Capítulo 11

CONJUNTO DE EJERCICIOS 11.1

1. El problema de valor en la frontera

$$y'' = 4(y - x), \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2,$$

tiene la solución $y(x) = e^2(e^4 - 1)^{-1}(e^{2x} - e^{-2x}) + x$. Use el método de disparo lineal para aproximar la solución y compare los resultados con la solución real.

a. Con $h = \frac{1}{2}$; **b.** Con $h = \frac{1}{4}$.

2. El problema de valor en la frontera

$$y'' = y' + 2y + \cos x, \quad 0 \le x \le \tfrac{\pi}{2}, \quad y(0) = -0.3, \quad y\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = -0.1$$

tiene la solución $y(x) = -\frac{1}{10}(\operatorname{sen} x + 3\cos x)$. Use el método de disparo lineal para aproximar la solución y compare los resultados con la solución real.

a. Con $h = \frac{\pi}{4}$; **b.** Con $h = \frac{\pi}{8}$.

3. Use el método de disparo lineal para aproximar la solución para los siguientes problemas de valor en la frontera.

a. $y'' = -3y' + 2y + 2x + 3, \quad 0 \le x \le 1,\ y(0) = 2,\ y(1) = 1;$ use $h = 0.1$.

b. $y'' = -4x^{-1}y' - 2x^{-2}y + 2x^{-2}\ln x, \quad 1 \le x \le 2,\ y(1) = -\frac{1}{2},\ y(2) = \ln 2;$ use $h = 0.05$.

c. $y'' = -(x+1)y' + 2y + (1 - x^2)e^{-x}, \quad 0 \le x \le 1,\ y(0) = -1,\ y(1) = 0;$ use $h = 0.1$.

d. $y'' = x{-}1y' + 3x^{-2}y + x^{-1}\ln x - 1, \quad 1 \le x \le 2,\ y(1) = y(2) = 0;$ use $h = 0.1$.

4. Aunque $q(x) < 0$ en los siguientes problemas de valor en la frontera, existen soluciones únicas y se dan aquí. Use el algoritmo de disparo lineal para aproximar las soluciones de los siguientes problemas y compare los resultados con las soluciones reales.

a. $y'' + y = 0, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4},\ y(0) = 1,\ y(\frac{\pi}{4}) = 1;$ use $h = \frac{\pi}{20}$; solución real $y(x) = \cos x + (\sqrt{2} - 1)\operatorname{sen} x$.

b. $y'' + 4y = \cos x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4},\ y(0) = 0,\ y(\frac{\pi}{4}) = 0;$ use $h = \frac{\pi}{20}$; solución real $y(x) = -\frac{1}{3}\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{6}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\cos x$.

c. $y'' = -4x^{-1}y' - 2x^{-2}y + 2x^{-2}\ln x, \quad 1 \le x \le 2,\ y(1) = \frac{1}{2},\ y(2) = \ln 2;$ use $h = 0.05$; solución real $y(x) = 4x^{-1} - 2x^{-2} + \ln x - 3/2$.

d. $y'' = 2y' - y + xe^x - x, \quad 0 \le x \le 2,\ y(0) = 0,\ y(2) = -4;$ use $h = 0.2$; solución real $y(x) = \frac{1}{6}x^3e^x - \frac{5}{3}xe^x + 2e^x - x - 2$.

5. Use el algoritmo de disparo lineal para aproximar la solución $y = e^{-10x}$ al problema de valor en la frontera

$$y'' = 100y, \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e^{-10}.$$

Use $h = 0.1$ y 0.05.

EJERCICIOS APLICADOS

6. Sea que u representa el potencial electrostático entre dos esferas de metal concéntricas de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$). El potencial de la esfera interna se mantiene constante en V_1 volts y el potencial de la esfera externa es 0 volts. El potencial en la región entre las dos esferas está regido por la ecuación de Laplace, la cual, en esta aplicación particular, se reduce a

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = 0, \quad R_1 \le r \le R_2, \quad u(R_1) = V_1, \quad u(R_2) = 0.$$

Suponga $R_1 = 2$ in., $R_2 = 4$ in., y $V_1 = 110$ volts.

a. Aproxime $u(3)$ usando el algoritmo de disparo lineal.
b. Compare los resultados de la parte a) con el potencial real $u(3)$, donde

$$u(r) = \frac{V_1 R_1}{r}\left(\frac{R_2 - r}{R_2 - R_1}\right).$$

EJERCICIOS TEÓRICOS

7. Escriba los problemas de valor inicial de segundo orden (11.3) y (11.4) como sistemas de primer orden y deduzca las ecuaciones necesarias para resolver los sistemas usando el método Runge-Kutta de cuarto orden para los sistemas.

8. Muestre que, de acuerdo con la hipótesis del corolario 11.2, si y_2 es la solución para $y'' = p(x)y' + q(x)y$ y $y_2(a) = y_2(b) = 0$, entonces $y_2 \equiv 0$.

9. Considere el problema de valor en la frontera

$$y'' + y = 0, \quad 0 \leq x \leq b, \quad y(0) = 0, \quad y(b) = B.$$

Encuentre valores para b y B, de tal forma que el problema de valor en la frontera

a. No tenga solución
b. Tenga una solución exacta
c. Tenga infinitas soluciones

10. Intente aplicar el ejercicio 9 al problema del valor en la frontera

$$y'' - y = 0, \quad 0 \leq x \leq b, \quad y(0) = 0, \quad y(b) = B.$$

¿Qué sucede? ¿Cómo se relacionan ambos problemas con el corolario 11.2?

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. ¿Por qué un solucionador de valor en la frontera con base en el método de disparo usando un método Runge-Kutta continuo con control de defecto para resolver el problema de valor inicial relacionado podría tener un mejor desempeño que el método de disparo lineal?

2. El disparo múltiple es una de las técnicas numéricas que más se usan para resolver los problemas BVODE. Los algoritmos paralelos son algoritmos que se pueden ejecutar de manera simultánea uno a la vez en diferentes dispositivos de procesamiento y, a continuación, combinarse de nuevo al final para obtener un resultado. ¿Tiene sentido usar un algoritmo numérico paralelo para BVODE con base en disparo múltiple?

3. ¿Por qué deberían verificarse las condiciones del teorema 11.1 que garantiza la existencia de una solución para un BVP antes de aplicar cualquier esquema numérico?

4. ¿Los métodos de disparo lineal son estales? ¿Por qué sí o por qué no?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 11.2

1. Use el algoritmo de disparo no lineal con $h = 0.5$ para aproximar la solución al problema de valor en la frontera

$$y'' = -(y')^2 - y + \ln x, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = \ln 2.$$

Compare sus resultados con la solución real $y = \ln x$.

2. Use el algoritmo de disparo no lineal con $h = 0.25$ para aproximar la solución al problema de valor en la frontera

$$y'' = 2y^3, \quad -1 \leq x \leq 0, \quad y(-1) = \frac{1}{2}, \quad y(0) = \frac{1}{3}.$$

Compare sus resultados con la solución real $y(x) = 1/(x + 3)$.

Compare sus resultados con la solución real $y(x) = 1/(x+3)$.

3. Use el método de disparo no lineal con $TOL = 10^{-4}$ para aproximar la solución de los siguientes problemas de valor en la frontera. Se proporciona la solución real para comparar sus resultados.

a. $y'' = -e^{-2y}$, $1 \le x \le 2$, $y(1) = 0$, $y(2) = \ln 2$; use $N = 10$; solución real $y(x) = \ln x$.

b. $y'' = y' \cos x - y \ln y$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $y(0) = 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$; use $N = 10$; solución real $y(x) = e^{\operatorname{sen} x}$.

c. $y'' = -\left(2(y')^3 + y^2 y'\right) \sec x$, $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{3}$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2^{-1/4}$, $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt[4]{12}$; use $N = 5$; solución real $y(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$.

d. $y'' = \frac{1}{2}\left(1 - (y')^2 - y \operatorname{sen} x\right)$, $0 \le x \le \pi$, $y(0) = 2$, $y(\pi) = 2$; use $N = 20$; solución real $y(x) = 2 + \operatorname{sen} x$.

4. Use el método de disparo no lineal con $TOL = 10^{-4}$ para aproximar la solución de los siguientes problemas de valor en la frontera. Se proporciona la solución real para comparar sus resultados.

a. $y'' = y^3 - yy'$, $1 \le x \le 2$, $y(1) = \frac{1}{2}$, $y(2) = \frac{1}{3}$; use $h = 0.1$; solución real $y(x) = (x+1)^{-1}$.

b. $y'' = 2y^3 - 6y - 2x^3$, $1 \le x \le 2$, $y(1) = 2$, $y(2) = \frac{5}{2}$; use $h = 0.1$; solución real $y(x) = x + x^{-1}$.

c. $y'' = y' + 2(y - \ln x)^3 - x^{-1}$, $2 \le x \le 3$, $y(2) = \frac{1}{2} + \ln 2$, $y(3) = \frac{1}{3} + \ln 3$; use $h = 0.1$; solución real $y(x) = x^{-1} + \ln x$.

d. $y'' = 2(y')^2 x^{-3} - 9y^2 x^{-5} + 4x$, $1 \le x \le 2$, $y(1) = 0$, $y(2) = \ln 256$; use $h = 0.05$; solución real $y(x) = x^3 \ln x$.

EJERCICIOS APLICADOS

5. La ecuación Van der Pol,

$$y'' - \mu(y^2 - 1)y' + y = 0, \quad \mu > 0,$$

rige el flujo de corriente en un tubo de vacío con tres elementos internos. Si $\mu = \frac{1}{2}$, $y(0) = 0$, y $y(2) = 1$. Aproxime la solución $y(t)$ para $t = 0.2i$, donde $1 \le i \le 9$.

EJERCICIOS TEÓRICOS

6. a. Modifique el algoritmo 11.2 para incluir el método de secante en lugar del método de Newton. Use $t_0 = (\beta - \alpha)/(b - a)$ y $t_1 = t_0 + (\beta - y(b, t_0))/(b - a)$.

b. Repita el ejercicio 4a) y 4c) usando el algoritmo de secante derivado en la parte (a) y compare el número de iteraciones requeridas para los dos métodos.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. ¿Tiene sentido combinar el método explícito de Euler con el método de Newton para resolver los problemas no lineales de valor en la frontera en dos puntos?

2. Se desarrolló un método de disparo modificado que combinaba el método de disparo simple con el de un método de disparo múltiple. ¿Cuáles son las ventajas (desventajas) de ese tipo de enfoque?

3. ¿Los métodos de disparo no lineal son estables? ¿Por qué sí o por qué no?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 11.3

1. El problema de valor en la frontera

$$y'' = 4(y - x), \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2,$$

tiene la solución $y(x) = e^2(e^4 - 1)^{-1}(e^{2x} - e^{-2x}) + x$. Use el método de diferencia finita lineal para aproximar la solución y compare los resultados con la solución real.

a. Con $h = \frac{1}{2}$; **b.** Con $h = \frac{1}{4}$.

c. Use la extrapolación para aproximar $y(1/2)$.

2. El problema de valor en la frontera

$$y'' = y' + 2y + \cos x, \quad 0 \le x \le \tfrac{\pi}{2}, \quad y(0) = -0.3, \quad y\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = -0.1,$$

tiene la solución $y(x) = -\frac{1}{10}(\operatorname{sen} x + 3\cos x)$. Use el método de diferencia finita lineal para aproximar la solución y compare los resultados con la solución real.

a. Con $h = \frac{\pi}{4}$; **b.** Con $h = \frac{\pi}{8}$.

c. Use la extrapolación para aproximar $y(\pi/4)$.

3. Use el algoritmo de diferencia finita lineal para aproximar la solución para los siguientes problemas de valor en la frontera.

a. $y'' = -3y' + 2y + 2x + 3, \quad 0 \le x \le 1,\ y(0) = 2,\ y(1) = 1$; use $h = 0.1$.

b. $y'' = -4x^{-1}y' + 2x^{-2}y - 2x^{-2}\ln x, \quad 1 \le x \le 2,\ y(1) = -\frac{1}{2},\ y(2) = \ln 2$; use $h = 0.05$.

c. $y'' = -(x+1)y' + 2y + (1 - x^2)e^{-x}, \quad 0 \le x \le 1,\ y(0) = -1,\ y(1) = 0$; use $h = 0.1$.

d. $y'' = x^{-1}y' + 3x^{-2}y + x^{-1}\ln x - 1, \quad 1 \le x \le 2,\ y(1) = y(2) = 0$; use $h = 0.1$.

4. A pesar de que $q(x) < 0$ en los siguientes problemas de valor en la frontera, existen y se proporcionan soluciones únicas. Use el algoritmo de diferencia finita lineal para aproximar las soluciones y compare los resultados con las soluciones reales.

a. $y'' + y = 0, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4},\ y(0) = 1,\ y(\frac{\pi}{4}) = 1$; use $h = \frac{\pi}{20}$; solución real $y(x) = \cos x + \left(\sqrt{2} - 1\right)\operatorname{sen} x$.

b. $y'' + 4y = \cos x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4},\ y(0) = 0,\ y(\frac{\pi}{4}) = 0$; use $h = \frac{\pi}{20}$; solución real $y(x) = -\frac{1}{3}\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{6}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\cos x$.

c. $y'' = -4x^{-1}y' - 2x^{-2}y + 2x^{-2}\ln x,\ y(1) = \frac{1}{2},\ y(2) = \ln 2$; use $h = 0.05$; solución real $y(x) = 4x^{-1} - 2x^{-2} + \ln x - 3/2$.

d. $y'' = 2y' - y + xe^x - x, \quad 0 \le x \le 2,\ y(0) = 0,\ y(2) = -4$; use $h = 0.2$; solución real $y(x) = \frac{1}{6}x^3e^x - \frac{5}{3}xe^x + 2e^x - x - 2$.

5. Use el algoritmo de diferencia finita lineal para aproximar la solución $y = e^{-10x}$ para el problema de valor en la frontera

$$y'' = 100y, \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e^{-10}.$$

Use $h = 0.1$ y 0.05. ¿Puede explicar las consecuencias?

6. Repita el ejercicio 3a) y b) usando la extrapolación analizada en el ejemplo 2.

EJERCICIOS APLICADOS

7. El ejemplo principal de este capítulo abordaba la deflexión de una viga con extremos soportados sujetos a carga uniforme. El problema de valor en la frontera que rige esta situación física es

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{S}{EI}w + \frac{qx}{2EI}(x - l), \quad 0 < x < l,$$

con condiciones de frontera $w(0) = 0$ y $w(l) = 0$.

Suponga que la viga es de acero tipo W10 con las siguientes características: longitud $l = 120$ pulgadas, intensidad de una carga uniforme $q = 100$ libras/pie, módulo de elasticidad $E = 3.0 \times 10^7$ libras/pulgada^2, tensión en extremos $S = 1\,000$ libras, y momento central de inercia $I = 625$ pulgadas^4.

a. Aproxime la deflexión $w(x)$ de la viga cada 6 pulgadas.

b. La relación real está provista por

$$w(x) = c_1e^{ax} + c_2e^{-ax} + b(x - l)x + c,$$

donde $c_1 = 7.7042537 \times 10^4, c_2 = 7.9207462 \times 10^4, a = 2.3094010 \times 10^{-4}, b = -4.1666666 \times 10^{-3}$, y $c = -1.5625 \times 10^5$. ¿El error máximo se encuentra en el intervalo dentro de 0.2 pulgadas?

c. La ley de estado requiere que $\max_{0<x<l} w(x) < 1/300$. ¿Esta viga cumple con el código de estado?

8. La deflexión de una placa rectangular larga cargada de manera uniforme bajo una fuerza de tensión axial está regida por una ecuación diferencial de segundo orden. S representa la fuerza axial y q la intensidad de la carga uniforme. La deflexión W a lo largo de la longitud elemental está dada por

$$W''(x) - \frac{S}{D}W(x) = \frac{-ql}{2D}x + \frac{q}{2D}x^2, \quad 0 \le x \le l, \; W(0) = W(l) = 0,$$

donde l es la longitud de la placa y D es la rigidez de flexión de la placa. Si $q = 200$ libras/pulgada^2, $S = 100$ libra/pulgada, $D = 8.8 \times 10^7$ libra/pulgada y $1 = 50$ pulgadas. Aproxime la flexión en los intervalos de 1 pulgada.

EJERCICIOS TEÓRICOS

9. Pruebe que el teorema 11.3. [*Sugerencia*: Para usar el teorema 6.31, primero muestre que $\left|\frac{h}{2}p(x_i)\right| < 1$ implica que $\left|-1 - \frac{h}{2}p(x_i)\right| + \left|-1 + \frac{h}{2}p(x_i)\right| = 2.$]

10. Muestre que si $y \in C^6[a, b]$ y si $w_0, w_1, \ldots, w_{N+1}$ satisface la ecuación (11.18), entonces

$$w_i - y(x_i) = Ah^2 + O(h^4),$$

donde A es independiente de h, siempre que $q(x) \ge w > 0$ en $[a, b]$ para algunas w.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. ¿Cuál sería el efecto de usar la fórmula de diferencias hacia atrás o hacia adelante para y en lugar de la fórmula de diferencia centrada?

2. ¿Se podrían usar cocientes de diferencia de orden superior para las derivadas en el método de diferencia finita para mejorar la exactitud? ¿Cuál sería el efecto?

3. ¿Qué es cancelación sustractiva?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 11.4

1. Use el método de diferencias finitas no lineal con $h = 0.5$ para aproximar la solución del problema de valor en la frontera

$$y'' = -(y')^2 - y + \ln x, \quad 1 \le x \le 2, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = \ln 2.$$

Compare sus resultados con la solución real $y = \ln x$.

2. Use el método de diferencia finita no lineal con $h = 0.25$ para aproximar la solución del problema de valor en la frontera

$$y'' = 2y^3, \quad -1 \le x \le 0, \quad y(-1) = \frac{1}{2}, \quad y(0) = \frac{1}{3}.$$

Compare sus resultados con la solución real $y(x) = 1/(x + 3)$.

3. Use el algoritmo de diferencia finita no lineal con $TOL = 10^{-4}$ para aproximar la solución del problema de valor en la frontera

a. $y'' = -e^{-2y}$, $\quad 1 \le x \le 2$, $y(1) = 0$, $y(2) = \ln 2$; use $N = 9$; solución real $y(x) = \ln x$.

b. $y'' = y' \cos x - y \ln y$, $\quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $y(0) = 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$; use $N = 9$; solución real $y(x) = e^{\operatorname{sen} x}$.

c. $y'' = -\left(2(y')^3 + y^2 y'\right) \sec x$, $\quad \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{3}$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2^{-1/4}$, $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt[4]{12}$; use $N = 4$; solución real $y(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$.

d. $y'' = \frac{1}{2}\left(1 - (y')^2 - y \operatorname{sen} x\right)$, $\quad 0 \le x \le \pi$, $y(0) = 2$, $y(\pi) = 2$; use $N = 19$; solución real $y(x) = 2 + \operatorname{sen} x$.

4. Use el algoritmo de diferencia finita no lineal con $TOL = 10^{-4}$ para aproximar la solución del problema de valor en la frontera

a. $y'' = y^3 - yy'$, $1 \leq x \leq 2$, $y(1) = \frac{1}{2}$, $y(2) = \frac{1}{3}$; use $h = 0.1$; solución real $y(x) = (x+1)^{-1}$.

b. $y'' = 2y^3 - 6y - 2x^3$, $1 \leq x \leq 2$, $y(1) = 2$, $y(2) = \frac{5}{2}$; use $h = 0.1$; solución real $y(x) = x + x^{-1}$.

c. $y'' = y' + 2(y - \ln x)^3 - x^{-1}$, $2 \leq x \leq 3$, $y(2) = \frac{1}{2} + \ln 2$, $y(3) = \frac{1}{3} + \ln 3$; use $h = 0.1$; solución real $y(x) = x^{-1} + \ln x$.

d. $y'' = (y')^2 x^{-3} - 9y^2 x^{-5} + 4x$, $1 \leq x \leq 2$, $y(1) = 0$, $y(2) = \ln 256$; use $h = 0.05$; solución real $y(x) = x^3 \ln x$.

5. Repita el ejercicio 4(a) y 4(b) usando extrapolación.

EJERCICIOS APLICADOS

6. En el ejercicio 7 de la sección 11.3 se aproximó la deflexión de una viga con extremos soportados para carga uniforme. Al usar una representación de la curvatura más adecuada obtenemos la ecuación diferencial

$$[1 + (w'(x))^2]^{-3/2} w''(x) = \frac{S}{EI} w(x) + \frac{qx}{2EI}(x - l), \quad \text{para } 0 < x < l.$$

Aproxime la deflexión $w(x)$ de la viga cada 6 pulgadas y compare los resultados con los del ejercicio 7 de la sección 11.3.

EJERCICIOS TEÓRICOS

7. Muestre que la hipótesis enunciada al principio de esta sección garantiza la no singularidad de la matriz jacobiana J para $h < 2/L$.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. ¿Cuál sería el efecto de usar la fórmula de diferencias hacia atrás o hacia adelante para y en lugar de la fórmula de diferencia centrada?

2. ¿Sería posible usar cocientes de diferencia de orden superior para las derivadas en el método de diferencia finita para mejorar la exactitud? ¿Cuál sería el efecto?

CONJUNTO DE EJERCICIOS 11.5

1. Use el algoritmo lineal por tramos para aproximar la solución para el problema de valor en la frontera

$$y'' + \frac{\pi^2}{4} y = \frac{\pi^2}{16} \cos \frac{\pi}{4} x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0$$

usando $x_0 = 0, x_1 = 0.3, x_2 = 0.7, x_3 = 1$. Compare sus resultados con la solución real $y(x) = -\frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{2} x - \frac{\sqrt{2}}{6} \sin \frac{\pi}{2} x + \frac{1}{3} \cos \frac{\pi}{4} x$.

2. Use el algoritmo lineal por tramos para aproximar la solución al problema de valor en la frontera

$$-\frac{d}{dx}(xy') + 4y = 4x^2 - 8x + 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0$$

usando $x_0 = 0, x_1 = 0.4, x_2 = 0.8, x_3 = 1$. Compare sus resultados con la solución real $y(x) = x^2 - x$.

3. Use el algoritmo lineal por tramos para aproximar las soluciones de los problemas de valor en la frontera y compare los resultados con la solución real:

a. $-x^2 y'' - 2xy' + 2y = -4x^2$, $0 \leq x \leq 1$, $y(0) = y(1) = 0$; use $h = 0.1$; solución real $y(x) = x^2 - x$.

b. $-\frac{d}{dx}(e^x y') + e^x y = x + (2-x)e^x, \quad 0 \le x \le 1,\ y(0) = y(1) = 0;$ use $h = 0.1$; solución real $y(x) = (x-1)(e^{-x}-1)$.

c. $-\frac{d}{dx}(e^{-x} y') + e^{-x} y = (x-1) - (x+1)e^{-(x-1)}, \quad 0 \le x \le 1,\ y(0) = y(1) = 0;$ use $h = 0.05$; solución real $y(x) = x(e^x - e)$.

d. $-(x+1)y'' - y' + (x+2)y = [2-(x+1)^2]e\ln 2 - 2e^x, \quad 0 \le x \le 1,\ y(0) = y(1) = 0;$ use $h = 0.05$; solución real $y(x) = e^x \ln(x+1) - (e\ln 2)x$.

4. Use el algoritmo de spline cúbico con $n = 3$ para aproximar la solución del problema de valor en la frontera

$$y'' + \frac{\pi^2}{4}y = \frac{\pi^2}{16}\cos\frac{\pi}{4}x, \quad 0 \le x \le 1,\ y(0) = 0,\ y(1) = 0$$

y compare el resultado con la solución real proporcionada en el ejercicio 1.

5. Use el algoritmo de spline cúbico con $n = 3$ para aproximar la solución del problema de valor en la frontera

$$-\frac{d}{dx}(xy') + 4y = 4x^2 - 8x + 1, \quad 0 \le x \le 1,\ y(0) = 0,\ y(1) = 0$$

y compare el resultado con la solución real proporcionada en el ejercicio 2.

6. Repita el ejercicio 3 usando el algoritmo de spline cúbico.

EJERCICIOS APLICADOS

7. El ejemplo principal de este capítulo abordaba el problema de valor en la frontera

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{S}{EI}w + \frac{qx}{2EI}(x-l),\ 0 < x < l,\ w(0) = w(l) = 0.$$

Se resolvió un ejemplo especial usando diferencias finitas en el ejercicio 7 de la sección 11.3. El cambio en la variable $z = lz$ da el problema de valor en la frontera

$$-\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{Sl^2}{EI}w = -\frac{ql^4}{2EI}z(z-1),\ 0 < z < 1,\ z(0) = z(1) = 0.$$

Repita el ejercicio 7 de la sección 11.3 usando el algoritmo lineal por tramos.

8. En el ejercicio 8 de la sección 11.3, la deflexión de una placa rectangular larga cargada de manera uniforme bajo una fuerza de tensión axial está dirigida por un problema de valor en la frontera de segundo orden. Sea S la fuerza axial y q la intensidad de la carga uniforme. La deflexión W a lo largo de la longitud elemental está provista por

$$W''(x) - \frac{S}{D}W(x) = -\frac{ql}{2D}x + \frac{q}{2D}x^2,\ 0 < x < l,\ W(0) = W(l) = 0.$$

El cambio en la variable $x = lz$ transforma el problema de valor en la frontera

$$-\frac{d^2W}{dz^2} + \frac{Sl^2}{DI}W = \frac{ql^4}{2D}z - \frac{ql^4}{2D}z^2,\ 0 < z < 1,\ W(0) = W(1) = 0.$$

Repita el ejercicio 8 de la sección 11.3 usando el algoritmo de Rayleigh-Ritz de spline cúbico.

EJERCICIOS TEÓRICOS

9. Muestre que el problema de valor en la frontera

$$-\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y = f(x), \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta,$$

se puede transformar por medio del cambio de variable

$$z = y - \beta x - (1-x)\alpha$$

en la forma

$$-\frac{d}{dx}(p(x)z') + q(x)z = F(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 0.$$

10. Use el ejercicio 10 y el algoritmo lineal por tramos con $n = 9$ para aproximar la solución del problema de valor en la frontera

$$-y'' + y = x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1 + e^{-1}.$$

11. Repita el ejercicio 9 usando el algoritmo de spline cúbico.

12. Muestre que el problema de valor en la frontera

$$-\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta,$$

se puede transformar en la forma

$$-\frac{d}{dw}(p(w)z') + q(w)z = F(w), \quad 0 \leq w \leq 1, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 0,$$

mediante un método similar al que se dio en el ejercicio 9.

13. Muestre que las funciones base lineales por tramos $\{\phi_i\}_{i=1}^{n}$ son linealmente independientes.

14. Muestre que las funciones base de spline cúbico $\{\phi_i\}_{i=0}^{n+1}$ son linealmente independientes.

15. Muestre que la matriz dada por las funciones base lineales por tramos es definida positiva.

16. Muestre que la matriz dada por las funciones base de spline cúbico es definida positiva.

PREGUNTAS DE ANÁLISIS

1. Explique el significado de colocación. ¿Cómo difiere el método de colocación del método de Rayleigh-Ritz?
2. ¿Existe alguna diferencia entre los métodos de colocación y de Galerkin?

PREGUNTAS DE ANÁLISIS (FINAL DEL CAPÍTULO)

1. El conjunto de herramientas ACADO es un solucionador de disparo único directo con base en Runge-Kutta. Describa algunos aspectos de este conjunto de herramientas.
2. Describa el modelo del método de disparo Ejs.

CONCEPTOS CLAVE

Aproximación discreta
Base lineal por tramos
Diferencia finita
Extrapolación de Richards
Iteración de Newton
Lineal por tramos
Método de disparo lineal
Método de disparo no lineal
Método Rayleigh-Ritz
Métodos de diferencias finitas
Problema de valor lineal en la frontera
Problemas de variación Rayleigh-Ritz
Spline cúbico de Rayleigh-Ritz

REVISIÓN DEL CAPÍTULO

En este capítulo analizamos los métodos para aproximar soluciones de problemas de valor en la frontera. Para el problema de valor lineal en la frontera

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta,$$

consideramos tanto un método de disparo lineal como un método de diferencia finita para aproximar la solución. El método de disparo usa una técnica de valor inicial para resolver problemas

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad \text{para } a \le x \le b, \text{con } y(a) = \alpha \text{ y } y'(a) = 0,$$

y

$$y'' = p(x)y' + q(x)y, \quad \text{para } a \le x \le b, \text{con } y(a) = \text{ y } y'(a) = 1.$$

Un promedio ponderado de estas soluciones produce una solución del problema de valor lineal en la frontera, a pesar de que en ciertas situaciones existen problemas con error de redondeo.

En el método de diferencias finitas, colocamos y'' e y' con aproximaciones de diferencia y resolvemos un sistema lineal. A pesar de que las aproximaciones quizá no sean tan exactas como el método de disparo, existe menos sensibilidad al error de redondeo. Existen métodos de diferencia de orden superior o extrapolación para mejorar la exactitud.

Para el problema no lineal en la frontera

$$y'' = f(x, y, y'), \quad \text{para } a \le x \le b, \text{con } y(a) = \alpha \text{ y } y(b) = \beta,$$

también consideramos dos métodos. El método de disparo no lineal requiere la solución del problema de valor inicial

$$y'' = f(x, y, y'), \quad \text{para } a \le x \le b, \text{con } y(a) = \alpha \text{ y } y'(a) = t,$$

para una selección inicial de t. Mejoramos la selección de t al usar el método de Newton para aproximar la solución de $y(b, t) = \beta$. Este método requiere resolver dos problemas de valor inicial en cada iteración. La exactitud depende de la selección del método para resolver los problemas de valor inicial.

El método de diferencia finita para ecuación no lineal requiere reemplazar y'' e y' mediante cocientes de diferencia, lo cual resulta en un sistema no lineal. Este sistema se resuelve con el método de Newton. Es posible usar diferencias de orden superior o extrapolación para mejorar la exactitud. Los métodos de diferencia finita tienden a ser menos sensibles al error de redondeo que los métodos de disparo.

Se ilustró el método Rayleigh-Ritz-Galerkin para aproximar la solución del problema de valor en la frontera

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = f(x), \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Se puede obtener una aproximación lineal por tramos o una aproximación por spline cúbico.

La mayor parte del material que aborda los problemas de valor en la frontera de segundo orden se puede esperar para problemas con condiciones en la frontera de la forma

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \alpha \quad \text{y} \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \beta,$$

donde $|\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0$ y $|\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0$, pero algunas de las técnicas se vuelven bastante complicadas. Se aconseja al lector interesado en problemas de este tipo considerar un libro especializado en problemas de valor en la frontera, como [Keller, H].

Más información sobre los problemas generales relacionados con la solución numérica de los problemas de valor en la frontera de dos puntos se puede encontrar en Keller [Keller, H] y Bailey, Shampine y Waltman [BSW]. Roberts y Shipman [RS] se enfocan en los métodos de disparo para el problema de valor en la frontera en dos puntos y Pryce [Pr] restringe su atención a los problemas Sturm-Liouville. El libro de Ascher, Mattheij y Russell [AMR] incluye una presentación amplia de múltiples métodos de disparo y de disparo paralelo.