al suponer que la población inicial de la presa es 1000 y que la del depredador es 500 y que las constantes son $k_1 = 3$, $k_2 = 0.002$, $k_3 = 0.0006$, y $k_4 = 0.5$. Bosqueje una gráfica de las soluciones para este problema, al graficar ambas poblaciones con el tiempo y describa el fenómeno físico representado. ¿Existe una solución estable para este modelo de población? En caso afirmativo, ¿Para qué valores de x_1 *y* x_2 la solución es estable?

6. En el ejercicio 5 consideramos el problema de predecir la población con un modelo depredador-presa. Otro problema de este tipo se preocupa por dos especies que compiten por el mismo suministro de comida. Si los números de especies vivas en el tiempo t se denotan a través de $x_1(t)$ y $x_2(t)$, con frecuencia se supone que, a pesar de que el índice de natalidad de cada una de las especies es simplemente proporcional al número de especies vivas en ese momento, el índice de mortalidad de cada especie depende de la población de ambas especies. Estableceremos que la población de un par particular de especies se describe mediante las ecuaciones

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t)[4 - 0.0003x_1(t) - 0.0004x_2(t)] \quad \text{y}$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_2(t)[2 - 0.0002x_1(t) - 0.0001x_2(t)].$$

Si se sabe que la población inicial de cada especie es 10 000, encuentre la solución de este sistema para $0 \leq t \leq 4$. ¿Existe una solución estable para este modelo de población? En caso afirmativo, ¿para qué valores de x_1 *y* x_2 la solución es estable?

7. Suponga que el péndulo que oscila descrito en el ejemplo principal de este capítulo es de 2 pies de largo y que $g = 32.17$ pies/s^2. Con $h = 0.1$ s, compare el ángulo θ obtenido para los siguientes problemas de valor inicial en $t = 0, 1,$ y 2 s.

a. $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{L}\,\text{sen}\,\theta = 0, \quad \theta(0) = \dfrac{\pi}{6}, \quad \theta'(0) = 0,$

b. $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{L}\theta = 0, \quad \theta(0) = \dfrac{\pi}{6}, \quad \theta'(0) = 0,$

EJERCICIOS TEÓRICOS

8. Cambie el algoritmo indicador-corrector de cuarto orden de Adams para obtener soluciones aproximadas para los sistemas de ecuaciones de primer orden.

9. Repita el ejercicio 1 con el algoritmo desarrollado en el ejercicio 5.

10. Repita el ejercicio 2 con el algoritmo desarrollado en el ejercicio 5.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. El siguiente sistema describe la reacción química de Robertson. Esto se considera un sistema "rígido" de EDO. ¿El algoritmo 5.7 se puede aplicar al sistema en $0 \leq x \leq 40$ con buenos resultados? ¿Por qué sí o por qué no?

$$y_1' = -0.04y_1 + 10^4 y_2 y_3$$
$$y_2' = -0.04y_1 - 10^4 y_2 y_3 - 3 * 10^7 y_2^2$$
$$y_3' = 3 * 10^7 y_2^2$$

2. ¿Cuáles son los métodos de Rosenbrock y por qué se utilizan?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.10

EJERCICIOS TEÓRICOS

1. Para probar el teorema 5.20, parte i), muestra que la hipótesis implica que existe una constante $K > 0$ tal que

$$|u_i - v_i| \leq K|u_0 - v_0|, \quad \text{para cada} \quad 1 \leq i \leq N,$$

siempre que $\{u_i\}_{i=1}^N$ y $\{v_i\}_{i=1}^N$ satisfagan la ecuación de diferencia $w_{i+1} = w_i + h\phi(t_i, w_i, h)$.

2. Para los métodos Adams-Bashforth y Adams-Moulton de orden 4,
   a. Muestre que si $f = 0$, entonces

$$F(t_i, h, w_{i+1}, \ldots, w_{i+1-m}) = 0.$$

   b. Muestre que si f satisface la condición de Lipschitz con la constante L, entonces existe una constante C con

$$|F(t_i, h, w_{i+1}, \ldots, w_{i+1-m}) - F(t_i, h, v_{i+1}, \ldots, v_{i+1-m})| \leq C \sum_{j=0}^{m} |w_{i+1-j} - v_{i+1-j}|.$$

3. Use los resultados del ejercicio 32 en la sección 5.4 para mostrar que el método Runge-Kutta de orden 4 es consistente.
4. Considere la ecuación diferencial

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha.$$

   a. Muestre que

$$y'(t_i) = \frac{-3y(t_i) + 4y(t_{i+1}) - y(t_{i+2})}{2h} + \frac{h^2}{3} y'''(\xi_1),$$

   para alguna ξ, donde $t_i < \xi_i < t_{i+2}$.

   b. La parte a) sugiere el método de diferencia

$$w_{i+2} = 4w_{i+1} - 3w_i - 2hf(t_i, w_i), \quad \text{para } i = 0, 1, \ldots, N-2.$$

   Use este método para resolver

$$y' = 1 - y, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 0,$$

   con $h = 0.1$. Utilice los valores iniciales $w_0 = 0$ y $w_1 = y(t_1) = 1 - e^{-0.1}$.

   c. Repita la parte b) con $h = 0.01$ y $w_1 = 1 - e^{-0.01}$.

   d. Analice este método para consistencia, estabilidad y convergencia.

5. Dado el método multipasos

$$w_{i+1} = -\frac{3}{2}w_i + 3w_{i-1} - \frac{1}{2}w_{i-2} + 3hf(t_i, w_i), \quad \text{para } i = 2, \ldots, N-1,$$

con valores iniciales w_0, w_1, w_2:

a. Encuentre el error de truncamiento local.

b. Comente sobre consistencia, estabilidad y convergencia.

6. Obtenga una solución aproximada para la ecuación diferencial

$$y' = -y, \quad 0 \leq t \leq 10, \quad y(0) = 1$$

usando el método de Milne con $h = 0.1$ y $h = 0.01$, con valores iniciales $w_0 = 1$ y $w_1 = e^{-h}$ en ambos casos. ¿Cómo afecta la disminución de h desde $h = 0.1$ hasta $h = 0.01$ al número de dígitos correctos en las soluciones aproximadas en $t = 1$ y $t = 10$?

7. Investigue la estabilidad del método de diferencia

$$w_{i+1} = -4w_i + 5w_{i-1} + 2h[f(t_i, w_i) + 2hf(t_{i-1}, w_{i-1})],$$

para $i = 1, 2, \ldots, N-1$, con valores iniciales w_0, w_1.

8. Considere el problema $y' = 0, 0 \leq t \leq 10$, $y(0) = 0$, que tiene la solución $y \equiv 0$. Si el método de diferencia del ejercicio 4 se aplica al problema, entonces

$$w_{i+1} = 4w_i - 3w_{i-1}, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$w_0 = 0, \quad \text{y} \quad w_1 = \alpha_1.$$

Suponga que $w_1 = \alpha_1 = \varepsilon$ donde ε es un error de redondeo pequeño. Calcule w_i exactamente para $i = 2, 3, \ldots, 6$ para encontrar cómo se propaga el error ε.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Analice la diferencia entre error de truncamiento local, error local, error de truncamiento global y error global.

2. Describa las regiones de estabilidad para el método de Euler, el método Runge de segundo orden y la regla de Kutta-Simpson de cuarto orden.

3. Para casi todos los problemas de valor inicial bien condicionados, por lo común, un método firmemente inestable (en aritmética de punto flotante) produce soluciones que se vuelven inútiles rápidamente. Analice la razón por la que esto pasa.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 5.11

1. Resuelva los siguientes problemas de valor inicial rígido con el método de Euler y compare los resultados con la solución real.

a. $y' = -9y, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = e$, con $h = 0.1$; solución real $y(t) = e^{1-9t}$.

b. $y' = -20(y - t^2) + 2t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = \frac{1}{3}$, con $h = 0.1$; solución real $y(t) = t^2 + \frac{1}{3}e^{-20t}$.

c. $y' = -20y + 20 \operatorname{sen} t + \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 1$, con $h = 0.25$; solución real $y(t) = \operatorname{sen} t + e^{-20t}$.

d. $y' = 50/y - 50y, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = \sqrt{2}$, con $h = 0.1$; solución real $y(t) = (1 + e^{-100t})^{1/2}$.

2. Resuelva los siguientes problemas de valor inicial rígido con el método de Euler y compare los resultados con la solución real.

a. $y' = -5y + 6e^t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 2$, con $h = 0.1$; solución real $y(t) = e^{-5t} + e^t$.

b. $y' = -10y + 10t + 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = e$, con $h = 0.1$; solución real $y(t) = e^{-10t+1} + t$.

c. $y' = -15(y - t^{-3}) - 3/t^4, \quad 1 \leq t \leq 3, \quad y(1) = 0$, con $h = 0.25$; solución real $y(t) = -e^{-15t} + t^{-3}$.

d. $y' = -20y + 20\cos t - \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0$, con $h = 0.25$; solución real $y(t) = -e^{-20t} + \cos t$.

3. Repita el ejercicio 1 con el método Runge-Kutta de cuarto orden.
4. Repita el ejercicio 2 con el método Runge-Kutta de cuarto orden.
5. Repita el ejercicio 1 con el método Adams indicador-corrector de cuarto orden.
6. Repita el ejercicio 2 con el método Adams indicador-corrector de cuarto orden.
7. Repita el ejercicio 1 con el algoritmo trapezoidal con $TOL = 10^{-5}$.
8. Repita el ejercicio 2 con el algoritmo trapezoidal con $TOL = 10^{-5}$.
9. Resuelva el siguiente problema de valor inicial rígido con el método Runge-Kutta de cuarto orden con a) $h = 0.1$ y b) $h = 0.025$.

$$u_1' = 32u_1 + 66u_2 + \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}, \quad 0 \le t \le 0.5, \quad u_1(0) = \frac{1}{3};$$
$$u_2' = -66u_1 - 133u_2 - \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}, \quad 0 \le t \le 0.5, \quad u_2(0) = \frac{1}{3}.$$

Compare los resultados con la solución real,

$$u_1(t) = \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-100t} \quad \text{y} \quad u_2(t) = -\frac{1}{3}t - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-100t}.$$

EJERCICIOS TEÓRICOS

10. Muestre que el método Runge-Kutta de cuarto orden

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_i, w_i), \\ k_2 &= hf(t_i + h/2, w_i + k_1/2), \\ k_3 &= hf(t_i + h/2, w_i + k_2/2), \\ k_4 &= hf(t_i + h, w_i + k_3), \\ w_{i+1} &= w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \end{aligned}$$

al aplicarlo a la ecuación diferencial $y' = \lambda y$, se puede reescribir de la forma

$$w_{i+1} = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 + \frac{1}{6}(h\lambda)^3 + \frac{1}{24}(h\lambda)^4\right) w_i.$$

11. El método regresivo de Euler de un paso está definido por

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_{i+1}, w_{i+1}), \quad \text{para } i = 0, \ldots, N-1.$$

Muestre que $Q(h\lambda) = 1/(1 - h\lambda)$ para el método regresivo de Euler.

12. Aplique el método regresivo de Euler a las ecuaciones diferenciales dadas en el ejercicio 1. Use el método de Newton para resolver para w_{i+1}.
13. Aplique el método regresivo de Euler a las ecuaciones diferenciales dadas en el ejercicio 2. Use el método de Newton para resolver para w_{i+1}.
14. **a.** Muestre que el método trapezoidal implícito es A-estable.
    b. Muestre que el método regresivo de Euler descrito en el ejercicio 12 es A-estable.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Analice la consistencia, estabilidad y convergencia del método trapezoidal implícito

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left(f(t_{i+1}, w_{i+1}) + f(t_i, w_i)\right), \quad \text{para } i = 0, 1, \ldots, N-1,$$

con $w_0 = \alpha$ aplicado a la ecuación diferencial
$$y' = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha.$$

2. El siguiente sistema describe la reacción química de Robertson. Ésta se considera un sistema "rígido" de EDO. ¿El algoritmo 5.8 puede aplicarse a este sistema en $0 \leq x \leq 40$? ¿Por qué sí o por qué no?

$$y_1' = -0.04y_1 + 10^4 y_2 y_3$$

$$y_2' = -0.04y_1 - 10^4 y_2 y_3 - 3 \times 10^7 y_2^2$$

$$y_3' = 3 \times 10^7 y_2^2$$

PREGUNTAS DE ANÁLISIS (FINAL DEL CAPÍTULO)

1. Seleccione dos de los métodos analizados en este capítulo y compare y contraste su utilidad y estabilidad.
2. Seleccione uno de los algoritmos presentados en el capítulo y analice cómo se podría usar una hoja de cálculo de Excel para implementarlo.
3. Seleccione uno de los algoritmos presentados en el capítulo y analice cómo se podría utilizar MAPLE para implementarlo.
4. Seleccione uno de los algoritmos presentados en el capítulo y analice cómo se podría utilizar MATLAB para implementarlo.
5. Seleccione uno de los algoritmos presentados en el capítulo y analice cómo se podría utilizar Mathematica para implementarlo.

CONCEPTOS CLAVE

A-estable
Adams-Bashforth
Adams-Moulton
Condición de Lipschitz
Control de error en método RKF
Cotas de error para el método de Euler
Ecuación diferencial rígida
Ecuaciones de orden superior
Error de truncamiento local
Estabilidad
Método de Euler
Método de Euler de orden superior
Método indicador-corrector
Método RK para sistemas
Método Runge-Kutta-Fehlberg (RKF)
Métodos de extrapolación
Métodos de Runge-Kutta
Métodos multipasos
Métodos multipasos de tamaño de paso variable
Polinomio característico
Problema bien planteado
Problema de valor inicial
Problema perturbado
Región de estabilidad
Sistemas de ecuaciones diferenciales

REVISIÓN DEL CAPÍTULO

En este capítulo hemos considerado métodos para aproximar las soluciones de los problemas de valor inicial para las ecuaciones diferenciales ordinarias. Comenzamos con un análisis sobre la técnica numérica fundamental, el método de Euler. Este procedimiento no es suficientemente preciso para utilizarse en aplicaciones, pero ilustra la conducta general de las técnicas más poderosas sin las dificultades algebraicas que las acompañan. A continuación, consideramos los métodos de Taylor como generalizaciones del método de Euler. Encontramos que éstos son precisos, pero engorrosos debido a la necesidad de determinar derivadas parciales extensas de la función de definición de la ecuación diferencial. Las fórmulas Runge-Kutta simplificaban los métodos de Taylor sin aumentar el orden del error. Hasta este punto sólo consideramos métodos de un paso, técnicas que solamente utilizan datos en el punto calculado más reciente.

Los métodos multipasos se analizaron en la sección 5.6, donde consideramos los métodos explícitos de tipo Adams-Bashforth y los métodos implícitos tipo Adams-Moulton. Esto culminó en los métodos indicador-corrector, que usan un método explícito, como Adams-Bashforth, para predecir la solución y, después, aplicar uno implícito correspondiente, como Adams-Moulton, para corregir la aproximación.

La sección 5.9 ilustraba cómo se pueden usar estas técnicas para resolver los problemas de valor inicial de orden superior y los sistemas de problemas de valor inicial.

Los métodos adaptables más precisos están basados en las técnicas, relativamente poco complicadas, multipasos y de un paso. En particular, en la sección 5.5 observamos que el método Runge-Kutta-Fehlberg es un procedimiento de un paso que busca seleccionar espaciado de malla para mantener bajo control el error local de la aproximación. El método indicador-corrector de tamaño de paso variable en la sección 5.7 está basado en el método Adams-Bashforth de cuatro pasos y en el método Adams-Moulton de tres pasos. También cambia el tamaño de paso para mantener el error local dentro de una tolerancia determinada. El método de extrapolación, analizado en la sección 5.8, se basa en una modificación del método de punto medio e incluye la extrapolación para mantener la precisión deseada de la aproximación.

El tema final en el capítulo abordaba la dificultad inherente en la aproximación de la solución de una ecuación rígida, una ecuación diferencial cuya solución exacta contiene una parte de la forma $e^{-\lambda t}$, donde λ es una constante positiva. Se debe tener extrema precaución con este tipo de problemas o los resultados pueden ser abrumadores debido al error de redondeo.

En general, los métodos tipo Runge-Kutta-Fehlberg son suficientes para los problemas no rígidos cuando se requiere precisión moderada. Los procedimientos de extrapolación se recomiendan para los problemas no rígidos cuando se requiere alta precisión. Las extensiones del método trapezoidal implícito para los métodos tipo Adams implícito de orden y tamaño de orden variable se usan en los problemas de valor inicial rígido.

Muchos libros se especializan en la solución numérica de los problemas de valor inicial. Dos clásicos son Henrici [He1] y Gear [Ge1]. Otros libros que estudian el campo son Botha y Pinder [BP], Ortega y Poole [OP], Golub y Ortega [GO], Shampine [Sh] y Dormand [Do].

Dos libros de Hairer, Nörsett y Warner proveen análisis amplios sobre problemas no rígidos [HNW1] y rígidos [HNW2]. El libro de Burrage [Bur] describe métodos paralelos y secuenciales.